MASARYKOVA UNIVERZITA
EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA

Finanční matematika

Distanční studijní opora

Petr Červinek, František Čámský

Brno 2009

Lektoroval: Ing. Boris Šturc

Předmluva

Distanční studijní opora (DSO) je určena především studentům kombinované formy studia, kteří absolvují předmět Finanční matematika na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity. DSO mohou využít i studenti prezenčního studia.

DSO obsahuje shrnutí základních znalostí, které by měl student mít po absolvování předmětu Finanční matematika. Dále obsahuje náznaky uplatnění těchto znalostí i v situacích, které nejsou přímo řešeny v rámci DSO ani v rámci dostupné (doporučené) literatury a přesto je možno takovéto situace řešit za použití získaných znalostí a (prostého) logického uvažování. DSO vychází ze studijní opory, která byla napsána RNDr. Františkem Čámským a vydána v roce 2005 (viz. použitá a doporučená literatura). V předkládané DSO jsou zahrnuty i poznatky autora ohledně pro studenty problematičtějších částí probírané látky. Tyto poznatky autor zohlednil při výkladu jednotlivých problémových témat. Autor doufá, že se mu podařilo zmíněné problematické části vyložit srozumitelně a pochopitelně.

Předmět Finanční matematika se zabývá základy rozsáhlého oboru. Probírána je především problematika jednoduchého, složeného a kombinovaného úročení, spoření krátkodobého i dlouhodobého, důchodů dočasných i věčných a úvěrů. Důraz je kladen především na princip fungování jednotlivých vztahů mezi různými veličinami (počáteční kapitál versus koncový kapitál, spořená částka versus naspořená částka atd.). Tyto obecné principy jsou využity v konkrétních situacích (u konkrétních produktů finančního trhu). Na základě znalostí obecných principů a pochopení ukázkové aplikace, by měl student být schopen vyřešit obdobný problém (např. na základě obecných principů spoření a po pochopení „obyčejného“ spoření na bankovní účet by měl student být schopen řešit problematiku stavebního spoření).

Není nutné učit se všechny vzorce uvedené v DSO. Přestože je mnohem důležitější pochopení principů a získání schopnosti patřičný vzorec odvodit, zapamatování si některých vhodně vybraných vzorců může některé situace urychlit, a tím usnadnit. Přesto mohou nastat situace, kdy je nutno zapamatovaný vzorec modifikovat, aby jsme dospěli ke správnému výsledku. Proto mějte na paměti, za jakých předpokladů jste se daný vzorec naučili a zda jej můžete využít i v situaci, kterou budete právě řešit. Nebuďte jako většina strojů, které pro daný problém mají zapamatovaný (naprogramovaný) jeden postup a nejsou schopny bez zásahu obsluhy řešit ani lehce modifikovanou úlohu. Život dokáže přichystat širokou paletu úloh, které jsou v principu stejné, ale je nutno řešit odlišnosti.

Přestože autor předpokládá, že studenti mají dostatečné znalosti středoškolské matematiky, jsou důležitá témata středoškolské matematiky shrnuta i v předkládané DSO.

DSO obsahuje nejen řešené příklady, ale i neřešené příklady s výsledky. Označení „*“ u příkladu znamená, že daný příklad je těžší a jeho řešení není přímočaré jako u ukázkových příkladu kapitoly; je ovšem možné daný příklad vyřešit za použití logiky konstrukce vzorečků dané kapitoly resp. všech předchozích kapitol a za použití logického uvažování.

Časová náročnost na prostudování DSO závisí od schopnosti studenta propočítat všechny příklady. Tento požadavek je zásadní, protože jedině propočítáním uvedených příkladů student zjistí, zda prostudovanou látku opravdu pochopil. Celková studijní zátěž pro absolvování předmětu by měla být 151 hodin (včetně přípravy a zpracování Práce opravované tutorem a přípravy na průběžné testy a na zkoušku).

Autoři

Obsah

1 Potřebné základy z matematiky

1.1 Procentový počet

Procento - vyjadřuje jednu setinu celku

Pro jedno procento platí:

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ ze základu}$$

100 % = jeden celek = celý základ

V jednoduchých úlohách s procenty se setkáváme s těmito veličinami.

a) ***základ*** *- označujeme jej* ***z***
b) ***počet procent*** *- označujeme jej* ***p***
c) ***procentová část*** *- označujeme ji* ***x***

Obecně při řešení jednoduchých úloh většinou známe dvě hodnoty a chceme vypočítat třetí, kterou neznáme a podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

a) **výpočet procentové části** : $x = \frac{z.p}{100}$

b) **výpočet základu** : $z = \frac{x.100}{p}$

c) **výpočet počtu procent** : $p = \frac{x.100}{z}$

K výpočtům bez použití uvedených vzorců můžeme použít úměru nebo trojčlenku.

Příklad 1.1

Prodejna měla sjednaný podíl na zisku ve výši 10% z prodejní ceny výrobku. Kolik je to procent z výrobní ceny výrobku, jestliže prodejní cena byla 115 % výrobní ceny?

Řešení:

Máme tedy zjistit, jak velkou část činí zisk ve výši 10 % z prodejní ceny vzhledem k výrobní ceně.

z = 115

p = 10 % $$x = \frac{z.p}{100} = \frac{115.10}{100} = 11{,}50\ \%$$

x =?

Zisk činil 11,50 % z výrobní ceny.

Příklad 1.2
Daň z příjmu činila při daňové sazbě 25,5 % částku 1250 Kč. Jak vysoký byl příjem?

Řešení:

x = 1250 Kč

p = 25,5 % $$z=\frac{x.100}{\mathrm{p}}=\frac{1\,250.100}{25{,}5}=4\,901{,}9608\ \text{Kč}$$

z =?

Tuto úlohu můžeme vypočítat také pomocí úměry:

25,5 % ... odpovídá... 1250 Kč
100 % ... odpovídá... z Kč

Zapíšeme: z: 1250 = 100: 25,5 nebo $\frac{z}{1250}=\frac{100}{25{,}5}$

Hrubý příjem činil 4.901,9608 Kč.

1.2 Funkce

Pro pochopení závislostí ve finanční matematice si zopakujeme některé funkce, na které se budeme při vysvětlování finanční matematiky odvolávat.

1.2.1 Pojem funkce

Funkcí rozumíme předpis, kterým každému číslu x z určité množiny D přiřazujeme právě jedno číslo y z množiny M.
Veličinu x nazýváme **nezávisle proměnnou**.
Veličinu y nazýváme **závisle proměnnou** (závisí na volbě hodnoty x).
Množinu D všech čísel x, pro něž je funkce definovaná, nazýváme **definičním oborem** funkce f.
Množinu M všech čísel y, kterých daná funkce nabývá pro $x \in D$, nazýváme **oborem hodnot** (oborem funkčních hodnot nebo závislým oborem) funkce f.

Zapisujeme: $\boldsymbol{y=f(x)}$

Poznámka:
Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot x_i, y_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\cdots=\frac{y_n}{x_n}=k$$

Příklad 1.3
Cena za 1 kg pomerančů je 23 Kč. Jaká bude cena za 3 kg pomerančů?

Řešení:
Cena za 3 kg pomerančů je závisle proměnná, počet kilogramů závisí na naší volbě - hodnota nezávisle proměnná.

Potom zapíšeme:
$y = 23 \cdot x = 23 \cdot 3 = 69\ Kč$

V matematice na základní i střední škole jste jistě probírali řadu funkcí. Pro naši potřebu ve finanční matematice si vysvětlíme pouze ty funkce, které budeme potřebovat pro vysvětlení některých funkčních závislostí a vytvořili si potřebné předpoklady jejich pochopení.

1.2.2 Lineární funkce

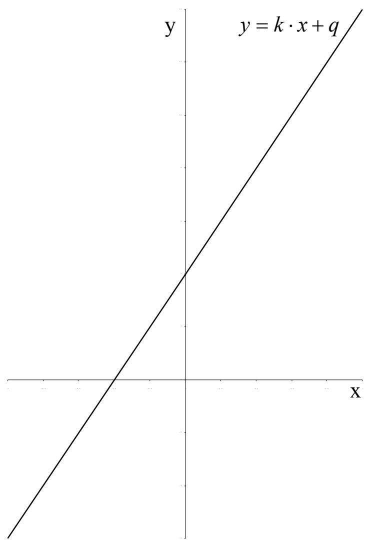
V ekonomických úvahách se často setkáme se závislostí, kterou nazýváme přímá úměrnost. Tato přímá úměrnost je dána lineární funkcí.

Lineární funkci zapisujeme vztahem: $y = k \cdot x + q \qquad x \in \boldsymbol{R}$

kde k, q jsou konstanty - k udává směrnici přímky a můžeme jí vyjádřit jako $k = tg\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka s osou x; q je úrovňová konstanta – udává hodnotu průsečíku s osou y.

Grafem lineární funkce je přímka v rovině.

Graf 1.1 Lineární funkce



1.2.3 Exponenciální funkce

Pod pojmem exponenciální funkce rozumíme takovou funkci, která má nezávisle proměnnou v exponentu.

Exponenciální funkci zapisujeme vztahem: $y = a^x$, $a \in (0;\infty)$

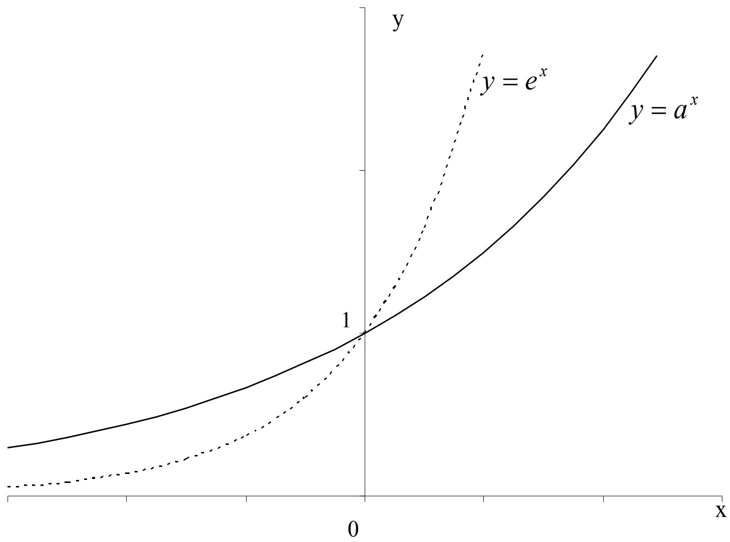
Definiční obor: $D(f) = (-\infty;\infty)$
Obor hodnot: $H(f) = (0;\infty)$

Pro a > 1 je funkce rostoucí a pro 0 < a < 1 je funkce klesající.
Pro $x = 0$ je $y = 1$ pro každou exponenciální funkci ať je a (základ) jakékoliv reálné číslo.
Funkční hodnoty exponenciální funkce jsou pro libovolné hodnoty nezávisle proměnné x vždy kladné.

Speciálním případem exponenciální funkce je $y = e^x$, jejímž základem je Eulerovo číslo ($e = 2{,}71828182845905$) a která je rostoucí pro všechna $x \in (-\infty;\infty)$.

Exponenciální funkcí můžeme vyjádřit složené úročení, jestliže nezávisle proměnou je čas t a závisle proměnnou je velikost zúročeného kapitálu K_t, při zvolené úrokové sazbě.

Graf 1.2 Exponenciální funkce



1.2.4 Logaritmická funkce

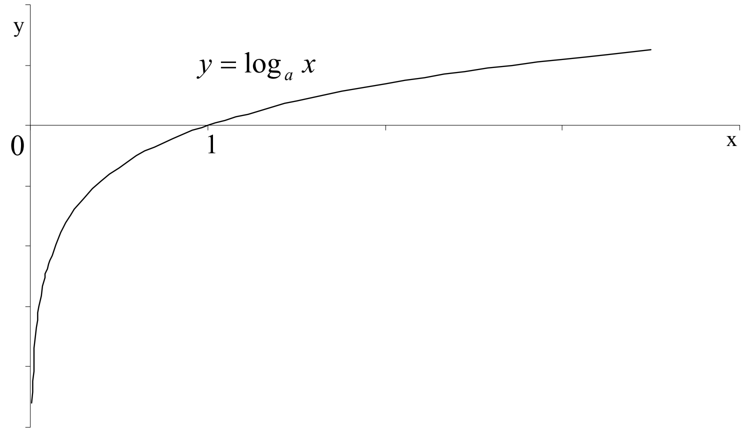
Ze střední školy je známo, že logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální. Definiční obor exponenciální funkce je oborem funkčních hodnot funkce logaritmické a obor funkčních hodnot exponenciální funkce je definičním oborem funkce logaritmické.

Pro logaritmickou funkci tedy platí: $D(f) = (0;\infty)$, $H(f) = (-\infty;\infty)$

Logaritmickou funkci zapisujeme vztahem: $y = log_a x$, kde $x \in (0;\infty)$

Platí: $y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$
Číslo x určíme, jestliže umocníme základ logaritmu na logaritmus čísla x.
V praxi se používají především dva speciální logaritmy. Jeden má základ (a) roven 10, pak mluvíme o (dekadickém) logaritmu a píšeme $y = log\,x$. Druhý má základ roven Eulerovu číslu, pak mluvíme o přirozeném logaritmu a píšeme $y = ln\,x$.

Graf 1.3 Logaritmická funkce



Příklad 1.4
Určete číslo x jestliže platí: $log_2 x = 3$

Řešení:
$2^3 = 8 \Rightarrow x = 8$

Tedy $log_2 8 = 3$

Pro početní úkony s logaritmy platí tato pravidla:
Jestliže x a y jsou libovolná čísla pak platí (při splnění určitých podmínek, které vyplývají z jednotlivých vztahů):

1. $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$
2. $log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$

3. $log_a x^n = n \cdot log_a x$

4. $log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \cdot log_a x$

5. $log_y x = \frac{log_a x}{log_a y}$

Příklad 1.5

$log\, x = log(134{,}678 \cdot 28{,}984) = log\, 134{,}678 + log\, 28{,}984$

$log\, x = 2{,}1292967 + 1{,}4621583 = 3{,}591455 \Rightarrow x = 3903{,}5073$

Příklad 1.6

$log\, x = log\left(\frac{134{,}678}{28{,}984}\right) = log\, 134{,}678 - log\, 28{,}984$

$log\, x = 2{,}1292967 - 1{,}4621583 = 0{,}6671384 \Rightarrow x = 4{,}646633$

Příklad 1.7

$log\, x = log\, 100^{0,05} = 0{,}05 \cdot log\, 100 = 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}1$

$log\, x = 0{,}1 \Rightarrow x = 1{,}25893$

Příklad 1.8

$log\, x = log \sqrt[0,24]{45^{3,4}} = \frac{3{,}4}{0{,}24} \cdot log\, 45 = 14{,}166667 \cdot 1{,}6532125 = 23{,}420511$

$log\, x = 23{,}420511 \Rightarrow x = 2{,}6333646 \cdot 10^{23}$

1.3 Průměry

1.3.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\overline{x}_a$ je pro n čísel $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ definován jako součet těchto čísel dělený jejich počtem.

Tedy:

$$\overline{x}_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Jestliže jsou mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, potom můžeme výpočet aritmetického průměru zjednodušit.

Mějme počet n_1 čísel a_1, n_2 čísel a_2, …, n_r čísel a_r, přičemž $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ potom

$$\overline{x}_a = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \cdots + n_n \cdot a_n}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}$$

V tomto případě mluvíme o **váženém aritmetickém průměru**, kde čísla $n_1, n_2, \cdots, n_r$ jsou váhy čísel $a_1, a_2, \cdots, a_r$.
S aritmetickým průměrem se setkáváme při výpočtu například střední doby splatnosti více pohledávek, očekávané výnosnosti cenných papírů atd.

1.3.2 Geometrický průměr

Druhým druhem průměru je **geometrický průměr** $\bar{x}_g$.
Mějme pro n kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, potom je geometrický průměr definován jako n-tá odmocnina součinu n čísel.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{a}_3 \cdot \cdots . \cdot \mathrm{a}_\mathrm{n}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Jsou-li mezi danými čísly některá čísla stejná, můžeme stejně jako u aritmetického průměru definovat **vážený geometrický průměr**

$$\bar{x}_g = \sqrt[(n_1+n_2+\cdots+n_r)]{a_1^{n_1} \cdot \mathrm{a}_2^{\mathrm{n}_2} \cdot \mathrm{a}_3^{\mathrm{n}_3} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{n}_\mathrm{r}}}$$

1.3.3 Harmonický průměr

Třetím druhem průměru je **harmonický průměr** $\bar{x}_h$, který je pro n čísel dán výrazem:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Stejně jako v předchozích případech, jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná můžeme definovat **vážený harmonický průměr** vztahem:

$$\bar{x}_h = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}{\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \cdots + \frac{n_r}{a_r}}$$

Vztah mezi aritmetickým,geometrickým a harmonickým průměrem
Mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem existuje vzájemný vztah

Pro všechna $a_i \neq a_j$, kde $i, j = 1,2,\cdots,n$ vždy platí:

$$\bar{x}_a > \bar{x}_g > \bar{x}_h$$

1.4 Posloupnosti a řady

Ve finanční matematice se velmi často setkáváme s aplikacemi posloupností a řad.

Základní pojmy:
Jestliže přiřadíme každému přirozenému číslu n, určité číslo a_n, potom čísla $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots$ nazýváme ***posloupnost.***
Výraz (součet členů posloupnosti) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$ nazýváme **řadou** a čísla $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots$ **členy řady**.
Jestliže má řada konečný počet členů, nazývá *se* **konečnou řadou**. Jestliže má řada nekonečný počet členů, nazývá se **nekonečnou řadou**.

1.4.1 Aritmetická posloupnost

Posloupnost, u které rozdíl (**diference**) dvou po sobě jdoucích členů je **konstantní**, se nazývá **aritmetická posloupnost**.

$$a_{k+1} - a_k = k = d \,, \qquad \text{kde } k \text{ je konstanta}$$

Odvození:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + d = a_1 + 2.d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Takže n-tý člen aritmetické posloupnosti vypočítáme podle vztahu:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a_1 - **je první člen řady** $\qquad$ n - **je počet členů**
a_n - **je poslední člen řady** $\qquad$ d - **je diference aritmetické řady**

Pro aritmetickou řadu platí, že každý její člen je **aritmetickým průměrem** svých sousedních členů.

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot (a_{k-1} + a_{k+1})$$

Pro součet n členů (n-tý částečný součet) aritmetické řady platí:

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$$

Dosadíme-li do našeho výrazu za $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ můžeme součet n členů vyjádřit:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

Ze vzorce vyplývá, že můžeme spárovat vždy dva členy řady - první a poslední, druhý a předposlední atd., přičemž součty těchto dvojic jsou konstantní.Takových dvojic můžeme sestavit polovinu z celkového počtu členů řady - $\frac{n}{2}$.

