Masarykova Univerzita
Ekonomicko-správní fakulta
Katedra financí

FINANČNÍ MATEMATIKA

Luďek Benada, Juraj Hruška, Silvie Kafková

Brno 2015

Masarykova Univerzita
Ekonomicko-správní fakulta
Katedra financí

FINANČNÍ MATEMATIKA

Luďek Benada, Juraj Hruška, Silvie Kafková

Brno 2015

Obsah

Slovo úvodem

Kurz finanční matematiky představuje aplikaci matematického aparátu v oblasti financí. Vědomosti nabyté absolvováním tohoto kurzu se však neomezují pouze na oblast bankovních vkladů a úvěrů. Získané znalosti rozšiřují studentovy rozhledy a chápání souvislostí. Bez základních znalostí finanční matematiky není možné se obejít v pojišťovnictví, ve firemních financích, při zkoumání kapitálových trhů, v teorii portfolia, v analýze cenných papírů,v účetnictví apod. Bez nadsázky tedy můžeme říci, že zvládnutí úvodu do finanční matematiky je elementárním předpokladem odborné profilace v oblasti financí. Věříme, že touto publikací se povede přispět k pochopení problematiky finanční matematiky a student po absolvování kurzu bude moci přistupovat k řešení finančních situací rozumně a kriticky.

V následujícím textu bude uvedeno odvození potřebných vzorců, jejich aplikace na modelových příkladech a v závěru každé kapitoly čtenář najde několik příkladů k procvičení probírané látky. Student by tak po absolvování kurzu měl být schopen sám odvodit vzorce potřebné pro řešení problémů elementární finanční matematiky a tyto vzorce pak aplikovat na řešení praktických příkladů.

Následující studijní text je převážně založen na znalosti středoškolské matematiky, zejména pak na znalostech logaritmického počtu, aritmetické a geometrické řady. Před začátkem kurzu je tedy vhodné si zopakovat početní operace zaměřené na exponenciální rovnice, logaritmické rovnice, aritmetickou a geometrickou řadu.

1

Úrokový počet

Z ekonomické teorie víme, že výrobní faktory jsou vzácné a je třeba dbát na jejich hospodárné využívání. Optimálního využívání vzácných zdrojů je zajištěno jejich cenou. Jeden z výrobních zdrojů je také kapitál, který bude předmětem celého kurzu finanční matematika, zejména pak zkoumání problematiky spojené s jeho hodnotou.

Cena kapitálu se označuje jako úrok. Kromě vzácnosti kapitálu, která může být dána situací na trhu kapitálu, se v ceně odráží ještě další faktory. Patří sem jednak *náklady příležitosti*. Pokud bychom své prostředky místo vložení na bankovní účet použili na podnikaní, dokázali by nám generovat „zisk“. Další složkou ceny kapitálu je *vývoj cenové hladiny*, který z dlouhodobého pohledu vykazuje jistou nestabilitu a inklinaci k cenovému růstu. Aby bylo zabráněno znehodnocení kapitálu, je nutné tento cenový růst s ohledem na kupní sílu reflektovat. Poslední důležitou oblastí formovaní ceny kapitálu je *riziko* podstoupené poskytovatelem kapitálu. V oblasti investování má riziko a odměna za riziko vždy tendenci pohybovat se v růstu stejným směrem. Tedy pokud podstoupí investor či věřitel větší riziko, měli by být odměněni více. Jinými slovy, cena rizikového kapitálu bude vyšší než cena kapitálu, který je zatížen menším rizikem. Cena kapitálu se vztahuje jak na věřitele, tak na dlužníka.

1.1 Vymezení základních pojmů

- *Úrok I* představuje peněžní vyjádření ceny kapitálu. V absolutním vyjádření je to rozdíl mezi vstupní výší kapitálu a výší kapitálu v době splatnosti. Úrok je funkcí kapitálu, času a úrokové sazby. Jeho výše závisí také na formě výpočtu.

- *Uročení* představuje početní operaci provedenou za účelem výpočtu úroku.

- *Úroková míra r* představuje cenu jednotkového kapitálu. Cena kapitálu se dá vyjádřit také v procentech, kdy používáme označení úroková sazba. Procenta se vztahují na vstupní kapitál. Jistina uvádí současnou hodnotu kapitálu v čase $t = 0$. V dalším textu budeme pojem úroková míra a sazba brát jako synonymum. Přestože budeme používat výrazu úroková sazba, pro praktické výpočty budeme vždy používat výraz v desetinném čísle.

- *Úrokové období UO* představuje časový interval, za který se počítá úrok. V modelových příkladech může být délka úrokového období stanovena libovolně. V praxi se nejčastěji setkáváme s těmito intervaly: Roční (p.a.), pololetní (p.s.), kvartální (p.q), měsíční (p.m.), týdenní (p. sept.), denní (p.d.). Ke stanovení délky úrokového období se vychází z různých úprav (zvyklostí). Pokud se vychází ze skutečného počtu dnů v měsíci a roce, pak hovoříme o *anglické metodě*. Stanovení skutečné délky úrokového období ve vztahu 360 dnů v roce označuje *francouzskou metodu*. Z tohoto pohledu nejjednodušší přístup představuje *německá metoda*, která vychází z předpokladu 30 dnů v měsíci a 360 v roce. Pokud nebude uvedeno jinak, tak veškeré výpočty v tomto učebním materiálu budou vycházet z německé metody.

- *Doba úročení T* představuje celkovou dobu, po kterou se uvažuje úročení kapitálu. Pokud se nejedná o triviální případy, tak v početních příkladech většinou platí $UO \neq T$.

- *Současná hodnota* kapitálu PV udává hodnotu kapitálu v čase $t = 0$. Jinými slovy říká jakou hodnotu má kapitál právě nyní.

- *Budoucí hodnota* kapitálu FV stanovuje výši kapitálu v libovolném budoucím okamžiku t.

- *Daň*, někdy v souvislosti s úroky také *srážková daň*, představuje odvod prostředků finančnímu úřadu. Pro účely finanční matematiky rozlišujeme, jak často je daň splatná.

- *Cenová hladina* zohledňuje kupní sílu peněz v čase. Růst cenové hladiny se označuje jako inflace. Pokles cenové hladiny je označován jako deflace.

1.2 Úročení

V této kapitole si postupně rozebereme jednotlivé typy *polhůtního úročení*. Pod pojmem *polhůtní úročení* si představujeme situaci, kdy je úrok splatný, tzn. počítá se na konci úrokového období. Výpočet úroku vychází z počáteční hodnoty kapitálu.

1.2.1 Jednoduché úročení

V případě jednoduchého úročení je úrok lineární funkcí současné hodnoty kapitálu, úrokové sazby a času. Důležité je, že úrok je počítán vždy z počáteční hodnoty kapitálu. Z toho plyne, že za předpokladu neměnných dalších dvou podmínek úročení (r, UO) bude výše úroku na konci UO vždy stejná.

Pro výpočet výše úroku za jedno úrokovací období UO tedy platí

$$I = PV \cdot r \cdot t, \tag{1.1}$$

kde t vyjadřuje poměrnou část úrokovacího období, po kterou dochází k úročení počátečního kapitálu. Zde tedy platí $t = 1$.

Uvažujeme-li budoucí hodnotu