Příklad 1.9

Aritmetická posloupnost má diferenci $d = -12$ *a* n*-tý člen* $a_n = 15$*. Kolik prvních členů posloupnosti má součet* $S_n = 456$*? Kterému číslu se rovná první člen?*

Řešení:

Vycházíme ze součtu aritmetické řady a výrazu pro výpočet n-tého členu:

$$456 = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot (-12)\right]$$
$$15 = a_1 + (n-1) \cdot (-12)$$

Po úpravě budeme řešit jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$912 = n \cdot (2 \cdot a_1 - 12 \cdot n + 12)$$
$$15 = a_1 \text{ -} 12 \cdot \mathrm{n} + 12 \Rightarrow a_1 = 12 \cdot n + 3$$

Dosadíme do rovnice $912 = n \cdot (2 \cdot a_1 - 12 \cdot n + 12)$ za a_1 hodnotu $12 \cdot n + 3$ a dostáváme jednu rovnici o jedné neznámé

$$912 = n \cdot \left[2 \cdot (12 \cdot n + 3) - 12 \cdot n + 12\right] = n \cdot (24 \cdot n + 6 - 12 \cdot n + 12) =$$
$$= n \cdot (12 \cdot n + 18) = 12 \cdot n^2 + 18 \cdot n$$
$$0 = 12 \cdot n^2 + 18 \cdot n - 912 \Leftrightarrow 0 = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 152$$

Což je kvadratická rovnice, kterou vyřešíme např. pomocí diskriminantu a dostaneme dva výsledky:

$$n_1 = 8$$
$$n_2 = -\frac{38}{8}$$

Protože počet členů nemůže být ani záporné číslo ani necelé číslo, je správné první řešení, tj. počet členů zadané aritmetické posloupnosti, jejichž součet je 456 je 8.

Nyní dosadíme do výrazu: $a_1 = 12 \cdot n + 3 \Rightarrow a_1 = 12 \cdot 8 + 3 = 99$.

První člen aritmetické řady se rovná číslu 99.

Příklad 1.10
Máme vypočítat n-tý částečný součet, jestliže je $a_1 = 3$, $d = -1$.

Řešení:

Použijeme výraz pro výpočet součtu řady: $S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (n-1) \cdot (-1)] = \frac{n}{2} \cdot (6 - n + 1) = \frac{n}{2} \cdot (7 - n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (7 - n)$$

1.4.2 Geometrická posloupnost

Posloupnost, u níž podíl kterýchkoliv dvou po sobě jdoucích členů je **konstantní**, se nazývá **geometrická posloupnost**.

Podíl těchto dvou členů nazýváme **kvocientem** a značíme jej písmenem q.

Odvození:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Takže n-tý člen vypočítáme:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Je-li $\boldsymbol{q > 1}$ je řada **rostoucí**
Je-li $\boldsymbol{q \in (0;1)}$ je řada **klesající**
Je-li $\boldsymbol{q < 0}$ je řada **alternující** (střídavá)
Je-li $\boldsymbol{q = 1}$ řada **konstantní** (obsahuje stejné členy)

Pro součet n-členů geometrické řady pro $q \neq 1$ platí:

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad pro \quad q > 1 \qquad S_n = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad pro \quad q \in (0,1)$$

Můžeme prokázat, že uvedené výrazy jsou ekvivalentní a je tedy jedno, který použijeme.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{-\left(-q^n + 1\right)}{-\left(-q + 1\right)} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad pro\ q \in \left(0; \infty\right) - \{1\}$$

Každý člen geometrické řady je **geometrickým průměrem** z jeho dvou sousedních členů:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} . a_{k+1}}$$

Příklad 1.11

V geometrické posloupnosti je součet prvních dvou členů roven 4 a součet jejich druhých mocnin je roven 10. Máme určit tuto posloupnost.

Řešení:

Zadání můžeme přepsat následovně:

$$a_1 + a_2 = 4$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 10$$

Z první rovnice si vyjádříme a_2.

$$a_2 = 4 - a_1$$

Tento výraz dosadíme za a_2 do druhé rovnice a vypočítáme první člen a_1.

$$a_1^2 + \left(4 - a_1\right)^2 = 10$$
$$a_1^2 + 16 - 8 \cdot a_1 + a_1^2 = 10$$
$$2 \cdot a_1^2 - 8 \cdot a_1 + 6 = 0$$
$$a_1^2 - 4 \cdot a_1 + 3 = 0$$

Řešením této rovnice jsou dva kořeny – první je roven 3 a druhý je roven 1.

Úloha má tedy dvě řešení.

Prvním řešením je klesající posloupnost s parametry $a_1 = 3, a_2 = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.

Druhým řešením je rostoucí posloupnost s parametry $a_1 = 1, a_2 = 3 \Rightarrow q = 3$.

Příklad 1.12

Máme vypočítat součet geometrické řady kde $n = 5$, $q = 4$ a $a_1 = 2000$.

Řešení:

$$S_5 = a_1 . \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 2000 . \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2000 . \frac{1024 - 1}{3} = 2000 . \frac{1023}{3} = 2000 \cdot 341 = 682000$$

2 Jednoduché úročení

2.1 Úvodní poznámky

Tato kapitola společně s následující kapitolou je základem pro všechny následující kapitoly. Proto je nutno probíranou látku zcela pochopit. Propočítejte si ukázkové příklady i příklady na konci kapitoly. Pokud nebudete něco chápat, je potřeba se zdržet u této i následující kapitoly do doby, než opravdu pochopíte základní princip úročení, respektive odúročení.

Abyste pochopili problematiku kombinovaného úročení, je nutné znát velmi dobře problematiku jednoduchého i složeného úročení. Tato kapitola se věnuje první problémové oblasti – jednoduchému úročení.

V celé DSO budeme využívat některých předpokladů (postupně si je budeme uvádět), které nám umožní zkoumat jednotlivé problémové oblasti. Pokud bychom se chtěli přiblížit více realitě, stačí dané předpoklady přizpůsobit nebo zcela opustit. Daná problematika se potom většinou zkomplikuje, ale ve většině případů je možno dojít zažitými postupy ke správným závěrům.

Jednoduché úročení je svou podstatou „jednoduchá“ problematika. Přesto je třeba si dávat pozor na některé ne zcela evidentní „chytáky“, které hodně lidí přehlíží v domnění, že při řešení triviálních problémů nemůže být nic komplikovaného.

2.2 Základní pojmy

Úrok je odměna za dočasné užívání peněžité částky (kapitálu). Z pohledu vkladatele (věřitele) je **úrok odměnou**, kterou dostává za to, že poskytl svůj kapitál dočasně někomu jinému. Naopak z pohledu dlužníka je **úrok cena**, kterou platí dlužník za získání kapitálu (úvěru). Úrok se řídí procentním poměrem k užívané částce a dobou užívání této částky.
Vyjádříme-li úrok v procentech z hodnoty kapitálu, obdržíme **úrokovou sazbu (úrokovou míru)**.

Úrokové období je doba, za kterou se úroky pravidelně připisují. Úrokové období bývá zpravidla:

roční	a značí se **p. a.**	(per annum)
pololetní	a značí se **p. s.**	(per semestre)
čtvrtletní	a značí se **p. q.**	(per quartalae)
měsíční	a značí se **p. m.**	(per mensem)
týdenní	a značí se **p. sept.**	(per septimanam)
denní	a značí se **p. d.**	(per diem)

Předpoklad 1
V dalším textu budeme předpokládat, že nebude-li uvedeno, o jaké úrokové období se jedná, bude se jednat o roční úrokové období, tj. úroky se budou připisovat jednou za rok.

Pro vyjádření délky úrokového období se vychází z různých zvyklostí, z nichž se nejčastěji užívá:

Anglická metoda: je založena na skutečném počtu dnů úrokového období a délce roku **365 dní**, v přestupném roce pak **366 dní**.

Francouzská metoda: je založena na skutečném počtu dnů úrokovacího období a délce roku **360 dní**, **(mezinárodní)**.

Německá metoda: je založena na kombinaci započítávání celých měsíců jako **30 dní** a délky roku pak **360 dní**, **(obchodní)**.

V běžné praxi se můžeme setkat se všemi metodami.

Předpoklad 2
V našich úvahách a řešených příkladech budeme pro jednoduchost používat německou metodu, pokud nebude uvedeno jinak.

2.3 Typy úročení

Rozlišujeme dva základní typy úročení:

Jednoduché úročení: úroky se počítají stále z původního kapitálu K_0

Složené úročení: úroky se připisují k původnímu kapitálu (peněžní částce) a spolu s ním se dále úročí

Úročení dělíme také podle toho, kdy dochází k placení úroku:

Jestliže se úroky platí na konci úrokového období, mluvíme o **úrokování polhůtním (dekurzivním).**

Jestliže dochází k placení úroků na začátku úrokovacího období, mluvíme o **úrokování předlhůtním (anticipativním).**

2.3.1 Jednoduché úročení polhůtní

U jednoduchého úročení se úročí stále pouze základní kapitál (peněžní částka). Vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevzniká tedy úrok z úroků. Protože uvažujeme o úrokování polhůtním, úroky budou vypláceny vždy po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují.

Označme si: u – úrok v Kč
K – kapitál (peněžní částka) v Kč
p – úroková sazba úrokového období v procentech
d – doba splatnosti kapitálu ve dnech

Potom úrok vypočítáme ze vztahu[1]:

$$u = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$$

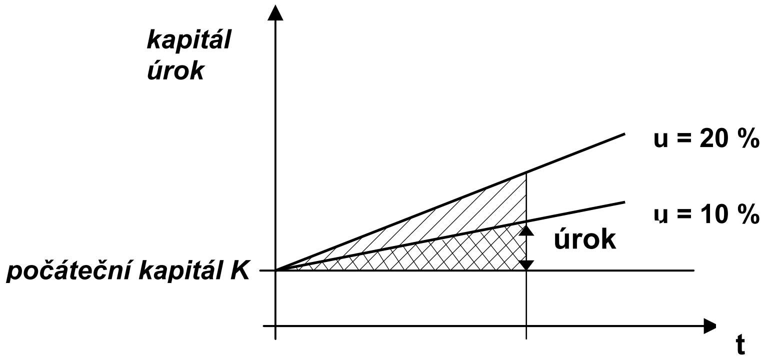
Jestliže vyjádříme: $\frac{p}{100} = i$ a $\frac{d}{360} = t$

potom obdržíme úrokovou sazbu jako desetinné číslo a splatnost v letech, potom úrok vypočítáme:

$$u = K \cdot i \cdot t$$

kde: i = úroková sazba vyjádřená v setinách. Je to úrok z 1 Kč za 1 rok.
t = doba splatnosti vyjádřená v letech

Graf 2.1 Závislost výše kapitálu na čase a výšce úrokové sazby



Z grafu je vidět, že **konečný kapitál** při stálé úrokové sazbě **je lineární funkcí času** (lineární funkce).

Jestliže se bude měnit výše ukládaného kapitálu při stejné úrokové sazbě během úrokovacího období, potom pro výpočet úroků používáme tzv. **úrokových čísel** a **úrokových dělitelů**.

Úrokové číslo UC: $UC = \frac{K \cdot d}{100}$,

kde d – splatnost ve dnech
K – kapitál

[1] Předpokládáme, že se jedná o roční úrokovou sazbu a roční úrokovací období. Pokud bychom chtěli spočítat úrok za např. měsíční úrokovací období a měli bychom měsíční úrokovou sazbu p_m, pak by vzorec vypadal následovně: $u = \frac{K \cdot p_m \cdot d}{100 \cdot 30}$

Úrokový dělitel UD: $UD = \frac{360}{p}$

Úrokový dělitel nám vyjadřuje počet dní, za které získáme úrok 1 Kč ze 100 Kč, kde p je úroková sazba v %.

Potom úrok vypočítáme:

$$u = \frac{UC}{UD}$$

Jestliže částka K_1 je uložena a tedy úročena d_1 dní, částka K_2 je uložena a úročena d_2 dní, …, částka K_n je uložena a tedy úročena d_n dní a přitom všechny při stejné úrokové sazbě p, potom úroková čísla budou:

$$UC_1 = \frac{K_1 \cdot d_1}{100} \quad , \quad UC_2 = \frac{K_2 \cdot d_2}{100} \quad , \quad \ldots \quad , \quad UC_r = \frac{K_n \cdot d_n}{100}$$

Protože se nemění úrokový dělitel, můžeme jej vytknout před závorku a úrok vypočítat:

$$u = \frac{1}{UD} \cdot \left(UC_1 + UC_2 + \ldots + UC_n\right)$$

nebo:

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD}$$

Tohoto způsobu se nejvíce využívá při výpočtu úroků na běžných účtech.

Příklad 2.1

Podnikatel si postupně vypůjčil: 16.1. částku … 60 000 Kč
21.2. částku … 40 000 Kč
8.3. částku … 30 000 Kč

Roční úroková sazba u všech půjček je 12 %. Chceme zjistit, kolik zaplatí koncem roku na úrocích.

Řešení:

$K_1 = 60\,000$ Kč , $d_1 = 30.12. - 16.1.$ $\qquad d_1 = (12-1) \cdot 30 + (30-16) = 344$ dní

$K_2 = 40\,000$ Kč , $d_2 = 30.12. - 21.2.$ $\qquad d_2 = (12-2) \cdot 30 + (30-21) = 309$ dní

$K_3 = 30\,000$ Kč , $d_3 = 30.12. - 8.3.$ $\qquad d_3 = (12-3) \cdot 30 + (30-8) = 292$ dní

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{3} UC_j}{UD} = \frac{1}{UD} \cdot \left(UC_1 + UC_2 + UC_3\right) = \frac{p}{360} \cdot \left(\frac{K_1 \cdot d_1}{100} + \frac{K_2 \cdot d_2}{100} + \frac{K_3 \cdot d_3}{100}\right) =$$

$$= \frac{12}{360} \cdot \left(\frac{60\,000 \cdot 344}{100} + \frac{40\,000 \cdot 309}{100} + \frac{30\,000 \cdot 292}{100}\right)$$

$$= \frac{206\,400 + 123\,600 + 87\,600}{30} = 13\,920 \text{ Kč}$$

Podnikatel koncem roku zaplatí na úrocích 13 920 Kč.

2.3.2 Základní rovnice pro jednoduché úročení

V předcházející kapitole jsme si řekli, jakým způsobem vypočítáme výši úroku za určité období. V praxi nás však zajímá výše zúročeného kapitálu (včetně úroků) po určitém období.

Konečnou výši kapitálu (K_t) za období t obdržíme jako **součet počátečního kapitálu a úroků za toto období.**

Tedy:

$$K_t = K_0 + u$$

dosadíme-li do tohoto výrazu za

$$u = K_0 \cdot i \cdot t$$

obdržíme

$$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot t\right)$$

K_0 – počáteční hodnota kapitálu (základní peněžní částka, základní kapitál)
K_t – konečný kapitál za dobu t (stav kapitálu po zúročení za dobu t)
i – roční úroková sazba v setinách
t – doba splatnosti kapitálu v letech

Jestliže vyjádříme v našem výrazu splatnost ve dnech a úrokovou sazbu v procentech obdržíme:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot d}{100 \cdot 360}\right)$$

Jestliže zvolíme $K_0 = 1\,Kč$ a $t = 1$ bude $K_t = 1 + i$.

Výraz $1 + i$ se nazývá **úrokovací faktor** (úročitel). Udává, na kolik vzroste 1 Kč za 1 rok při úrokové sazbě i.

Ze základní rovnice můžeme vypočítat další důležité hodnoty: K_0, t, i

Výpočet počáteční hodnoty K_0:

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t} = \frac{u}{i \cdot t}$$

Odvození: víme, že $K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$. Tento výraz roznásobíme a dostaneme:

$$K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_t \Rightarrow K_0 \cdot i \cdot t = K_t - K_0 = u$$

Potom: $$K_0 = \frac{u}{i \cdot t}$$

Výpočet doby splatnosti (doby úročení) t: $$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{u}{K_0 \cdot i}$$

Výpočet úrokové sazby i: $$i = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t} = \frac{u}{K_0 \cdot t}$$

2.3.3 Diskont a diskontování

Často se ve finanční a ekonomické praxi setkáváme s tím, že potřebujeme porovnat hodnoty kapitálu v čase. Kapitál v čase má různou hodnotu. Čím dříve kapitál budeme mít, tím dříve jej můžeme investovat a za dobu t se nám zúročí – ponese nám úrok.

Abychom mohli porovnávat kapitál v čase, potřebujeme znát pojem **současná hodnota.** Současnou hodnotou kapitálu rozumíme kapitál, který po zúročení v časovém období dosáhne budoucí hodnoty.

Jestliže označíme současnou hodnotu K_0 a budoucí hodnotu K_t, potom současnou hodnotu vypočítáme:

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}$$

Výpočet současné hodnoty se nazývá též **diskontování.**

Jestliže je $K_t = 1\,Kč$ a i úroková sazba v setinách a $t = 1$, potom K_0 udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za rok při úrokové sazbě i.

Potom výraz:

$$\frac{1}{1+i}$$

nazýváme **diskontním faktorem.** Diskontní faktor udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za 1 rok při úrokové sazbě i.

Příklad 2.2

Co je výhodnější při koupi daru? Zaplatit za něj nyní v hotovosti 8 000 Kč nebo si na něj vypůjčit a zaplatit za rok s úrokem 8 300 Kč, když banka nabízí úrokovou sazbu 7 % p. a.?

Řešení:

Nejdříve si spočítáme, jaká je současná hodnota budoucích 8 300 Kč.

Obecně: $K_0 = \dfrac{K_t}{1+i\cdot t}$

Numericky: $K_0 = \dfrac{8\,300}{1+0{,}07\cdot 1} = \dfrac{8\,300}{1{,}07} = 7\,757{,}009 \cong 7\,757\ Kč$

Pokud bychom tedy do banky uložili 7 757 Kč na 7 % p.a., po roce bychom obdrželi 8 300 Kč (přesněji 8 299,99 Kč), což odpovídá částce, kterou bychom museli po roce splatit, pokud bychom si vypůjčili 8 000 Kč.

Porovnání obou způsobů:

a) platba v hotovosti	8 000 Kč
b) platba na půjčku	7 757 Kč

V tomto případě je výhodnější zažádat o půjčku, neboť současná hodnota 8 300 Kč, které máme zaplatit za rok, je právě dnes 7 757 Kč. Tedy, zaplatíme-li za rok 8 300 Kč, je to, jako bychom dnes zaplatili 7 757 Kč. Hotovostní způsob placení je méně výhodný.

Diskont je **úrok ode dne výplaty do dne splatnosti**. Diskontem rozumíme částku, o kterou je základ půjčky menší, než splatná částka.

Diskont můžeme počítat z **budoucí hodnoty** K_t nebo ze **současné hodnoty** K_0 a podle toho rozeznáváme:

Diskont obchodní D_{ob} – výpočet diskontu z budoucí hodnoty

Diskont matematický D_{mat} – výpočet diskontu ze současné hodnoty

Diskont obchodní
Obchodní diskont vypočítáme jako úrok z budoucí hodnoty.
Tedy:

$$D_{ob} = K_t \cdot i_D \cdot t$$

kde i_D je diskontní sazba v setinách.

Označme K_{ob} **obchodní kapitál** (tj. částka, kterou banka vyplatí), potom:

$$K_{ob} = K_t - D_{ob} = K_t - K_t \cdot i_D \cdot t = K_t \cdot (1 - i_D \cdot t)$$

Při zaplacení pohledávky banka nevyplatí věřiteli (klientovi) celou nominální hodnotu (budoucí hodnotu), ale hodnotu kapitálu sníženou o obchodní diskont D_{ob}.

Příklad 2.3
Máme vypočítat, kolik dostane vyplaceno klient, jemuž banka eskontuje (zaplatí dříve) směnku o nominální hodnotě 20 000 Kč 35 dní před dobou splatnosti při diskontní sazbě 0,09 p. a. Předpokládáme, že banka neúčtuje další provize.

Řešení:
$K_{ob} = ?\,;\quad K_t = 20\,000\ Kč\,;\quad i_D = 0{,}09\,;\quad t = 35\ dní = 0{,}097\overline{2}\ roků$

$$Tedy: K_{ob} = K_t \cdot (1 - i_D \cdot t) = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}09 \cdot 0{,}0972) = 20\,000 \cdot 0{,}99125 = 19\,825\ Kč$$

Klient dostane peníze od banky o 35 dní dříve, ale místo 20 000 Kč pouze 19 825 Kč, neboť banka si započítala obchodní diskont.

Diskont matematický
Matematický diskont vypočítáme jako úrok ze současné hodnoty.
Tedy:

$$D_{mat} = K_0 \cdot i_D \cdot t$$

Jestliže do daného výrazu dosadíme za $K_0 = \dfrac{K_t}{1 + i_D \cdot t}$ obdržíme:

$$D_{mat} = \frac{K_t \cdot i_D \cdot t}{1 + i_D \cdot t}$$

Z obchodního diskontu víme, že $D_{ob} = K_t \cdot i_D \cdot t$. Dosadíme-li tento vztah do čitatele z předcházejícího výrazu, obdržíme ***vztah mezi matematickým a obchodním diskontem.***

$$D_{mat} = \frac{D_{ob}}{1 + i_D \cdot t} \quad \Rightarrow \quad D_{ob} > D_{mat}$$

2.4 Příklady k procvičení

1. Klient měl od 8.3.2000 do 5.5.2000 uloženo ve spořitelně 15 000 Kč na 8 % úrokovou sazbu p.a. Kolik Kč činil úrok za tuto dobu?

   [190 Kč]

2. Vypočítejte úrokový výnos a konečnou hodnotu při vkladu K_0 = 3 000 Kč při 4% p.a. za 2 roky.

   [240 Kč]

3. Na jakou dobu musíme investovat 800 Kč při při úrokové sazbě 5% p.a., abychom získali na úrocích 120 Kč?

   [3 roky]

4. Jaká byla roční úroková míra při vkladu 700 Kč, abychom na úroku získali 42 Kč za 3 roky?

   [2 % p.a.]

5. Vypočítejte současnou hodnotu K_0, jestliže za 2 roky při 6% p.a. byla hodnota vkladu 784 Kč

   [700 Kč]

6. Klient si vypůjčil 7 500 Kč při úrokové sazbě 7% p.a. dne 10. dubna. 10. května splatil polovinu dluhu a celou částku úroku dlužnou k 10. květnu. Kolik celkem zaplatil bance?

   [3 793,75 Kč]

7. Vypočítejte úrok pomocí UC, UD, jestliže klient uložil do banky 4.1. částku 8 000 Kč, dne 18.2. částku 4 500 Kč a 14.4. částku 2 400 Kč. Úroková sazba byla 6% p.a. Kolik Kč získal klient za tuto dobu na úrocích?

   [811,07 Kč]

8. Na jakou hodnotu se zúročil vklad 120 000 Kč za 2 roky, 8 měsíců a 21 dní, je-li úročen v bance při úrokové sazbě 6% p.a.

   [139 620 Kč]

9. Podnikatel prodá bance směnku v nominální hodnotě 200 000 Kč, která je splatná za 2 roky. Podle stavu nabídky a poptávky po cenných papírech na burze jí banka kupuje s diskontní sazbou 15 % p.a. Kolik Kč obdrží podnikatel za směnku?

   [140 000 Kč]

10. Dlužník vystavil dlužní úpis na 20 000 Kč, splatných i s úrokem za 8 měsíců při 8% p.a. Za měsíc po vystavení dlužního úpisu jej věřitel prodal jiné osobě, která diskontuje dlužní úpisy 9% p.a. Kolik dostane věřitel za dlužní úpis? Jak dlouho

musí prvotní věřitel čekat od vystavení úpisu, aby při prodeji obdržel alespoň půjčenou částku?

[19 960,67 Kč; 38 dnů]

3 Složené úročení a kombinované úročení

Doposud jsme vycházeli z toho, že se úroky počítají stále ze stejného základu – úroky rostly lineárně.
Složené úročení vychází z toho, že se úroky připočítávají k původnímu kapitálu a v následujícím období se tento zúročený kapitál bere jako základ pro další úročení. **Úročí se tedy zúročený kapitál.** Složené úročení je možno rozdělit na **úročení předlhůtní a polhůtní.**

3.1 Základní vztahy pro složené úročení

Označme: K_0 – původní (počáteční) kapitál
i – úroková sazba v setinách
t – doba splatnosti kapitálu v letech
K_t – výše kapitálu v době $t = 1, 2, 3, \dots$

Tabulka 3.1 Odvození základní rovnice složeného úročení

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$	$= K_0 \cdot (1+i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i)$	$= K_0 \cdot (1+i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i)$	$= K_0 \cdot (1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$K_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot i = K_{t-1} \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^{t-1} \cdot (1+i)$	$= K_0 \cdot (1+i)^t$

Přirozené mocniny úrokovacího faktoru nazýváme **úročitelé** a udávají, jak vzroste vklad 1 Kč za dobu t při úrokové sazbě i za předpokladu, že $K_0 = 1\,Kč$.

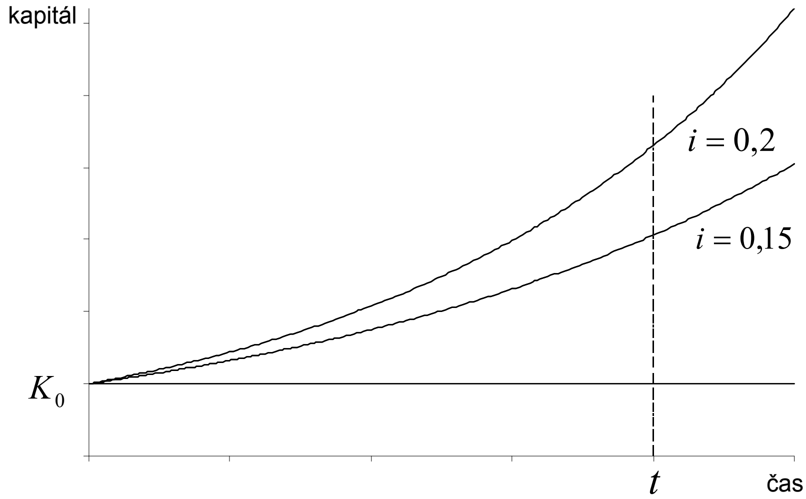
Celkový úrokový výnos neroste jako u jednoduchého úročení lineárně, ale **exponenciálně**.

Základní rovnice pro složené úročení:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Tato rovnice platí za předpokladu, že t je **celé kladné číslo a úročení probíhá koncem každého roku.**

Graf 3.1 Závislost úroku a výše kapitálu na době splatnosti



Příklad 3.1
Uložili jsme částku 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky při složeném úročení, jestliže úroková sazba bude 5 % p. a.

Řešení:
Obecně:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Numericky:

$$K_t = 12\,000 \cdot (1+0{,}05)^3 = 12\,000 \cdot 1{,}157625 = 13\,891{,}50\ Kč$$

Konečná hodnota kapitálu bude 13 891,50 Kč.

Předpokládejme, že t je **celé kladné číslo**, ale **úrokovací období je kratší než jeden rok**. Úrokování probíhá (=připisování úroků) m-krát za rok.

Označme: K_0 – původní (počáteční) kapitál
i – roční úroková sazba v setinách
$\frac{i}{m}$ – úroková sazba za jednu m-tinu roku
K_m – stav kapitálu na konci m-té části roku

Tabulka 3.2 Odvození základní rovnice složeného úročení při úročení *m-krát* do roka

Část (*m-tina*) roku	**Stav kapitálu na konci roku**	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$	$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{i}{m} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$	$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot \frac{i}{m} = K_2 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$	$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$K_m = K_{m-1} + K_{m-1} \cdot \frac{i}{m} = K_{m-1} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)$	$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$

Stav kapitálu úročeného m -krát za rok bude na konci roku:

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

a za t let bude:

$$K_t = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Příklad 3.2
Jako v předcházejícím příkladu jsme si uložili 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokovací období bude čtvrtletní a úroková sazba činí 5 % p. a.

Řešení:
Obecně:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Numericky:

$$K_t = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 12\,000 \cdot 1{,}0125^{12} = 12\,000 \cdot 1{,}1607545 = 13\,929{,}054\ Kč$$

Konečná hodnota kapitálu při stanovených podmínkách bude 13 929,054 Kč.

3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení

Ke kombinaci jednoduchého a složeného úročení dochází tehdy, jestliže jsou úroky připisovány po určitou dobu k počátečnímu vkladu a s ním dále úročeny (složené úročení), ale na konci je nutno vypočítat úrok za dobu kratší než je úrokovací období (jednoduché úročení).

Nechť platí podmínka: t není kladné celé číslo,
můžeme psát

$$t = n + R$$

kde $n \in \mathrm{N}$ je číslo, které udává počet celých ukončených let a
$R < 1$ je číslo, které udává neukončené úrokovací období (např. část roku).

Počáteční kapitál K_0 nejprve úročíme složeným úročením po celou dobu n úrokovacích období (např. let)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Tento kapitál K_n pak úročíme jednoduchým úročením po dobu R, tedy po dobu posledního neukončeného úrokovacího období (po zbytek splatnosti, část roku).

$$K_t = K_n \cdot (1 + i \cdot R)$$

Dosadíme-li za K_n, obdržíme hodnotu kapitálu na konci úrokovacího období $t = n + R$

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot R)$$

Jestliže se úroky připisují m-krát do roka a doba t není celé číslo, potom můžeme opět zapsat: $t = n + R$

Konečnou hodnotu kapitálu za dobu t pak určíme podobným způsobem jako v předcházejícím vztahu.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

kde n je počet celých ukončených m-tin za dobu t

Konečnou hodnotu kapitálu K_t pak vypočítáme jednoduchým úročením zúročené výše kapitálu K_n

$$K_t = K_n \cdot (1 + i \cdot R)$$

Jestliže dosadíme za K_n, dostaneme konečný vztah pro výpočet kapitálu K_t.

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + i \cdot R)$$

Všimněte si, že se v předchozím výrazu vyskytuje jiná úroková sazba pro část složeného úročení a jiná pro část jednoduchého úročení, i když obě vycházejí ze stejné roční úrokové sazby. Vyvstávají tedy otázky jako, jak je to možné, je daný výraz správný a pokud ano, co tedy vyjadřuje R.

Podívejme se tedy na daný problém tzv. „selským“ rozumem. Pokud budeme úročit každé pololetí, musíme použít pro složené úročení pololetní úrokovou sazbu. Tu obdržíme vydělením roční úrokové sazby počtem připsání úroků za rok, což je pro pololetní úročení číslo 2. Budeme-li úročit počáteční částku po dobu 3 roků a 5 měsíců, připíšeme úroky celkem 6 krát (3roky po 2 pololetích). Zbývá nám tedy 5 měsíců, které netvoří celý půlrok. Jakou část půlroku tvoří 5 měsíců? Odpověď je jednoduchá: $\frac{5}{6}$. Částku K_6, kterou obdržíme, pokud počáteční kapitál zúročíme 6 krát složeným úročením při půlroční úrokové sazbě ve výši $\frac{i}{2}$ (pokud i je roční úroková sazba), nám zbývá zúročit jednoduchým úročením při stejné půlroční úrokové sazbě po dobu $\frac{5}{6}$ úrokového období (tj. 5 měsíců). Vzorec by potom vypadal následovně:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{i}{2} \cdot \frac{5}{6}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^6 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{5}{12}\right)$$

Logicky tedy předpokládáme, že úrokové sazby pro část složeného úročení a část jednoduchého úročení budou stejné. Potom požadujeme, aby R vyjadřovalo poměrnou část úrokovacího období.

Pokud bychom stejný případ rozvedly pro čtvrtletní úročení, dostali bychom následující vzorec:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4 \cdot 3 + 1} \cdot \left(1 + \frac{i}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{13} \cdot \left(1 + \frac{i}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{13} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

Pokud bychom stejný případ rozvedly pro dvouměsíční úročení, dostali bychom následující vzorec:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6 \cdot 3 + 2} \cdot \left(1 + \frac{i}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{20} \cdot \left(1 + \frac{i}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{20} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{1}{12}\right)$$

Všimněte si, že součin čísel ve jmenovatelích pro jednoduché úročení dává vždy číslo 12. Můžeme tedy v části pro jednoduché úročení použít roční úrokovou sazbu bez ohledu na délku úrokovacího období. V takovém případě ale bude R vyjadřovat poměrnou část celého roku, nikoliv úrokovacího období.

Příklad 3.3

Na kolik vzroste vklad 15 000 Kč uložený na 3 roky a 5 měsíců při úrokové sazbě 5 % p.a.

Řešení:

3 roky a 5 měsíců = 3,416667 roku

$K_t = ? \qquad K_0 = 15\,000 \qquad i = 0{,}05 \qquad t = 3{,}416667 \qquad n = 3 \qquad R = \frac{5}{12} = 0{,}416667$

Obecně:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot R)$$

Numericky:

$$K_t = 15\,000 \cdot (1+0{,}05)^3 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{12}\right) = 15\,000 \cdot 1{,}157625 \cdot 1{,}02083333 = 17\,726{,}13\ Kč$$

Poznámka: Pokud bychom řešili tento příklad podle výrazu $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$, byl by výsledek následující: $K_t = 15\,000 \cdot (1+0{,}05)^{3{,}416667} = 17\,720{,}99\ Kč$

Příklad 3.4

Řešte předchozí příklad pro případ pololetního úročení a čtvrtletního úročení.

Řešení:

3 roky a 5 měsíců = 3,416667 roku

$K_t = ? \qquad K_0 = 15\,000 \qquad i = 0{,}05$

pro pololetní úročení platí

$n = 6 \qquad R = \frac{5}{6} = 0{,}83333$

$$K_t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^6 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{12}\right) = 15\,000 \cdot 1{,}1596934 \cdot 1{,}02083333 = 17\,757{,}81\ Kč$$

pro čtvrtletní úročení platí

$n = 4 \cdot 3 + 1 = 13 \qquad R = \frac{2}{3} = 0{,}66667$

$$K_t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{13} \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{2}{12}\right) = 15\,000 \cdot 1{,}175264 \cdot 1{,}0083333 = 17\,775{,}87\ Kč$$

3.3 Výpočet doby splatnosti

Výpočet doby splatnosti počítáme třemi (podobnými) způsoby podle toho, zda:

1. t je celé kladné číslo, úročení roční p. a.
2. t není celé kladné číslo, úročení roční p. a.
3. t není celé kladné číslo, úročení je jiné, než roční

Ad 1. t je celé kladné číslo, úročení roční p. a.

Při této úloze vycházíme ze základního vzorce pro složené úročení

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Jelikož chceme vypočítat t, celou rovnici zlogaritmujeme a osamostatníme neznámou t.

$$\ln(K_t) = \ln\left(K_0 \cdot (1+i)^t\right)$$
$$\ln(K_t) = \ln(K_0) + \ln\left((1+i)^t\right)$$
$$\ln(K_t) - \ln(K_0) = t \cdot \ln(1+i)$$
$$\frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+i)} = t$$
$$\frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} = t$$

Poslední dvě rovnice jsou ekvivalentní, záleží na každém, zda chce počítat dva logaritmy a poté odečíst dvě čísla, nebo raději vydělí dvě čísla a poté teprve logaritmuje.

Ad 2. t není celé kladné číslo, úročení roční p. a.

Jestliže t není celým kladným číslem, postupujeme stejným způsobem jako v předešlém případě. Poté, co řešením předešlé rovnice je t, které není celým kladným číslem, rozdělíme t na celou část a necelou část tak,aby platilo $t = n + R$. Dále použijeme rovnici pro kombinované úročení $K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot R)$. Jedinou neznámou zůstává R, které vyjádříme z uvedené rovnice pro kombinované úročení.

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot R)$$
$$\frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^n} = 1 + i \cdot R$$
$$\frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^n} - 1 = i \cdot R$$

$$\frac{\frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^n} - 1}{i} = R \qquad \text{nebo} \qquad \frac{K_t}{K_0 \cdot i \cdot (1+i)^n} - \frac{1}{i} = R$$

Protože úrokovací období bylo roční, stačí pro převod na dny R vynásobit počtem dnů v roce, což podle naší domluvy je 360 dnů.

Ad 3. t není celé kladné číslo, úročení je jiné, než roční

Jestliže je úrokovací období jiné než roční (většinou kratší), vycházíme pro výpočet doby t z výrazu

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Rovnici upravíme logaritmováním na tvar:

$$\ln(K_t) = \ln\left(K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}\right)$$

$$\ln(K_t) = \ln(K_0) + \ln\left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}\right)$$

$$\ln(K_t) - \ln(K_0) = m \cdot t \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$\frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)} = t$$

Jelikož t není celé kladné číslo, rozložíme jej opět tak, aby platilo $t = n + R$

Zbytek doby splatnosti R zpřesníme podle vztahu:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + i \cdot R)$$

$$\frac{K_t}{K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n} = 1 + i \cdot R$$

$$\frac{K_t}{K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n} - 1 = i \cdot R$$

$$\frac{\dfrac{K_t}{K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n} - 1}{i} = R \qquad \text{nebo} \qquad \frac{K_t}{K_0 \cdot i \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n} - \frac{1}{i} = R$$

Příklad 3.5
Jak dlouho byl uložen kapitál 2 300 000 Kč, jestliže vzrostl při 9 % úroku p.a. při složeném úrokování na hodnotu 4 995 354 Kč?

Řešení:
Obecně:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} \qquad R = \frac{\frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^n} - 1}{i}$$

Numericky:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{4995354}{2300000}\right)}{\ln(1+0{,}09)} = \frac{0{,}775599}{0{,}086178} = 8{,}999965$$

Z výsledku je patrné, že se bude jednat o 9 let, protože zbytek za desetinnou čárkou tuto skutečnost naznačuje. Abychom měli jistotu, že se nemýlíme, upřesníme zbývající dobu.

$$R = \frac{\frac{4995354}{2300000 \cdot (1+0{,}09)^8} - 1}{0{,}09} = \frac{\frac{4995354}{4582894{,}07588744} - 1}{0{,}09} = \frac{0{,}0899998815776}{0{,}09} = 0{,}999998$$

$$R = 0{,}999998 \Rightarrow 0{,}999998 \cdot 360 \text{ dní} = 359{,}99928 \text{ dní}$$

Výsledek se od 360 dnů liší jen málo. Můžeme tedy toto zpřesnění zaokrouhlit na 360 dnů. Celková doba úročení tedy byla 8 let a 360 dnů, což je 9 let.

Příklad 3.6
Máme zjistit, jak dlouho byl uložen kapitál ve výši 15 000 Kč, jestliže při složeném úročení a úrokové sazbě 4 % p. a. vzrostl na 21 000 Kč.

Řešení:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{21000}{15000}\right)}{\ln(1+0{,}04)} = \frac{\ln(1{,}4)}{\ln(1{,}04)} = \frac{0{,}336472}{0{,}039220} = 8{,}579$$

$$t = n + R$$
$$n = 8$$

$$R = \frac{\frac{21000}{15000 \cdot (1+0{,}04)^8} - 1}{0{,}04} = \frac{\frac{21000}{20528{,}5357560791} - 1}{0{,}04} = \frac{0{,}0229662870027771}{0{,}04} = 0{,}574157175$$

$$R = 0{,}574157175 \Rightarrow 0{,}574157175 \cdot 360 \text{ dní} = 206{,}696583 \text{ dní}$$

Za daných podmínek byl kapitál uložen 8 let 207 dnů, což je 6 měsíců a 27 dní.

Příklad 3.7

Máme určit dobu splatnosti kapitálu, který při složeném pololetním úročení vzrostl ze 150 000 Kč při úrokové sazbě 4 % p. a. na 180 000 Kč.

Řešení:

Obecně:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)} \qquad R = \frac{\frac{K_t}{K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n} - 1}{i}$$

Numericky:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{180\,000}{150\,000}\right)}{2 \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}04}{2}\right)} = \frac{\ln(1{,}2)}{2 \cdot \ln(1{,}02)} = \frac{0{,}1823215568}{2 \cdot 0{,}0198026273} = 4{,}603468874 \text{ roků}$$

$t = 4{,}603468874 \text{ roků} \Rightarrow t = 4{,}603468874 \cdot 12 = 55{,}241626488$ měsíců

Protože úrokovací období je pololetní, tj. trvá 6 měsíců, budeme tedy úročit $55{,}241626488 : 6 = 9{,}206937748$ úrokovacích období. Jedná se tedy o kombinované úročení, při kterém budeme složeným úročením úročit po dobu 9 celých úrokovacích období a zbývající dobu musíme dopočítat použitím jednoduchého úročení.

$$R = \frac{\frac{180\,000}{150\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{2}\right)^9} - 1}{0{,}04} = \frac{\frac{180\,000}{179263{,}885293347} - 1}{0{,}04} = \frac{0{,}00410631904719017}{0{,}04} = 0{,}102658$$

Protože používáme vzorec, který za R dosazuje 360 dní, je výsledný počet dní, kdy použijeme jednoduché úročení (jedná se o necelé úrokovací období), roven $R = 0{,}102658 \cdot 360 = 36{,}95688$ dnů, což po zaokrouhlení na celé dny dává 37 dnů. Celková doba tedy je 9 pololetí, tj. 4 roky a 6 měsíců, a 37 dní, tj. 1 měsíc a 7 dní.

Aby za daných podmínek vzrostl počáteční kapitál na 180 000 Kč, musel by být uložen po dobu 4 let 7 měsíců a 7 dní.

Ke stejnému výsledku se dostaneme, když si úlohu přeformulujeme z ročního pohledu a úrokovacího období m-krát za rok na pohled úrokovacích období a použijeme vzorec $K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i \cdot R)$, kde tentokrát bude i představovat úrokovou sazbu úrokovacího období, tzn. $i = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$, n bude představovat počet celých ukončených úrokovacích období, tzn. $n = 9$, a R bude představovat zbytek v rámci úrokovacího období, tzn. zbytek v rámci 180 dní.

Použijeme tedy následující vzorce:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} \qquad R = \frac{\frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^n} - 1}{i}$$

Po dosazení obdržíme:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{180\,000}{150\,000}\right)}{\ln(1+0{,}02)} = \frac{\ln(1{,}2)}{\ln(1{,}02)} = \frac{0{,}182321556793955}{0{,}0198026272961797} = 9{,}20693774957465 \text{ pololetí}$$

Výsledkem je počet úrokovacích období, v našem případě pololetí. Nyní pokračujeme zpřesněním neceléh úrokovacího období.

$$R = \frac{\frac{180\,000}{150\,000 \cdot (1+0{,}02)^9} - 1}{0{,}02} = \frac{\frac{180\,000}{179263{,}885293347} - 1}{0{,}02} = 0{,}205315952359508 \text{ pololetí}$$

$$R = 0{,}205315952359508 \text{ pololetí} \Rightarrow 0{,}205315952359508 \cdot 180 \text{ dní} = 36{,}95687 \text{ dní}$$

Dostali jsme ke stejnému výsledku – 9 pololetí a 37 dní.

V předchozím příkladě jsme si ukázali, že ke správnému výsledku v případě, že úročíme vícekrát za rok, se můžeme dostat dvojím způsobem. Je ovšem důležité nepromíchat tyto dva způsoby dohromady. Bylo by špatně v našem případě pracovat na bázi úrokovacího období, ale upřesněnou část doby úročení vynásobit 360 dny!

3.4 Výpočet současné hodnoty

Značný význam pro nás má současná hodnota, neboť nám umožňuje porovnat hodnotu kapitálu v čase. V běžné praxi stojíme před úkolem zjistit, jakou výši kapitálu musíme uložit, abychom dosáhli v určitém čase t budoucí hodnotu kapitálu. Čím dříve máme potřebný kapitál, tím dříve jej můžeme uložit nebo investovat a přináší nám úroky.
Při výpočtu současné hodnoty kapitálu vycházíme ze základních výrazů pro kombinované (složené) úročení.

Pokud je t celé kladné číslo a úročení je roční, pak vyjdeme ze vzorce pro složené úročení

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Z této rovnice vypočítáme K_0.

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

Jestliže $K_t = 1\,Kč$, potom výraz

$$\frac{1}{(1+i)^t}$$

nazýváme **odúročitel** a značí současnou hodnotu 1 Kč splatné za t let při úrokové sazbě i.

Pokud bychom úročili m-krát do roka, vycházeli bychom ze vzorce

$$K_t = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

a po vyjádření K_0 bychom obdrželi rovnici

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}}$$

Pokud t není celé kladné číslo a úročení je roční, pak vyjdeme ze vzorce pro kombinované úročení

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i \cdot R)$$

Jestliže chceme vypočítat současnou hodnotu při znalosti budoucí hodnoty a není-li doba splatnosti t vyjádřena celým kladným číslem, vyjádříme K_0 z předešlé rovnice. Výsledkem je rovnice

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^n \cdot (1+i \cdot R)}$$

kde n je nejbližší přirozené číslo k číslu t a $R = t - n$.

Pokud bychom úročili m -krát do roka, výsledná rovnice by byla

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n \cdot (1+i \cdot R)}$$

kde n je nejbližší přirozené číslo k číslu t a $R = t - n$.

Příklad 3.8

Kolik musíme uložit, abychom za 5 let při úrokové sazbě 5 % p.a. získali kapitál ve výši 100 000 Kč. Úročení je složené.

Řešení:

Obecně:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

Numericky:

$$K_0 = \frac{100\,000}{(1+0{,}05)^5} = \frac{100\,000}{1{,}05^5} = 78\,352{,}62\ Kč$$

Abychom za 5 let měli kapitál 100 000 Kč, musíme dnes uložit 78 352,62 Kč.

Příklad 3.9

Máme možnost koupit osobní automobil. Je pro nás výhodnější zaplatit hotově 240 000 Kč nebo dát přednost splátkovému způsobu platby a zaplatit zálohu hotově ve výši 120 000 Kč a za 3 roky doplatit zbytek ve výši 160 000 Kč při úrokové sazbě 8 % p.a. a při složeném pololetním úročení?

Řešení:

Naším úkolem je porovnat oba způsoby:
zaplacení v hotovosti 240 000 Kč
nebo
záloha 120 000 Kč a splátka 160 000 Kč, jejíž současná hodnota je:

Obecně:

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}}$$

Numericky:

$$K_0 = \frac{160\,000}{\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{2\cdot 3}} = \frac{160\,000}{1{,}265319} = 126\ 450{,}33\ Kč$$

Splátkový způsob platby = záloha + $K_0 = 120\,000 + 126\,450{,}33 = 246\,450{,}33\ Kč$

240 000 < 246 450,33

Z numerického hlediska je výhodnější zaplatit ihned 240 000 Kč než splátkový způsob. Tento způsob platby je však výhodnější pro kupujícího, neboť vzhledem k ceně automobilu je cena vyšší o 6 450,33 Kč, což jsou pouze 2,68764 % z pořizovací ceny automobilu.

Příklad 3.10

Kolik korun musíme dnes uložit, abychom za 5 let 3 měsíce a 24 dní měli na kontě částku ve výši 500 000 Kč, jestliže banka nabídla 5 % p.a. a složené úročení.

Řešení:

$$n = 5; \quad R = \frac{3\cdot 30 + 24}{360} = 0{,}316667$$

Obecně:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^n \cdot (1+i\cdot R)}$$

Numericky:

$$K_0 = \frac{500\,000}{(1+0{,}05)^5 \cdot (1+0{,}05\cdot 0{,}316667)} = \frac{500\,000}{1{,}2762815625 \cdot 1{,}01583335} = 385\,656{,}84\ Kč$$

Při daných podmínkách musíme dnes uložit 385 656,84 Kč.

Příklad 3.11

Použijme přecházejícího příkladu, ale se čtvrtletním úročením. (Výsledek by měl být menší, než v předcházejícím příkladu – zamyslete se proč?)

Řešení:

$$t = 5\cdot\frac{12}{3} + \frac{3}{3} + \frac{24}{3\cdot 30} = 21{,}26667\ \text{čtvrtletí} \Rightarrow n = 21 \quad a \quad R = 0{,}26667$$

Obecně:

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n \cdot (1+i \cdot R)}$$

Numericky:

$$K_0 = \frac{500\,000}{\left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{21} \cdot \left(1+\frac{0{,}05}{4}.0{,}26667\right)} = \frac{500\,000}{1{,}298063 \cdot 1{,}003333375} = 383\,909{,}60\ Kč$$

Abychom měli při daných podmínkách za 5 let 3 měsíce a 24 dní 500 000 Kč, musíme dnes uložit 383 909,60 Kč.

3.5 Výpočet úrokové sazby

Jestliže chceme zjistit, jaká je úroková sazba, vycházíme z podmínek, za kterých jsme ukládali nebo si vypůjčovali kapitál. Při řešení těchto úloh použijeme již dříve odvozené vztahy.

Pokud je t celé kladné číslo a úročení je roční, pak vyjdeme ze vzorce pro složené úročení, ze kterého vyjádříme úrokovou sazbu

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

$$\frac{K_t}{K_0} = (1+i)^t$$

$$\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} = (1+i)$$

$$\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 = i$$

Tedy:

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

Pokud bychom úročili m-krát do roka, vycházeli bychom ze vzorce

$$K_t = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\frac{K_t}{K_0} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

$$\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 = \frac{i}{m}$$

Z toho úroková sazba bude:

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right)$$

Pokud t není celé kladné číslo a úročení je m-krát do roka, pak úrokovou sazbu vyjádříme obdobně, jako v předchozím vzorci

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot n + R]{\frac{K_t}{K_0}} - 1\right)$$

Kde R je vztaženo k úrokovacímu období.

Příklad 3.12
Jaká byla úroková sazba, jestliže kapitál 20 000 Kč vzrostl při složeném úročení za 4 roky na 27 400 Kč.

Řešení:
Obecně:

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

Numericky:

$$i = \sqrt[4]{\frac{27\,400}{20\,000}} - 1 = \sqrt[4]{1{,}37} - 1 = 1{,}0819 - 1 = 0{,}0819$$

$p = 100 \cdot i = 8{,}19\ \%$

Kapitál byl úročen úrokovou sazbou 8,19 % p.a.

Příklad 3.13
Kolika procenty byl úročen vklad 20 000 Kč, jestliže vzrostl na 30 000 Kč při pololetním složeném úročení.

Řešení:
Obecně:

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$$

Numericky:

$$i = 2 \cdot \left(\sqrt[2 \cdot 4]{\frac{30\,000}{20\,000}} - 1 \right) = 2 \cdot \left(\sqrt[8]{1,5} - 1 \right) = 2 \cdot 0,05199 = 0,10398$$

$p = 100 \cdot i = 8,19\ \%$
Vklad byl za daných podmínek úročen sazbou 10,398 % p.a.

Příklad 3.14
Jaká je úroková sazba, jestliže kapitál 20 000 Kč vzrostl za 4 roky 2 měsíce a 21 dní na 30 000 Kč. Úročeno čtvrtletním složeným úročením.

Řešení:
$K_t = 30\ 000\ Kč$; $K_0 = 20\ 000\ Kč$; $t = 4 \cdot 4 + (2 \cdot 30 + 21)/90 = 16 + 0,9 = 16,9\ čtvrtletí$

Obecně:

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot n + R]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$$

Numericky:

$$i = 4 \cdot \left(\sqrt[4 \cdot 4 + 0,9]{\frac{30\,000}{20\,000}} - 1 \right) = 4 \cdot 0,024282 = 0,097128$$

Vklad byl za daných podmínek úročen sazbou 9,7128 % p.a.

3.6 Srovnání jednoduchého a složeného úročení

Jednoduché úročení je dáno vztahem:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$$

Po roznásobení závorky obdržíme:

$$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t$$

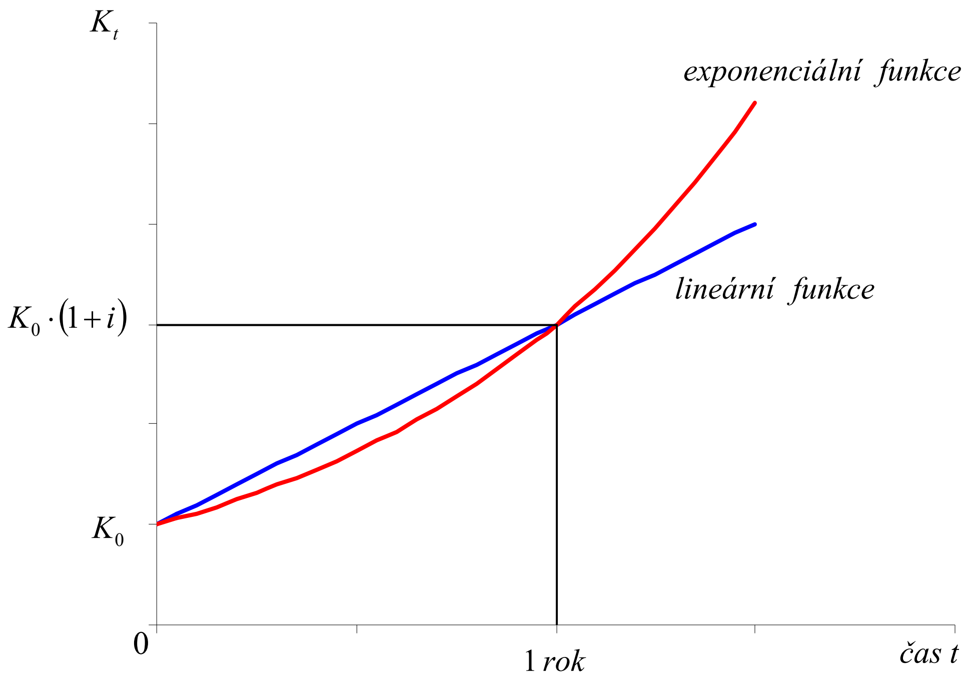
Jedná se o lineární funkci, jejímž grafem je přímka.

Složené úročení je dáno vztahem:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t$$

Jedná se o exponenciální funkci, jejímž grafem je exponenciální křivka.

Graf 3.2 Srovnání jednoduchého a složeného úročení při ročním úročení



Z grafů obou funkcí vidíme, že pro $t \in (0;1)$ jsou funkční hodnoty exponenciální funkce menší než hodnoty lineární funkce. Pro $t > 1$ je tomu naopak. Pro $t = 1$ jsou obě funkční hodnoty stejné.

Z grafu je zřejmé, že pro $t \in (0;1)$ je výhodnější pro klienta jednoduché úročení a pro dobu $t > 1$ budou úroky při složeném úročení vyšší než při úročení jednoduchém.

Tento závěr je platný nejenom pro roční úrokovací období, ale také pro jakékoliv jiné úrokovací období. Platí tedy, že v rámci jednoho úrokovacího období je výhodnější pro klienta jednoduché úrokovací období, pro více než jedno úrokovací období je výhodnější pro klienta složené úročení. Z tohoto vyplývá další předpoklad, který budeme dodržovat v následujícím textu.

Předpoklad 3
Pokud nebude řečeno jinak, používáme pro výpočty kombinované úročení, přičemž pro celé úrokovací období používáme složené úročení a pro zbývající (necelou) část úrokovacího období používáme jednoduché úročení.

3.7 Příklady k procvičení

1. Určete výši zúročeného kapitálu 12 000 Kč, je-li úroková sazba 12,5% p.a. při složeném úročení, jestliže úročení je pololetní a tato částka je uložená 3 roky.
   [17 264,53 Kč]

2. Jak dlouho byl uložený kapitál 2 300 000 Kč jestliže při složeném úročení vzrostl na hodnotu 4 995 347 Kč při úrokové sazbě 9% p.a.?
   [9 let]

3. Kolik musíme dnes uložit, abychom za 5 let, 3 měsíce a 24 dní měli na kontě 1 mil. Kč? Úrokovací období je roční a úroková sazba je 4% p.a.
   [811 646,25 Kč]

4. Jak dlouho bylo uloženo 15 000 Kč, jestliže tento vklad vzrostl na 21 000 Kč při 4% úrokové sazbě p.a.?
   [8 let 6 měsíců a 27 dnů]

5. Určete úrokovou míru p.a., při které se zvýší:
   a. 4 400 Kč na 8 500 Kč za 16 let při čtvrtletním složeném úročení;
   b. 4 000 Kč na 15 000 Kč za 20 let při pololetním složeném úročení;
   c. počáteční hodnota kapitálu na svůj dvojnásobek za 16 let, při měsíčním složeném úročení
   [a. 4,14 % p.a., b. 6,72 % p.a., c. 4,34 % p.a.]

6. Určete počet celých úrokovacích období, za který se zvýší:
   a. 1 000 Kč na 1500 Kč při čtvrtletním složeném úročení a úrokové sazbě 4% p.a.;
   b. 2 000 Kč na 4 000 Kč při složeném měsíčním úročení a roční úrokové sazbě 5%;
   c. počáteční hodnota kapitálu na svůj trojnásobek při ročním složeném úročení s úrokovou sazbou 4% p.a.
   [a. 10 let a 3 měsíce, b. 13 let a 11 měsíců, c. 29 let]

7. Otec uložil do banky pro syna hotovost na 3,25 % p.a. při čtvrtletním složeném úročení. Jestliže syn po osmi letech vybral 8 092,12 Kč jako konečnou hodnotu včetně úrokového výnosu, jaká byla počáteční hodnota?

[6 246 Kč]

8. Když klient uložil 1.1.2000 v bance 10 000 Kč, měla banka 2,75 % p.a. úrokovou sazbu a složené pololetní úročení. K 1.1.2005 banka oznámila, že počínaje tímto datem bude úroková sazba 3 % p.a. při složeném čtvrtletním úročení. Jakou hodnotu bude mít uložený kapitál k 1.1.2010, pokud se už úroková sazba nebude měnit?

[13 310,97 Kč]

9. Jestliže si vypůjčí klient 8 900 Kč při 5,25 % p.a. úrokové sazbě při složeném ročním úročení a jestliže splatí na konci prvního roku 2 000 Kč a na konci druhého roku 3 000 Kč, kolik činí zůstatek dluhu splatného za další 3 roky?

[5 542,79 Kč]

10. Dva kapitály, jejichž součet je 12 000 p.j., jsou uložené za těchto podmínek:
    a. první na jednoduchý úrok při 12% roční úrokové sazbě
    b. druhý na složený úrok při 8% roční úrokové sazbě

    Po deseti letech budou mít stejnou hodnotu. Vypočítejte jejich velikost.

[první 5 943,46 p.j., druhý 6 056,54 p.j.]

11. Klient vložil do banky 3 000 Kč, po dvou letech vložil dalších 5 000 Kč. Po dalších dvou letech měl na kontě 12 088,05 Kč. Jaká byla roční úroková sazba při pololetním složeném úročení?

[15,19 % p.a.]

*12. Klient uložil na začátku roku kapitál 150 000 Kč na 3 roky s úrokovou sazbou 5% p.a. Banka nabízí klientovi, že z částky 50 000 Kč nebude platit daň z úroků.
    a. Kolik korun by měl klient na konci třetího roku pokud by klient přistoupil na nabídku banky?
    b. Představme si, že se nedaní úroky z vkladu do maximální výše K_1. Klient na začátku roku uloží kapitál $K_0 \geq K_1$ na n let. Úroková míra je i, úrokovací období je 1 rok, zdaňovací koeficient je k. Dokažte, že výsledná částka na konci n-tého roku je rovna

$$K_1 + K_1 . \frac{(1+k.i)^n - 1}{k} + (K_0 - K_1).(1+k.i)^n$$

[a. 171 122,82 Kč]

4 Nominální a reálná úroková sazba

4.1 Efektivní úroková sazba

V předcházejících úlohách při složeném úročení jsme viděli, že při stejné roční nominální úrokové sazbě je pro vkladatele výhodnější, jestliže se úroky připisují vícekrát ročně než jednou za rok, neboť se tento již zúročený kapitál opět úročí.

Připisují-li se úroky na konci každé $\frac{1}{m}$ roku, bude celkový úrok při stejné úrokové sazbě (za předpokladu dalšího úročení těchto úroků) vyšší než v případě, že se úroky připisují pouze jednou na konci roku. Jestliže má být dosaženo při obou způsobech připisování úroků stejného finančního efektu, musí být nominální úroková sazba při ročním úrokovacím období vyšší než při úrokovacím období kratším než jeden rok.
Takovou roční úrokovou sazbu budeme nazývat *efektivní úrokovou sazbou.*

Jestliže má být výše kapitálu na konci roku stejná při obou způsobech úročení, musí pro efektivní úrokovou sazbu platit vztah:

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

kde i_{ef} je efektivní úroková sazba, i je roční nominální úroková sazba.
Potom:

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

Příklad 4.1
Máme najít efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá 10 % roční nominální úrokové sazbě, jestliže jsou úroky připisovány: a) pololetně; b) čtvrtletně; c) měsíčně

Řešení:
a) pololetní připisování znamená, že $m = 2$. Potom

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 - 1 = 1{,}05^2 - 1 = 0{,}1025$$

Efektivní úroková sazba odpovídající roční nominální úrokové sazbě 10 % p.a. a pololetnímu připisování úroků je tedy 10,25 % p.a.

b) čtvrtletní připisování znamená, že $m = 4$. Potom

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1 = 1{,}025^4 - 1 = 0{,}103812890625$$

Efektivní úroková sazba odpovídající roční nominální úrokové sazbě 10 % p.a. a čtvrtletnímu připisování úroků je tedy 10,38 % p.a.

c) měsíční připisování znamená, že $m = 12$. Potom

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 1,008\overline{3}^{12} - 1 = 0,104713067441297241590572635297$$

Efektivní úroková sazba odpovídající roční nominální úrokové sazbě 10 % p.a. a měsíčnímu připisování úroků je tedy 10,47 % p.a.

Z uvedeného příkladu je vidět, že čím častěji se během roku úročí, tím je pro klienta toto úročení výhodnější, neboť efektivní úroková sazba s počtem úrokovacích období roste.

4.2 Úroková intenzita

Doposud jsme časové intervaly uvažovali odděleně (diskrétně). Předpokládejme, že počet úrokovacích období, v kterých se připisují úroky, poroste až do nekonečna a jejich délka se zkracuje a teoreticky klesá k nule. V takovém případě mluvíme o *spojitém úročení.* Úroková sazba, která odpovídá tomuto případu, se nazývá *úroková intenzita.*

Pro úrokovací intenzitu zřejmě platí:

$$1 + i_{ef} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

Z matematiky víme, že $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828$ je tzv. Eulerovo číslo.

Z tohoto výrazu je vidět, že hodnota 1 Kč vzroste při 100 % úrokové sazbě za 1 rok při spojitém úročení na 2,71828 Kč.

Použijeme tento vztah pro výpočet limity:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^i = e^i$$

respektive e^f, kde f je úroková intenzita.

Vztah mezi efektivní úrokovou mírou a intenzitou je tedy následující:

$$i_{ef} = e^{f} - 1 \quad \Rightarrow \quad f = \ln\left(1 + i_{ef}\right)$$

Při spojitém úročení potom platí:

$$K_t = K_0 \cdot e^{f \cdot t} \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_t}{e^{f \cdot t}}$$

Příklad 4.2
Jaká je úroková intenzita při efektivní úrokové sazbě 10 %?

Řešení:

$$f = \ln\left(1 + i_{ef}\right) = \ln\left(1 + 0{,}10\right) = 0{,}095310179804324860043952123280765$$

Úroková intenzita bude 9,53%.

Příklad 4.3
Na kolik Kč vzroste kapitál 10 000 Kč za 5 let při spojitém úročení a úrokové intenzitě 5 %?

Řešení:

$$K_t = K_0 \cdot e^{f \cdot t} = 10\,000 \cdot e^{5 \cdot 0{,}05} = 12\,840{,}25416687741484 \; Kč$$

Kapitál při spojitém úročení vzroste na 12 840,25 Kč.

Příklad 4.4
Jaká je současná hodnota kapitálu, který za 3 roky vzroste na 25 000 Kč při 12,5 % úrokové intenzitě?

Řešení:

$$K_0 = \frac{K_t}{e^{f \cdot t}} = \frac{25\,000}{e^{3 \cdot 0{,}125}} = 17182{,}2319697743 \; Kč$$

Dnes musíme uložit 17 182,23 Kč.

4.3 Nominální a reálná úroková sazba

Doposud jsme mluvili o nominální úrokové sazbě, to znamená takové, u které jsme neuvažovali inflaci. Každá inflace znehodnocuje nejen kapitál, ale také úroky. Jestliže budeme do hodnoty úrokové sazby zahrnovat i inflaci, budeme hovořit o reálné úrokové míře (reálném úroku).

Označme:

K_0 – kapitál na počátku úrokovacího období

K_r – reálná výše kapitálu na konci úrokovacího období

i – nominální úroková sazba v setinách

i_r – reálná úroková sazba v setinách

$i_{\inf}$ – míra inflace

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že úrokovací období je roční, počáteční kapitál budeme úročit na konci úrokovacího období nominální úrokovou sazbou a pak diskontovat mírou inflace.

$$K_r = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\inf}}$$

Na základě reálného kapitálu si vypočítáme reálnou úrokovou sazbu i_r jako poměr výše úroku a počátečního kapitálu.

$$i_r = \frac{K_r - K_0}{K_0} \quad \Rightarrow \quad K_0 \cdot i_r = K_r - K_0 \quad \Rightarrow \quad K_0 \cdot (1+i_r) = K_r$$

Dosadíme-li tento vztah do přecházejícího výrazu za K_r obdržíme:

$$K_0 \cdot (1+i_r) = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\inf}} \quad \Rightarrow \quad 1+i_r = \frac{1+i}{1+i_{\inf}} \quad \Rightarrow \quad 1+i_r+i_{\inf}+i_r \cdot i_{\inf} = 1+i$$

$$i = i_r + i_{\inf} + i_r \cdot i_{\inf}$$

Tento vztah se nazývá Fischerova rovnice.

Poznámka:
Při nízké míře inflace a nízké reálné úrokové míře zanedbáváme někdy součin $i_r \cdot i_{\inf}$ a vztah mezi reálnou a nominální úrokovou mírou volíme $i = i_r + i_{\inf}$.

Příklad 4.5
Jestliže zapůjčíme kapitál s tím, že nám bude vrácen za 1 rok a předpokládáme-li roční nominální úrokovou míru 10 % a míru inflace nulovou, získáme za rok reálně o 10 % více. Jestliže bude míra inflace 15 %, máme za rok reálně o 5 % méně. Získali jsme sice kapitál zvýšený o 10 %, ale za zboží a služby vydáme o 15 % více než dříve.

4.4 Příklady k procvičení

1. Klient, který chce uložit 100 000 Kč na dobu jednoho roku, se může rozhodnout mezi vkladem na vkladní knížku, která vynáší 2,45 % p.a. při složeném měsíčním úročení a vkladem na spořící účet, který je úročen 2,5 % p.a. při pololetním úročení. Která z těchto alternativ nabízí vyšší výnos?

   [spořící účet]

2. Jaká roční efektivní úroková míra je ekvivalentní 8% p.a. při měsíční frekvenci?

   [0,0829995]

3. Bez použití efektivní úrokové míry spočítejte na kolik se zúročí počáteční vklad 100 Kč, 1 000 Kč, 10 000 Kč, 100 000 Kč, 1 000 000 Kč, 100 000 000 Kč při nominální úrokové sazbě 13 % p.a. a při měsíčním úročení za dobu pěti let. Danou úlohu řešte poté za použití efektivní úrokové míry a výsledky porovnejte. Pokud se výsledky liší, zdůvodněte proč.

   [190,89 Kč; 1 908,86 Kč; 19 088,57 Kč; 190 885,65 Kč; 1 908 856,54 Kč; 190 885 653,51 Kč]

4. K dispozici máte 1 mil. Kč. Uložili jste tuto sumu na účet, který je úročen 3 % p.a. při ročním připisování úroků.
   a. Kolik Kč máte k dispozici po dvou letech?
   b. Kolik si můžete koupit kusů výrobku, jehož jednotková cena je 5 000 Kč, pokud tato cena zůstane zachována i po dvou letech?
   c. Kolik byste si mohli koupit kusů daného výrobku po dvou letech, pokud by inflace první i druhý rok byla stejná ve výši 2,5 % za rok?
   d. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně z úroků a nebyla by inflace?
   e. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně a inflace by byla ve výši 2,5 % ročně?
   f. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně a inflace by byla ve výši 2,5 % první rok a 3 % druhý rok?

   [a. 1 060 900 Kč; b. 212; c. 201; d. 210; e. 200; f. 199]

5 Spoření

V přecházející části jsme si ukázali, jak zjistit konečnou nebo počáteční hodnotu kapitálu, přičemž se jeho hodnota v průběhu času nenavyšovala ani nesnižovala.
Při spoření budeme předpokládat, že ukládáme kapitál (peněžní částku) v pravidelných intervalech, a naším úkolem bude zjistit, kolik uspoříme i s úroky za určitou dobu.

Spoření rozdělíme na:

- spoření krátkodobé – v rámci jednoho úrokovacího období (roku)
- spoření dlouhodobé – spoříme několik úrokovacích období po sobě

5.1 Spoření krátkodobé

Předpokládejme, že
– úrokovací období je jeden rok – úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku
– pravidelné částky budeme ukládat m-krát za rok ($m = 2$; $m = 4$; $m = 12$)

Podle toho, zda budeme kapitál ukládat na počátku každé m-tiny roku nebo na konci každé m-tiny roku, budeme rozlišovat:

- spoření předlhůtní
- spoření polhůtní

5.1.1 Spoření krátkodobé předlhůtní

Předpoklady:

- na počátku každé m-tiny roku budeme ukládat $\frac{1}{m}$ Kč při úrokové sazbě i
- celková roční naspořená částka se bude tedy rovnat 1 Kč + úrok

Protože se pohybujeme v rámci jednoho úrokovacího období, použijeme pro zjištění výše úroku jednoduché úročení.

Tabulka 5.1 Úroky z jednotlivých vkladů

Pořadí vkladu	Počet m –tin do konce roku	Úrok z vkladu do konce roku
1	$m \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m}{m} = \frac{m}{m^2} \cdot i$
2	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
3	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$

Celkový úrok vypočítáme jako součet úroků z jednotlivých vkladů.

Tedy:

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left[m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1\right] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i$$

kde výraz $m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1$ je aritmetická posloupnost a její součet bude:

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot (m+1)$$

neboť $a_1 = m$; $a_n = 1$; $n = m$

Celková uspořená částka S_1 za 1 rok, jestliže každou $\frac{1}{m}$ roku spoříme $\frac{1}{m}$ z 1 Kč, bude:

$$S_1 = m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i$$

Jestliže spoříme x Kč každou $\frac{1}{m}$ roku, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad 5.1
Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

Numericky:

$$S_x = 12 \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) = 14\,400 \cdot 1{,}02708\overline{3} = 14\,790\ Kč$$

Do konce roku uspoříme 14 790 Kč.

5.1.2 Spoření krátkodobé polhůtní

Předpoklady:

- na konci každé m-tiny roku budeme ukládat $\frac{1}{m}$ Kč při úrokové sazbě i
- celková roční naspořená částka se bude tedy rovnat 1 Kč + úrok

Protože se pohybujeme v rámci jednoho úrokovacího období, použijeme pro zjištění výše úroku jednoduché úročení.

Tabulka 5.2 Úroky z jednotlivých vkladů

Pořadí vkladu	Počet m –tin do konce roku	Úrok z vkladu do konce roku
1	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
2	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$
m	$0 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{0}{m} = \frac{0}{m^2} \cdot i = 0$

Celkový úrok vypočítáme jako součet úroků z jednotlivých vkladů.

Tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období (části roku), je oproti předlhůtnímu spoření počet těchto období (po které je vklad úročen) o jedno období nižší. Z poslední úložky již nebudeme mít žádný úrok, neboť bude uložena na konci roku.

Celkový úrok vypočítáme obdobně jako u předlhůtního spoření. Tedy:

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left[(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 + 0 \right] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} = \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i$$

kde výraz $(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 + 0$ je aritmetická posloupnost a její součet bude:

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot \left[(m-1) + 0 \right]$$

neboť $a_1 = m - 1$; $a_n = 0$; $n = m$

Celková uspořená částka $S_1^{'}$ za 1 rok, jestliže každou $\frac{1}{m}$ roku spoříme $\frac{1}{m}$ z 1 Kč, bude:

$$S_1^{'} = m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i = 1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i$$

Jestliže spoříme x Kč každou $\frac{1}{m}$ roku, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit:

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right)$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad 5.2
Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right)$$

Numericky:

$$S_x^{'} = 12 \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) = 14400 \cdot 1{,}02291\overline{6} = 14730\ Kč$$

Do konce roku při polhůtním spoření uspoříme 14 730 Kč.

Ze základních vzorců můžeme odvodit další výrazy, které používáme podle potřeby pro výpočet výše vkladu a dosažení naspořené částky na konci roku nebo pro výpočet úrokové sazby.

Výpočet výšky vkladu

předlhůtní:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

polhůtní:

$$x = \frac{S_x^{'}}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

Výpočet úrokové sazby

předlhůtní:

$$i = \left(\frac{S_x}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m+1}$$

polhůtní:

$$i = \left(\frac{S_x^{'}}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m-1}$$

Příklad 5.3

Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok naspořili 10 000 Kč při 5 % p.a.?

Řešení:

Obecně:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

Numericky:

$$x = \frac{10\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right)} = \frac{10\,000}{12{,}325} = 811{,}36\ Kč$$

Abychom za rok uspořili 10 000 Kč, musíme ukládat začátkem každého měsíce 811,36 Kč.

Příklad 5.4

Jaká je procentní roční úroková sazba, jestliže za jeden rok uspoříme 10 000 Kč a ukládáme koncem každého čtvrtletí 2 400 Kč?

Řešení:

Obecně:

$$i = \left(\frac{S_x^{'}}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m-1}$$

Numericky:

$$i = \left(\frac{10\,000}{4 \cdot 2\,400} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot 4}{4-1} = 0{,}041\overline{6} \cdot 2{,}\overline{6} = 0{,}111\overline{1}$$

Požadovanou částku uspoříme za rok při úrokové sazbě 11,11 % p.a.

5.2 Spoření dlouhodobé

O dlouhodobém spoření hovoříme tehdy, jestliže trvá déle než jedno úrokovací období (např. jeden rok). Budeme předpokládat, že v rámci úrokovacího období ukládáme peněžní částku vždy na začátku nebo na konci úrokovacího období. Daná peněžní částka bude vždy stejná. Použijeme složené úročení.

Vzorce budeme odvozovat pro úrokovací období jeden rok.

Pokud bychom chtěli odvodit vzorec pro jiné (např. měsíční) úrokovací období, postup by byl zcela stejný, jen bychom zaměnili vše, co se týká ročního úrokovacího období (roční úroková míra, počet celých let spoření, ukládání na začátku resp. na konci roku), za pojmy (a čísla) vztahující se k novému úrokovacímu období (měsíční úroková míra, počet celých měsíců spoření, ukládání na začátku resp. na konci měsíce).
Při takovémto odvozování je nutné dodržet logiku, která bude uvedena níže na příkladu ročního úrokovacího období.

5.2.1 Spoření dlouhodobé předlhůtní

Na počátku každého úrokovacího období (v našem případě na počátku každého roku) ukládejme částku a. Naším úkolem bude zjistit, kolik budou činit úspory na konci n-tého období při úrokové sazbě i. Pro určení celkové uspořené částky včetně úroků na konci n-tého období vypočítáme výši vkladů za každý rok až do konce n-tého roku, a tyto uspořené částky sečteme. Ptáme se tedy, kolik nám přinese každá úložka až do konce spoření.

Tabulka 5.3 Hodnota jednotlivých vkladů až do konce spoření

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky do konce spoření	Celková hodnota na konci posledního období
1	n	$a\cdot(1+i)^n$
2	$n-1$	$a\cdot(1+i)^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$a\cdot(1+i)^1$

Konečný stav úspor S vypočítáme jako součet hodnot jednotlivých úložek na konci n-tého období.

$$S=a\cdot(1+i)^n+a\cdot(1+i)^{n-1}+a\cdot(1+i)^{n-2}+\cdots+a\cdot(1+i)=a\cdot(1+i)\cdot\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+1\right]$$

Výraz v hranaté závorce je geometrická řada, kde $a_1=1$, kvocient $q=(1+i)$ a počet členů je n.

Protože víme, že pro součet geometrické řady platí

$$S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

můžeme pro součet S psát

$$S=a.(1+i)\cdot\left[1\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\right]=a\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S=a\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Jestliže $a=1\ Kč$, potom výraz:

$$(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_n'$$

nazýváme střadatelem předlhůtním a udává nám, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč.

Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce:

$$S = a \cdot s'_n$$

Výpočet velikosti vkladu (splátky, úložky)

$$a = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]} = \frac{S}{s'_n}$$

Výpočet doby spoření

$$S \cdot i = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

$$\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right) = \ln\left((1+i)^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right) = n \cdot \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad 5.5
Kolik uspoříme za 8 let, jestliže budeme ukládat na počátku každého roku 5 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Numericky:

$$S = 5000 \cdot (1+0{,}05) \cdot \frac{(1+0{,}05)^8 - 1}{0{,}05} = 5250 \cdot 9{,}54910887578125 = 50132{,}82$$

Za 8 let uspoříme 50 132,82 Kč.

5.2.2 Spoření dlouhodobé polhůtní

Jestliže ukládáme peněžní částky na konci úrokovacího období (v našem případě na konci roku), hovoříme o spoření polhůtním. Chceme vypočítat, kolik uspoříme za n období, jestliže ukládáme na konci každého období peněžní částku a.

Tabulka 5.4 Hodnota jednotlivých vkladů až do konce spoření

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky do konce spoření	Celková hodnota na konci posledního období
1	$n-1$	$a\cdot(1+i)^{n-1}$
2	$n-2$	$a\cdot(1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	1	$a\cdot(1+i)^{1}$
n	0	$a\cdot(1+i)^{0}=a$

Konečný stav vkladů S' na konci n-tého období je opět dán součtem geometrické řady (hranatá závorka)

$$S'=a\cdot(1+i)^{n-1}+a\cdot(1+i)^{n-2}+\cdots+a\cdot(1+i)+a=a\cdot\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+1\right]$$

Přitom $q=(1+i)$; $a_1=1$

Potom součet geometrické řady bude

$$S'=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S'=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Jestliže $a=1\,Kč$ potom výraz

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_n''$$

nazýváme střadatelem polhůtním a udává nám, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na konci každého období uložíme 1 Kč.

Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce:

$$S'=a\cdot s_n''$$

Výpočet výše vkladu (splátky, úložky)

$$a = \frac{S' \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{S'}{s_n''}$$

Výpočet doby spoření n

$$S' \cdot i = a \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$\frac{S' \cdot i}{a} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{S' \cdot i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right) = \ln\left((1+i)^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right) = n \cdot \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad 5.6
Za jak dlouho uspoříme 50 000 Kč, jestliže koncem každého roku ukládáme 7 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Numericky:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{50\,000 \cdot 0{,}05}{7\,000} + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}05)} = \frac{0{,}3053816496}{0{,}0487901641} = 6{,}259$$

Abychom uspořili 50 000 Kč při daných podmínkách, musíme spořit více než 6 roků.

Je evidentní, že spořit necelé úrokové období nelze (přesněji řečeno lze, ale porušili bychom celou logiku spoření), protože ukládáme pravidelně na konci (případně na začátku) období a nemůžeme dát poslední vklad uprostřed úrokovacího období (za uvedených předpokladů).

U výše uvedeného příkladu budeme mít po 6 letech naspořeno 47 613,39 Kč. Zbývající sumu do požadované částky obdržíme pomocí jednoduchého (jsme v rámci jednoho úrokovacího období) úročení (pokud bychom přesáhli celé úrokovací období, použijeme kombinované úročení).
Pokud bychom tedy vyšli z naspořené částky a zadané úrokové sazby a pokud bychom tuto sumu úročili celý rok, obdrželi bychom na konci roku 49 994,06 Kč. Pokud bychom k této částce přidali dalších 7 000 Kč, přesáhli bychom značně požadovanou částku (konkrétně bychom měli 56 994,06 Kč, což odpovídá spoření za daných podmínek po dobu 7 let).
Je tedy otázkou, co chceme přesně spočítat.
Pokud chceme minimalizovat vklady, budeme spořit 6 let a dalších 361 dní (tj. 1 rok a 1 den) necháme částku naspořenou za 6 let úročit. V našem případě budeme mít po 6 letech spoření a 1 roku úročení k dispozici částku 49 994,06 Kč, která se za další jeden den zúročí na částku 50001,0036194 Kč. Požadovanou částku z našeho příkladu tímto způsobem přesáhneme o zhruba 1 Kč. Přičemž jsme uložili celkem 42 000 Kč.
Pokud nechceme minimalizovat vklady, ale chceme naspořit minimálně zadanou částku, zaokrouhlíme výsledek výpočtu (6,259) na celé číslo nahoru, tj. v našem konkrétním případě na 7 let. Naspoříme tak částku 56 994,06 Kč, přičemž jsme uložili celkem 49 000 Kč.

5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

V praxi většinou spoříme více roků a peněžní částky většinou ukládáme pravidelně každý měsíc (případně i v jiných pravidelných intervalech) – tedy m-krát za rok. Stejně jako u předcházejících úloh rozdělíme toto spoření na spoření předlhůtní a polhůtní podle toho, kdy budeme peněžní částky ukládat.

5.3.1 Kombinované spoření předlhůtní

Chceme zjistit, kolik uspoříme do konce n-tého roku, jestliže budeme ukládat peněžní částku na počátku každé m-tiny roku.

Nejdříve vypočítáme, kolik uspoříme včetně úroků na konci prvního roku, což zjistíme ze vztahu pro krátkodobé předlhůtní spoření. Tuto částku budeme mít k dispozici vždy na konci roku. Tím jsme převedli úlohu na případ, kdy koncem každého roku uložíme částku a, kterou jsme uvažovali u dlouhodobého spoření. Tuto částku a nahradíme uspořenou částkou S_x.

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) = a$$

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tedy:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Z daného výrazu vidíme, že jsme pro výpočet celkové uspořené částky použili dlouhodobého polhůtního spoření, i když jsme jednotlivé částky ukládali na počátku každé m-tiny roku. Je to dáno tím, že naspořená částka S_x je vlastně ukládána (naspořena) vždy na konci každého roku.

Výpočet výše vkladu x

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Výpočet doby spoření n

Použijeme vzorec pro polhůtní dlouhodobé úročení odvozený dříve

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

a za a dosadíme

$$m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

výsledný vzorec tedy bude (S' nahradíme S pro předlhůtní spoření)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad 5.7

Kolik uspoříme za 10 let, jestliže spoříme začátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:

Obecně:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Numericky:

$$S = 4 \cdot 2500 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0,05\right) \cdot \frac{(1+0,05)^{10} - 1}{0,05} = 10\,000 \cdot 1,03125 \cdot 12,5778925 = 129\,709,52$$

Při stanovených podmínkách uspoříme za 10 let 129 709,52 Kč.

Příklad 5.8
Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Numericky:

$$x = \frac{1\,000\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0,05\right) \cdot \frac{(1+0,05)^{10} - 1}{0,05}} = \frac{1\,000\,000}{12,325 \cdot 12,5778925} = 6450,68$$

Při stanovených podmínkách musíme měsíčně spořit 6 450,68 Kč.

5.3.2 Kombinované spoření polhůtní

Při řešení této úlohy budeme postupovat obdobným způsobem jako při spoření předlhůtním. Opět nahradíme částku a spořením krátkodobým polhůtním $S_x^{'}$.

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) = a$$

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tedy:

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Výpočet výše vkladu x

$$x = \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Výpočet doby spoření n

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad 5.9
Kolik musíme spořit koncem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$x = \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Numericky:

$$x = \frac{1000\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}} = \frac{1000\,000}{12{,}275 \cdot 12{,}5778925} = 6\,476{,}95$$

Při uvedených podmínkách je nutno měsíčně ukládat 6 476,9512 Kč.

Příklad 5.10
Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 5 000 Kč, aby uspořená částka byla ve výši 100 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Numericky:

$$n=\frac{\ln\left(\dfrac{1000000\cdot 0{,}05}{12\cdot 5000\cdot\left(1+\dfrac{12-1}{2\cdot 12}\cdot 0{,}05\right)}+1\right)}{\ln(1+0{,}05)}=\frac{\ln(1{,}81466395112)}{\ln(1{,}05)}=\frac{0{,}5959}{0{,}04879}=12{,}213568$$

Uvedenou částku při stanovených podmínkách uspoříme za přibližně 12 roků a 2 měsíce (0,213568 roku je, při 360 dnech za rok, 77 dnů). Tento výsledek je ovšem nepřesný.

Tady se opět dostáváme do situace, že máme spořit dobu, která neodpovídá přirozeným násobkům období, za které vkládáme pravidelně stejné částky. Je tedy nutno opět dořešit onu necelou část úrokovacího období.

Pokud budeme spořit za daných podmínek 12 let, budeme mít naspořeno 976 913,64 Kč. Zbývá tedy 23 086,36 Kč.

Do konce prvního měsíce (po skončených 12 letech) nám 976 913,64 Kč přinese úrok 4 070,47 Kč. Celkem tedy budeme mít na konci tohoto měsíce 980 984,11 Kč, což je méně, než kolik požadujeme (1 mil. Kč). Proto vložíme další vklad (5 000 Kč). Protože se úroky připisují až na konci roku, přinese nám částka ze začátku roku opět úrok 4 070,47 Kč i za druhý měsíc. Úroky nám přinese i náš poslední vklad, a to ve výši 20,83 Kč. Celkem tedy budeme na konci druhého měsíce (13.roku) mít 976 913,64 Kč + 2*4 070,47 Kč + 5 000 Kč + 20,83 Kč, celkem tedy 990 075,41. Což je opět méně než požadovaná částka. Proto vložíme další pravidelný vklad 5 000 Kč. Na konci třetího měsíce bychom měli 976 913,64 Kč + 3*4 070,47 Kč + 5 000 Kč + 2*20,83 Kč + 5 000 Kč + 20,83 Kč, celkem tedy 999 187,54 Kč. Zde už je rozdíl požadované částky a naspořené částky menší než pravidelný vklad. Musíme se tedy rozhodnout, co preferujeme.

Pokud preferujeme minimalizaci celkové vložené částky, nebudeme na konci třetího měsíce vkládat další pravidelný vklad, ale necháme zatím naspořenou částku pouze úročit. Částka 976 913,64 Kč přináší každý den 135,68 Kč. Každý vklad v hodnotě 5 000 Kč přináší každý den 0,69 Kč. Dohromady tedy máme za jeden den úrok 135,68 Kč + 2*0,69 Kč = 137,06 Kč (ve 13.roku spoření jsme provedly dva vklady). Rozdíl mezi požadovanou částkou a částkou naspořenou a zúročenou za první tři měsíce 13.roku spoření je 812,46 Kč. Tento rozdíl získáme na úrocích za 6 dnů ($\frac{812{,}46}{137{,}06}=5{,}93$). Když to všechno shrneme, je výsledek následující. Spoříme 12 let a dva měsíce a další 36 dnů necháme naspořenou částku úročit. Na účtu budeme mít 1 000 009,9 Kč. Celkem jsme uložili 730 000 Kč.

Pokud bychom chtěli mít minimálně požadovanou částku naspořenou co nejdříve, vložili bychom na konci třetího měsíce 13.roku ještě jeden vklad a měli bychom naspořeno 1 004 187,54 Kč, přičemž bychom celkem uložili 735 000 Kč.

5.4 *Příklady k procvičení*

1. Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové sazbě 9 % p.a.?

   [15 102 Kč]

2. Kolik musíme ukládat koncem každého měsíce, abychom za rok naspořili 21 000 Kč při úrokové sazbě 6 % p.a.?

   [1 703,17 Kč]

3. Jak často musíme ukládat stejnou částku na konci období, abychom na konci roku měli naspořeno 50 000 Kč? Úroková sazba je 6 % p.a.

   $[\, m = 48543{,}68932 \cdot \frac{1}{x} + 0{,}029126214 \,]$

4. Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom na konci roku měli při úrokové sazbě 2,8 % p.a. 1 milion Kč?

   [82 088,33 Kč]

5. Kolik uspoříme za půl roku, jestliže začátkem každého měsíce ukládáme 1 000 Kč při úrokové sazbě 3,5 % p.a. a půlročním úročení?

   [6 061,25 Kč]

6. Jak často musíme ukládat 500 Kč počátkem období, abychom za čtvrt roku měli při 3 % p.a. a při čtvrtletním připisování úroků naspořenou částku 6 024,375 Kč?

   [12 krát za čtvrtletí, tj. každý týden za předpokladu, že měsíc má 4 týdny]

7. Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 500 Kč, abychom uspořili 50 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 8 % p.a.? (minimalizujeme celkovou výši vkladů)

   [6 let 5 měsíců spořit a dalších 29 dnů nechat jenom úročit (bez vkladu)]

8. Při měsíční předlhůtním spoření 10 Kč a úrokové sazbě 3 % p.a. a ročním připisováním úroků určete uspořenou částku za 13 let.

   [1 904,59 Kč]

9. Pan Mercedes plánuje nákup nového auta za 3 roky a počítá s nákupní cenou 320 000 Kč. Svoje současné auto staré dva roky hodlá prodat a odhaduje jeho cenu v době prodeje na 80 000 Kč. Na zbytek ceny nového vozu chce pan Mercedes ukládat na začátku každého čtvrtletí stejnou částku na svůj účet v bance, při úrokové sazbě 12 % p.a. a ročním úročení, aby měl potřebnou částku za tři roky k dispozici. Kolik bude činit tento vklad?

   [16 540,41 Kč]

10. Klient ukládal po dobu deseti let koncem roku 10 000 Kč na vkladní knížku. V té době spořitelna úročila vklady první 4 roky 10 % p.a. a 9,5 % p.a. posledních 6 let. Jaká je hodnota naspořené částky pět let po posledním vkladu, jestliže úroková sazba 9,5 % p.a. trvá?

    [245 879,92 Kč]

11. Na schůzce 5 let po promoci se absolventi fakulty dohodli, že příští schůzku 10 let po promoci uspořádají jako jubilejní a slavnostní, v luxusním podniku. Na krytí předpokládaných nákladů souhlasili s tím, že každý pošle pokladníkovi ročníku na konci každého pololetí 50 Kč. Jestliže všech 100 absolventů fakulty tento závazek dodrží při dožití všech a pokladník vždy na konci pololetí uloží peníze do banky při úrokové sazbě 4 % p.a. úročeno pololetně, kolik bude naspořeno na konci 10. roku po promoci?

[54 748,60 Kč]

12. Otec od narození dcery ukládal počátkem každého měsíce 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 4,5 % p.a. s podmínkou, že si dcera tento vklad vybere při dovršení 18 let. Jaká byla hodnota naspořené částky v době výběru? (Předpokládáme, že se otec dožil 18. narozenin dcery)

[165 058,06 Kč]

*13. Kolik Kč uspoříte za 6 let, jestliže ukládáte začátkem každého čtvrtletí 15 000 Kč při úrokové sazbě 2,5 % p.a. a při měsíčním připisování úroků?

[389 584,78 Kč]

*14. Jakou částku musíte pravidelně ukládat koncem každého roku, jestliže chcete naspořit 1 mil. Kč za 13 let při úrokové sazbě 3 % p.a. a při pololetním připisování úroků?

[63 939,90 Kč]

6 Důchody

6.1 Problematika důchodů

Důchodem rozumíme pravidelné výplaty, které obvykle nazýváme anuity (výplaty důchodů) a budeme je značit a.

Podle toho, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:

- předlhůtní – anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu
- polhůtní – anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu

Pro začátek budeme předpokládat, že úrokovací období a časový interval k výplatě důchodů jsou stejné.

Podle toho, jak dlouho se bude důchod vyplácet, rozlišujeme důchod:

- věčný – je vyplácen neomezeně dlouho
- dočasný – je vyplácen pouze po určitou pevně stanovenou dobu

Podle toho, kdy se začne důchod vyplácet, rozlišujeme důchod:

- bezprostřední – s výplatou důchodu se začne okamžitě po podepsání smlouvy
- odložený – s výplatou se začne až po uplynutí určité doby

V souvislosti s důchody budeme počítat:

a) počáteční hodnotu důchodu D – je to součet současných hodnot všech v budoucnu získaných výplat důchodu. Počáteční hodnota důchodu nám tedy udává, kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušného důchodu.

b) konečná hodnota důchodu S – je to součet všech výplat důchodu přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí. Konečná hodnota důchodu nám udává, kolik bychom celkem získali ke konci posledního roku, kdybychom všechny výplaty důchodu okamžitě po jejich vyplacení při dané úrokové sazbě uložili.

Mezi konečnou a počáteční hodnotou platí vztah: $S = D \cdot (1+i)^n$

6.2 *Důchod bezprostřední*

U důchodu bezprostředního výplata začíná ihned v daném období. Podle toho, zda budou výplaty probíhat na počátku nebo na konci tohoto období, rozlišujeme důchod předlhůtní a důchod polhůtní.

6.2.1 Důchod bezprostřední předlhůtní

Naším úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu důchodu a vypláceného vždy počátkem úrokovacího období po n období při úrokové sazbě i. Potom počáteční hodnota důchodu se rovná součtu počátečních hodnot všech výplat důchodu.

Z předcházejících kapitol víme, že současnou hodnotu vypočítáme:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

Podle toho současnou hodnotu vypočítáme tak, že každou výplatu důchodu a diskontujeme diskontním faktorem $\frac{1}{1+i} = v$ k výchozímu datu (k první výplatě důchodu).

Tabulka 6.1 Počáteční hodnota jednotlivých výplat důchodu (anuit)

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	a
2	$a \cdot v$
3	$a \cdot v^2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a \cdot v^{n-1}$

Součet současných hodnot všech výplat důchodu tvoří konečnou geometrickou řadu

$a + a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^{n-1}$, kde $a_1 = a$ a $q = v$

Součet konečné geometrické řady je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Potom tedy součet současných hodnot všech výplat důchodu bude

$$D = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1 - v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i}$$

Tím jsme získali výraz pro určení kapitálu D, který musíme uložit, abychom mohli začátkem každého období pobírat důchod a.

Tuto peněžní částku tedy vypočítáme

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i}$$

Jestliže $a = 1\ Kč$, potom výraz

$$\frac{1 - v^n}{v \cdot \mathrm{i}} = a_n^{,}$$

se nazývá zásobitel předlhůtní a udává počáteční hodnotu důchodu ve výši 1 Kč vypláceného vždy počátkem úrokového období po dobu n úrokovacích období při úrokové sazbě i.

Příklad 6.1
Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední předlhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let při neměnné úrokové sazbě 4 % p. a. a při ročním úrokovacím období?

Řešení:
Obecně:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i}$$

Numericky:

$$D = 16\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20}}{\frac{1}{1+0{,}04} \cdot 0{,}04} = 16\,000 \cdot \frac{0{,}5436130537987}{0{,}0384615384615} =$$
$$= 16\ 000 \cdot 14{,}13393938 = 226143{,}03$$

Jestliže dnes uložíme 226 143,03 Kč, zajistí nám tato částka předlhůtní roční důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let.

6.2.2 Důchod bezprostřední polhůtní

Jde o to, vypočítat hodnotu důchodu D' ve výši a vypláceného vždy koncem úrokového období po n období při úrokové sazbě i.

Budeme postupovat obdobným způsobem jako u důchodu předlhůtního.

Tabulka 6.2 Počáteční hodnota jednotlivých výplat důchodu (anuit)

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	$a \cdot v$
2	$a \cdot v^2$
3	$a \cdot v^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a \cdot v^n$

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je opět dán konečnou geometrickou řadou $a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n$, kde $a_1 = a \cdot v$ a $q = v$

Potom pro daný součet platí:

$$D' = a \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = a \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot \frac{1}{1+i}} = a \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{v \cdot i} = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

Tím jsme získali výraz pro určení kapitálu, který musíme vložit, abychom mohli koncem každého úrokovacího období pobírat důchod a.

Tuto peněžní částku tedy vypočítáme

$$D' = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

Výraz

$$a_n'' = \frac{1-v^n}{i}$$

se nazývá zásobitel polhůtní a udává nám počáteční hodnotu důchodu ve výši 1 Kč vypláceného vždy koncem úrokovacího období po dobu n úrokovacích období při úrokové sazbě i.

Příklad 6.2
Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední polhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let při neměnné úrokové sazbě 4 % p. a. a při ročním úrokovacím období?

Řešení:
Obecně:

$$D' = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

Numericky:

$$D' = 16\,000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{20}}{0{,}04} = 16\,000 \cdot \frac{0{,}5436130537987}{0{,}04} =$$
$$= 16\,000 \cdot 13{,}5903263449675 = 217\,445{,}22$$

Jestliže dnes uložíme 217 445,28 Kč, zajistí nám tato částka výplaty důchodu podle zadaných podmínek.

Popřemýšlejte nad tím, proč je tato částka nižší než v předchozím příkladě (odpověď je jednoduchá).

6.2.3 Důchody vyplácené m-krát ročně

Stejně jako u spoření, může docházet k tomu, že výplaty důchodu jsou častěji než jednou za úrokovací období. Budeme předpokládat, že na počátku (konci) m-tiny úrokovacího období jsou vypláceny splátky důchodu ve výši x Kč. Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme výraz pro předlhůtní (polhůtní) důchod s tím, že musíme nejdříve vypočítat, jaká bude celková hodnota důchodu na konci roku. Celkovou hodnotu výplat důchodu na konci roku vypočítáme pomocí krátkodobého předlhůtního nebo polhůtního spoření. Nyní jsme nahradili m výplat důchodu ve výši x jednou výplatou důchodu ve výši S_x (S'_x)

Počáteční hodnota důchodu se pak vypočítá:

a) předlhůtní

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

b) polhůtní

$$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

U předlhůtního důchodu vidíme, že používáme zásobitel polhůtní a nikoliv předlhůtní, i když jednotlivé výplaty důchodu jsou uskutečněny na počátku každé m-tiny roku. Je to z toho důvodu, že při předlhůtním spoření vypočítáme vlastně výplatu důchodu, kterou bychom získali ke konci úrokovacího období.

Příklad 6.3
Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, který se vyplácí na počátku každého čtvrtletí po dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a. a při ročním úrokovacím období?

Řešení:
Obecně:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Numericky:

$$D = 4 \cdot 6000 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} =$$
$$= 24000 \cdot 1{,}03125 \cdot 7{,}721734929 = 191112{,}94$$

Počáteční hodnota důchodu při zadaných podmínkách bude 191 112,94 Kč.

Příklad 6.4
Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a. a při ročním úrokovacím období?

Řešení:
Obecně:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Numericky:

$$D = 4 \cdot 6000 \cdot \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} =$$
$$= 24000 \cdot 1{,}01875 \cdot 7{,}721734929 = 188796{,}42$$

Počáteční hodnota důchodu při zadaných podmínkách bude 188 796,42 Kč.

6.3 Důchod odložený

V předcházející části jsme mluvili o bezprostředním důchodu. To znamená, že se důchod začal vyplácet bezprostředně po zaplacení potřebné peněžní částky ve sjednané době. Odložený důchod se začíná vyplácet až po určité dohodnuté době, kterou nazýváme též karenční dobou k. Stejně jako u důchodu bezprostředního rozdělujeme odložený důchod na důchod předlhůtní a polhůtní.

6.3.1 Důchod odložený předlhůtní

Důchod odložený předlhůtní je vyplácen vždy na začátku určitého časového intervalu a jeho vyplácení je odloženo o k úrokovacích období. Úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu takovéhoto důchodu, který je vyplácen po n úrokovacích období při úrokové sazbě i.

Při výpočtu budeme vycházet z bezprostředního předlhůtního důchodu.

Víme, že počáteční hodnota D bezprostředního předlhůtního důchodu ve výši a se vypočítá jako součet současných hodnot budoucích anuit (výplat). U odloženého předlhůtního důchodu jde o to, že současnou hodnotu výplaty důchodu, která má být vyplacena v k-tém úrokovacím období splatnosti důchodu, vypočítáme tak, že hodnotu této výplaty diskontujeme k výchozímu datu. To znamená, že diskontní faktor umocníme na k.

Potom počáteční hodnota odloženého předlhůtního důchodu K se vypočítá podle vzorce

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1-v^n}{v \cdot i} = a \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot v^{k-1}$$

$$K = a \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot v^{k-1}$$

Počáteční hodnota K odloženého důchodu je vlastně diskontovaná počáteční hodnota bezprostředního důchodu D k výchozímu datu. Jde v podstatě o případ, jako kdybychom uložili částku K na k úrokovacích období (částka K se nám za tuto dobu zúročí na částku D) a po této době jsme si zaplatili bezprostřední důchod na n úrokovacích období.

Jestliže dochází k výplatám důchodu na začátku každé m-tiny roku, počítáme stejně jako v případě bezprostředního předlhůtního důchodu. Využijeme tedy vztah pro krátkodobé spoření předlhůtní.

Potom počáteční hodnota tohoto důchodu bude

$$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k$$

Příklad 6.5

Máme v hotovosti 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční předlhůtní důchod na 5 let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. V jaké výši budou výplaty tohoto důchodu při neměnné roční úrokové sazbě 5 % p.a. a při ročním připisování úroků?

Řešení:

Obecně:

$$K = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^{k-1} \Rightarrow a = \frac{K \cdot i}{\left(1 - v^n\right) \cdot v^{k-1}}$$

Numericky:

$$a = \frac{30\,000 \cdot 0{,}05}{\left(1 - \left(\frac{1}{1 + 0{,}05}\right)^5\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + 0{,}05}\right)^{2-1}} = \frac{1500}{0{,}2061655557} = 7\,275{,}71$$

Vyplácená částka bude činit 7 275,71 Kč.

Příklad 6.6

Jak velkou částku musíme dnes při neměnné úrokové sazbě 10 % p. a. uložit novorozenému dítěti, aby v 18 letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečil po dobu 10 let čtvrtletní předlhůtní důchod ve výši 2 000 Kč při ročním připisování úroků?

Řešení:

Obecně:

$$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k$$

Numericky:

$$K = 4 \cdot 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}1\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0{,}1}\right)^{10}}{0{,}1} \cdot \left(\frac{1}{1 + 0{,}1}\right)^{18} =$$

$$= 8\,000 \cdot 1{,}0625 \cdot 6{,}1445671 \cdot 0{,}1798587899 = 9\,393{,}81$$

K zabezpečení uvedeného důchodu musíme uložit 9 393,81 Kč.

6.3.2 Důchod odložený polhůtní

Vzhledem k tomu, že všechny úvahy jsou stejné jako u důchodu odloženého předlhůtního, uvedeme si pouze základní vzorce.

Počáteční hodnota odloženého polhůtního důchodu K' se vypočítá:

$$K' = v^k \cdot a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

Je to vlastně diskontovaná počáteční hodnota D' bezprostředního polhůtního důchodu diskontovaného k výchozímu datu a zásobitel polhůtní je vynásoben diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k.

V případě, že se důchod vyplácí m-krát za úrokovací období, bude počáteční hodnota takovéhoto důchodu vypočítána na základě krátkodobého polhůtního spoření a zásobitele polhůtního. Součin těchto výrazů násobíme diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k.

$$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot v^k$$

6.4 Důchod věčný

Je to důchod, jehož výplata není časově omezena $(n \to \infty)$. S tímto důchodem se můžeme setkat u některých cenných papírů, které nemají splatnost, ale majitel má nárok na výplatu důchodu po neomezenou dobu. Stejně jako u předcházejících důchodů hovoříme též o důchodu věčném polhůtním a věčném předlhůtním. Důchod věčný může být také bezprostřední nebo odložený.

6.4.1 Důchod věčný předlhůtní

Počáteční hodnotu D věčného předlhůtního důchodu vypočítáme jako limitu počáteční hodnoty bezprostředního předlhůtního důchodu.

Protože

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{v \cdot i}$$

bude pro $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-v^n}{v \cdot i} = \frac{a}{v \cdot i} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-v^n\right) = \frac{a}{v \cdot i} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} v^n\right] = \frac{a}{v \cdot i} \cdot \left[1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{a}{v \cdot i} \cdot (1-0) = \frac{a}{v \cdot i}$$

Upravíme-li tento výraz

$$\frac{a}{v \cdot i} = \frac{a}{\frac{i}{1+i}} = a \cdot \left(\frac{1+i}{i}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{i} + 1\right) = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

obdržíme výpočet hodnoty bezprostředního předlhůtního věčného důchodu

$$D = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

Jestliže vyplácení tohoto důchodu odložíme o k úrokovacích období, potom tento vztah musíme opět vynásobit diskontním faktorem umocněným na hodnotu doby odložení., tj. na počet úrokovacích období za dobu odložení.

$$K = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k$$

Je-li věčný důchod vyplácen m-krát za úrokovací období, postupujeme stejně jako u předcházejících důchodů.

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}$$

Násobení výrazem $\frac{1}{i}$ (část vzorce pro výpočet důchodu věčného polhůtního) místo výrazem $\left(1 + \frac{1}{i}\right)$ je dáno opět skutečností, že vyplácíme důchod na konci úrokovacího období, a proto je nutno použít část vzorce pro důchod věčný polhůtní. (Odvození tohoto vzorce je uvedeno níže)

Jde-li o důchod odložený vyplácený m-krát za úrokovací období, musíme tento výraz násobit diskontním faktorem umocněným na hodnotu doby odložení.

$$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i} \cdot v^k$$

Příklad 6.7

Jak vysoká částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního ročního důchodu ve výši 10 000 Kč od našeho 60. roku života, je-li nám dnes 30 let a úroková sazba je 5 % p.a. a úročení je roční?

Řešení:

Obecně:

$$K = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k$$

Numericky:

$$K = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{0{,}05}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + 0{,}05}\right)^{30} = 10\,000 \cdot 21 \cdot 0{,}2313774 = 48\,589{,}25$$

Abychom si zajistili stanovenou výplatu důchodu, musíme dnes složit částku 48 589,25 Kč.

6.4.2 Důchod věčný polhůtní

Stejně jako u důchodu věčného předlhůtního odvodíme pomocí limity důchod věčný polhůtní z důchodu bezprostředního polhůtního, který je dán vztahem

$$D' = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{a}{i} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 - v^n\right) = \frac{a}{i} \cdot \left[\lim_{n \to \infty} 1 - \lim_{n \to \infty} v^n\right] = \frac{a}{i} \cdot \left[1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{a}{i} \cdot (1 - 0) = \frac{a}{i} = a \cdot \frac{1}{i}$$

Pro důchod věčný polhůtní tedy platí vztah

$$D' = a \cdot \frac{1}{i}$$

Bude-li věčný polhůtní důchod odložený o k úrokovacích období, musíme tento výsledný vztah vynásobit diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k.

$$K' = a \cdot \frac{1}{i} \cdot v^k$$

Je-li věčný důchod polhůtní vyplácen m-krát za úrokovací období, potom počáteční hodnota polhůtního důchodu bude

$$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m - 1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}$$

Je-li důchod věčný odložený vyplácený m-krát za úrokovací období, potom počáteční hodnota tohoto důchodu bude

$$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m - 1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i} \cdot v^k$$

Příklad 6.8

Jaká částka nám zajistí čtvrtletní polhůtní věčný důchod ve výši 5 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 7 % p. a. a při ročním úrokovacím období?

Řešení:

Obecně:

$$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}$$

Numericky:

$$D' = 4 \cdot 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}07\right) \cdot \frac{1}{0{,}07} = 20\,000 \cdot 1{,}02625 \cdot 14{,}2857142857 = 293\,214{,}29$$

Při zadaných podmínkách je nutno složit částku 293 214,29 Kč.

Příklad 6.9

Kolik musíme koncem každého měsíce ukládat po dobu 10 let, abychom si zajistili po dobu dalších 15 let čtvrtletní polhůtní důchod 5 000 Kč při úrokové sazbě 7 % p.a.? Připisování úroků je v obou případech roční.

Řešení:

Musíme porovnat hodnotu úspor, které získáme za 10 let, s počáteční hodnotou důchodu vypláceného po dobu příštích 15 let.

Nejdříve musíme 10 let spořit každý měsíc. Potom čtvrtletně vyplácet důchod po dobu 15 let.

Spoření:	Důchod:
$m_1 = 12$	$m_2 = 4$
$n_1 = 10$	$n_2 = 15$
$i_1 = 0{,}07$	$i_2 = 0{,}07$
$x_1 = ?$	$x_2 = 5\,000\ Kč$

Obecně:

$$m_1 \cdot x_1 \cdot \left(1 + \frac{m_1 - 1}{2 \cdot m_1} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} = m_2 \cdot x_2 \cdot \left(1 + \frac{m_2 - 1}{2 \cdot m_2} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^{n_2}}{i}$$

$$m_1 \cdot x_1 \cdot \left(1 + \frac{m_1 - 1}{2 \cdot m_1} \cdot i\right) \cdot \left[(1+i)^{n_1} - 1\right] = m_2 \cdot x_2 \cdot \left(1 + \frac{m_2 - 1}{2 \cdot m_2} \cdot i\right) \cdot \left(1 - v^{n_2}\right)$$

$$x_1 = \frac{m_2 \cdot x_2 \cdot \left(1+\frac{m_2-1}{2\cdot m_2}\cdot i\right)\cdot\left(1-v^{n_2}\right)}{m_1\cdot\left(1+\frac{m_1-1}{2\cdot m_1}\cdot i\right)\cdot\left[(1+i)^{n_1}-1\right]}$$

Numericky:

$$x_1 = \frac{4\cdot 5000\cdot\left(1+\frac{4-1}{2\cdot 4}\cdot 0{,}07\right)\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1+0{,}07}\right)^{15}\right]}{12\cdot\left(1+\frac{12-1}{2\cdot 12}\cdot 0{,}07\right)\cdot\left[(1+0{,}07)^{10}-1\right]} = \frac{20000\cdot 1{,}02625\cdot 0{,}63755398}{12{,}385\cdot 0{,}967151357289565} =$$

$$= \frac{13085{,}7954395}{11{,}978169560031262525} = 1092{,}47$$

Abychom dostávali čtvrtletně důchod ve výši 5 000 Kč po dobu 15 let, musíme spořit každý měsíc po dobu 10 let 1 092,47 Kč.

6.5 Příklady k procvičení

1. Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední polhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

   [199 395,37 Kč]

2. Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

   [188 796,42 Kč]

3. Jakou částku musíme uložit synovi ve stáří 10 let, aby od jeho 20. narozenin dostával měsíčně předlhůtně po dobu 5 let částku 2 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 8 % p.a.?

   [57 886,14 Kč]

4. Jaká částka nám, nebo našim pozůstalým zajistí čtvrtletní předlhůtní věčný důchod při neměnné úrokové sazbě 8 % p.a.?

   [52,5 násobek vypláceného důchodu]

5. Určete celkový objem plateb za 10 let, je-li roční nominální důchod 3 200 Kč vyplácen čtvrtletně předlhůtně, při 4 % p.a. a při čtvrtletním složeném úročení.

   [39 500,19 Kč]

6. Jakou částku musíme pravidelně ukládat na začátku měsíce po dobu 10 let při pololetním úročení a úrokové sazbě 3,5 % p.a., abychom mohli po dalších 5-ti

letech začít dostávat polhůtní patnáctidenní důchod ve výši 5000 Kč po dobu 15 roků při čtvrtletním úročení a úrokové sazbě 3,5 % p.a.?

[8 197,90 Kč]

7. Dědic bude pobírat důchod 7 000 Kč pololetně po dobu 15 let od výplaty prvního důchodu. První výplata bude za 6 měsíců. Jaká je nominální hodnota dědictví při úrokové sazbě 10 % p.a. a při čtvrtletním úročení?

[106 844,74 Kč]

8. Osoba má v 65 letech k dispozici 500 000 Kč. Jaká bude vyplácená hodnota předlhůtního ročního důchodu po dobu 15 let, jestliže úroková sazba je 6 % p.a. s měsíčním úročením?

[49 023,58 Kč]

9. Klient se rozhodl ve věku 30 let vytvořit svůj vlastní specifický penzijní fond pravidelnými vklady na konci každého roku ve výši 10 000 Kč po dobu 35 let. Počínaje 66. narozeninami chce vybírat z tohoto fondu koncem každého roku po dobu 15 let.
    a. Jestliže platí po dobu celých 50 let existence fondu úroková sazba 8 % p.a. ročně, kolik bude moci klient ze svého fondu ročně vybírat, mezi 66. a 81. narozeninami?
    b. Jak se změní částka ročního důchodu, jestliže peněžní ústav sníží po 10 letech od zahájení výplat z fondu úrokovou sazbu z 8 % p.a. na 6 % p.a., jestliže má být dodržena doba vyplácení 15 let?

[a. 217 422,29 Kč; b. klesne o 11 337,49 Kč na hodnotu 206 084,80 Kč]

10. Zemřelý zanechal kapitál ve výši 50 000 Kč, který je investován při úrokové sazbě 4 % p.a. a při měsíčním úročení. Kolik předlhůtních měsíčních výplat ve výši 750 Kč obdrží dědic a kolik bude činit závěrečná výplata?

[75 plných výplat a poslední ve výšce 176,33 Kč]

11. Jakou částku musíme uložit při narození dítěte, aby poskytla 8 pololetních výplat 15 000 Kč ke krytí nákladů na studium, přičemž první výplata se předpokládá na 19. narozeniny budoucího studenta? Finanční ústav jako správce fondu zhodnocuje tento vklad úrokovou sazbou 9 % p.a. při měsíčním úročení.

[18 769,45 Kč]

12. Na začátku každých 10 dní po dobu 15 let jsme ukládali 300,- Kč na bankovní účet, který byl úročen 3,5 % p.a. s měsíčním připisováním úroků. Po plynutí 5 let banka zvýšila úrokové sazby o 0,50 procentního bodu ročně. Po 15 letech od začátku spoření se úrokové sazby snížili o 20 % z aktuální hodnoty. 10 let jsme nic neukládali, ale úrokové sazby pravidelně každé 2 roky rostly o 10 % z aktuální sazby. Po uplynutí 10 let jsme začali dostávat pravidelný měsíční předlhůtní důchod po dobu 30 roků, přičemž banka garantovala po celou dobu výplaty důchodu úrokovou sazbu, která byla v okamžiku vyplacení prvního důchodu. Jakou částku jsem dostávali? Měsíční připisování úroků platilo po celou dobu.

[1 682,24 Kč]

7 Umořování dluhů

Úvěr (dluh, půjčka) je důležitý finanční nástroj. Úvěrem rozumíme poskytnutí kapitálu na určitou dobu za odměnu – úrok. Ačkoliv je možné umořování dluhu z pohledu věřitele považovat za příjem důchodu, ukážeme si některé odlišnosti, které postup při splácení dluhu má.

Podle doby splatnosti rozdělujeme úvěry:

- krátkodobé – doba splatnosti nepřesahuje jeden rok
- střednědobé – doba splatnosti je od jednoho roku do pěti let
- dlouhodobé – doba splatnosti je delší než pět let

Hlavní způsoby umořování (splácení) dluhu můžeme rozdělit následovně:

- půjčka je uzavřena na neurčitou dobu. Musí být splacena najednou po výpovědi při zachování výpovědní lhůty. Úroky se platí ve sjednaných lhůtách jejich splatnosti.
- umořování dluhu se provádí od začátku pravidelnými platbami. Tyto platby (anuity) mohou být stále stejné (částí platby se umořuje dluh a částí platby se platí úrok), nebo se mohou zvyšovat, případně snižovat.

V tom případě je možno část anuity (splátky), která připadne na umoření dluhu, určit kvótami nebo procenty a k nim připojit splátky na úrok. Je zřejmé, že rychlejší umořování dluhu bude zvyšováním těchto kvót každým rokem. Toto umořování dluhu můžeme zvyšovat konstantními částkami, nebo ve smlouvě zakotvit i jiné splácení dluhu po vzájemné dohodě se souhlasem věřitele.

Přehled výšky anuit (splátek dluhu) včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení sestavují banky pro své klienty do tzv. umořovacích plánů.

Umořovací plány se mohou lišit:

- typem splátek (polhůtní, předlhůtní)
- způsobem úročení (polhůtní, předlhůtní)
- obdobími splátek (stejná nebo odlišná od úrokového období)

Předpoklad 4
V dalších úvahách se budeme zabývat umořováním dlouhodobých úvěrů při polhůtním úročení.

Umořovací plán obsahuje pro každé období, pro které se sestavuje a v němž je dluh splácen, následující položky:

- výše anuity (splátky)
- výše úroku z dluhu
- výše úmoru
- stav dluhu po odečtení úmoru

Vždy platí: anuita = úmor + úrok

7.1 Umořování dluhu nestejnými splátkami

Umořování dluhu nestejnými splátkami si vysvětlíme na příkladu a některé závěry zobecníme.

Příklad 7.1
Úvěr ve výši 280 000 Kč má být splacen polhůtními splátkami. První úmor má být ve výši 10 000 Kč a každý následující je o 10 000 Kč vyšší. Kromě toho je nutno platit běžný úrok. Sestavte umořovací plán při úrokové sazbě 10 % p. a.

Řešení:
Při sestavování umořovacího plánu budeme předpokládat, že uvedené hodnoty se budou vztahovat vždy na konec úrokovacího období.

Tabulka 7.1 Umořovací plán pro lineárně rostoucí úmor

období	anuita	úrok	úmor	stav dluhu
0				280 000
1	38 000	28 000	10 000	270 000
2	47 000	27 000	20 000	250 000
3	55 000	25 000	30 000	220 000
4	62 000	22 000	40 000	180 000
5	68 000	18 000	50 000	130 000
6	73 000	13 000	60 000	70 000
7	77 000	7 000	70 000	0

Postup při sestavování umořovacího plánu:

Nejprve vyplníme sloupec nazvaný úmor, a to tak, že v prvním období bude úmor 10 000 Kč, v druhém období o 10 000 Kč vyšší, tedy 20 000 Kč atd. Jak je vidět, za 7 období (výpočet počtu období je uveden dále) splatíme celý úvěr.

Do sloupce úrok vždy zapíšeme úrok ze stavu dluhu.

Úrok + úmor nám udává anuitu (splátku).

Od stavu dluhu odečteme vždy úmor a z této částky vypočítáme úrok pro následující anuitu.

Z našeho příkladu, kde se úmor pravidelně zvyšuje o pevnou částku, můžeme počet anuit vypočítat pomocí aritmetické posloupnosti, neboť víme, že:

$a_1 = 10\,000$ a $d = 10\,000$ a součet všech úmorů musí být roven výši počátečního dluhu, tedy $S_n = 280\,000$

Z aritmetické posloupnosti víme, že:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

Úpravou této rovnice obdržíme kvadratickou rovnici, z které vypočítáme n:

$$n^2 \cdot d + (2 \cdot a_1 - d) \cdot n - 2 \cdot S_n = 0$$

Jestliže dosadíme za a_1, d, S_n konkrétní hodnoty a vyřešíme kvadratickou rovnici, dostaneme dobu splatnosti úvěru. V úvahu bereme pouze kladný kořen této rovnice.

7.2 Umořování dluhu stejnými anuitami

Předpokládejme, že dluh D má být splacen i s úroky n stejnými splátkami a splatnými vždy na konci úrokovacího období při neměnné roční úrokové sazbě i.

Jak víme z kapitoly věnované důchodům, počáteční hodnotu dluhu můžeme pokládat za počáteční hodnotu důchodu a jednotlivé anuity za výplaty důchodu, který si věřitel zajistil poskytnutím úvěru.

Abychom určili výši anuity, je nutno si uvědomit, že počáteční hodnota dluhu se musí rovnat současné (diskontované) hodnotě všech anuit.

Platí tedy stejně jako u (polhůtního) důchodu rovnice:

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$ – diskontní faktor

D – počáteční výše dluhu

a – anuita

Víme, že pro výpočet počáteční hodnoty důchodu platí:

$$D = a \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = a \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot a_n''$$

kde a_n'' je zásobitel polhůtní.

Z dané rovnice vypočítáme anuitu:

$$a = \frac{D \cdot i}{1-v^n}$$

Výraz $\frac{i}{1-v^n}$ je převrácená hodnota zásobitele a nazývá se umořovatel. Udává nám výši polhůtní anuity nutnou k tomu, aby se zaplatil dluh 1 Kč za n úrokovacích období při úrokové sazbě i.

Pro umořování dluhu potřebujeme sestavit umořovací plán. K jeho sestavení potřebujeme znát kromě hodnoty anuity též hodnotu úmoru a úroku. Nyní si uvedeme výpočet těchto hodnot.

Původní stav dluhu D_0 je současná hodnota všech anuit, tedy:

$$D_0 = a \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot a_n''$$

Z první anuity připadá na úrok U_1 částka $D_0 \cdot i$, kterou můžeme vyjádřit vztahem:

$$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot \left(1-v^n\right)$$

Na úmor dluhu M_1 pak zbývá částka:

$$M_1 = a - U_1 = a - a \cdot \left(1-v^n\right) = a \cdot v^n$$

Předpokládejme nyní, že po zaplacení r splátek má zbytek dluhu výši D_r. Protože D_r je rovný současné hodnotě zbývajících $n-r$ splátek (tj. $D_r = a \cdot \frac{1-v^{n-r}}{i}$), můžeme odvodit pro výši úroku U_{r+1} v období $r+1$ a výši úmoru M_{r+1} ve stejném období analogické vztahy jako pro výši úroku U_1 a úmoru M_1 v prvním období splácení dluhu.

Pro výši úroku v $r+1$ – ním období platí:

$$U_{r+1} = D_r \cdot i = a \cdot \left(1-v^{n-r}\right)$$

Je to úrok ze stavu dluhu na konci předcházejícího období.

Pro výši úmoru v $r+1$ –ním období platí:

$$M_{r+1} = a - U_{r+1} = a - D_r \cdot i = a - a \cdot \left(1-v^{n-r}\right) = a \cdot v^{n-r}$$

Je to anuita mínus úrok.

Z uvedeného je vidět, že umořovací splátky tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $v = \frac{1}{1+i}$.

Sestavme umořovací plán na základě předcházejících vztahů.

Postup:
V umořovacím plánu vyplníme nejprve počáteční stav dluhu a potom celý sloupec s anuitami, kterou jsme spočítali podle vzorce. Pak v každém řádku vypočítáme výši úroku a výši úmoru.

Tento výpočet je možno provést dvěma způsoby:

Úrok:
- z předcházejícího stavu vkladu
- z výše anuity

Úmor:
- rozdílem anuita minus úrok
- úročením úmoru z předcházejícího období, což je vlastně diskontování anuity

7.3 Určování počtu anuit

Máme vyřešit úlohu, kdy dluh (úvěr) D je splácen pevnou anuitou při úrokové sazbě i. Máme určit, jak dlouho se bude splácet tento dluh a jak vysoká bude poslední splátka.

Vyjdeme ze vztahu pro výši počátečního dluhu:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

Tento výraz zlogaritmujeme a obdržíme:

$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right)}{ln\, v}$$

Z tohoto výrazu vypočítáme období n, což nemusí být celé číslo. Pokud n není celé číslo, určíme nejbližší nižší celé číslo n_0. Z uvedeného vyplývá, že budeme dluh splácet n_0 celých období ve výši a. Zbývající hodnotu dluhu splatíme ve výši b, která bude nižší než vypočítaná anuita a.

Potom pro počáteční hodnotu dluhu obdržíme vztah:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} + b \cdot v^{n_0 + 1}$$

Poslední splátku dluhu b vyjádříme vztahem:

$$b = \left(D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}\right) \cdot (1 + i)^{n_0 + 1}$$

Poslední splátka se také skládá z úmoru a úroku. Stav dluhu po n_0-té splátce má hodnotu $b \cdot v$.

Poslední výše úmoru má také hodnotu $b \cdot v$, protože na konci splácení musí být hodnota dluhu rovna 0.

$$M_{n_0+1} = b \cdot v$$

Poslední výše úroku je úrokem z dluhu D_{n_0}, tedy také z hodnoty úmoru M_{n_0+1}. Tento úrok můžeme vyjádřit:

$$U_{n_0+1} = b \cdot v \cdot i$$

Příklad 7.2
Dluh 45 000 Kč má být splacen ročními anuitami ve výši 8 000 Kč při úrokové sazbě 14 % p.a. Určete počet anuit, výši poslední splátky a sestavte umořovací plán.

Řešení:
Obecně:

$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right)}{ln\, v}$$

Numericky:

$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{45\,000 \cdot 0,14}{8\,000}\right)}{ln \frac{1}{1,14}} = \frac{ln(0,2125)}{ln(0,87719298245614)} = 11,82$$

Počet splátek je 12; $n_0 = 11$.

Poslední splátka obecně bude:

$$b = \left(D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}\right) \cdot (1 + i)^{n_0+1}$$

Numericky:

$$b = \left[45\,000 - 8\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,14}\right)^{11}}{0,14}\right] \cdot 1,14^{12} = 6\,639,73\ Kč$$

Poslední splátka bude ve výši 6 639,73 Kč.

Tabulka 7.2 Umořovací plán pro konstantní anuitu

období	anuita	úrok	úmor	stav dluhu
0				45 000,00
1	8 000,00	6 300,00	1 700,00	43 300,00
2	8 000,00	6 062,00	1 938,00	41 362,00
3	8 000,00	5 790,68	2 209,32	39 152,68
4	8 000,00	5 481,38	2 518,62	36 634,06
5	8 000,00	5 128,77	2 871,23	33 762,82
6	8 000,00	4 726,80	3 273,20	30 489,62
7	8 000,00	4 268,55	3 731,45	26 758,16
8	8 000,00	3 746,14	4 253,86	22 504,31
9	8 000,00	3 150,60	4 849,40	17 654,91
10	8 000,00	2 471,69	5 528,31	12 126,60
11	8 000,00	1 697,72	6 302,28	5 824,32
12	6 639,73	815,41	5 824,32	0,00

Z příkladu je vidět postup při tvorbě umořovacího plánu v případě dané anuity. Dosud jsme řešili případy, kdy jsme spláceli dluh na konci každého úrokovacího období. Pokud dochází ke splácení dluhu vícekrát za úrokovací období, vypočítáme nejdříve hodnotu splátek do konce roku podle vztahu

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

a na základě tohoto výpočtu pak sestavíme umořovací plán.

7.4 Příklady k procvičení

1. Klient má splatit hypotéku 4 000 000 Kč měsíčními splátkami ve stálé výši a ve lhůtě 25 let, při úrokové sazbě 10 % p.a. s měsíční frekvencí připisování úroků. Určete částku měsíční splátky a sestavte dílčí umořovací plán pro prvních dvanáct splátek. Jaká část dluhu bude prvními dvanácti splátkami umořena?
[splátka 36 348,03 Kč; umořeno bude 37 881,37 Kč]

2. Klient za objekt v ceně 560 000 Kč mohl zaplatit 60 000 Kč v hotovosti a na zbytek ceny si vypůjčil na hypotéku při 10% p.a. s měsíčním úročením. Úvěr bude splácet po dobu 25 let měsíčními splátkami ve stálé výši. Určete výši měsíční splátky a sestavte dílčí umořovací plán pro prvních šest měsíců. Jaká část úvěru bude za prvních 6 měsíců splacena a jak vysoká je hodnota úroku za těchto 6 měsíců?
[splátka 4 543,50 Kč; splaceno 2 308,65 Kč; na úrocích zaplaceno 24 952,37 Kč]

3. Úvěr ve výši 500 000 Kč má být splacený ročními polhůtními anuitami. První umoření úvěru bude 20 000 Kč a další následující vždy o 10 000 Kč vyšší. Úroková sazba bude 15 % p.a. Jaký je počet anuit – sestavte umořovací plán.

[9]

4. Půjčka 20 000 Kč při 12% p.a. s měsíčním úročením se má splatit měsíčními splátkami ve stálé výši polhůtně po dobu jednoho a půl roku. Určete zůstatek dluhu koncem 8. měsíce od jeho vzniku.

[11 551,59 Kč]

5. Klient si vypůjčil 1 milion Kč při 15% p.a. s měsíčním úročením. Klient zamýšlí splácet dluh měsíčními splátkami ve stálé výši polhůtně po dobu 8 let. Určete:
    a. jakou část dluhu splatil klient během prvního roku;
    b. kolik zaplatil během prvního roku na úrocích.

[a. 70 029,88 Kč; b. 145 314,98 Kč]

6. Dluh 100 000 Kč se splácí čtvrtletními platbami ve stálé výši po dobu 10 let při 10 % p.a. čtvrtletně. Jaký je zůstatek dluhu na konci 6. roku? Jaký by byl zůstatek dluhu na konci 6.roku při stejných podmínkách, ale při měsíčním úročení a měsíčním splácení?

[52 006,21 Kč; 52 104,60 Kč]

7. Klient koupil chladničku v ceně 12 000 Kč na splátky a zavázal se splatit dluh měsíčními splátkami ve stálé výši během 3 let, při úrokové sazbě 18% p.a. s měsíčním úročením. Kdyby chtěl splatit dluh v kratší lhůtě, musel by zaplatit přirážku ve výši trojnásobku částky měsíčního úroku ze zůstatku dluhu ke dni předčasného splacení. Po zaplacení 12 splátek zjišťuje klient, že místní pobočka banky nabízí půjčky se splatností za 2 roky při úrokové sazbě 12% p.a. s měsíčním úročením. Bylo by výhodné pro klienta vypůjčit si na zbytek dluhu v bance a splatit dluh na začátku druhého roku najednou?

[ano]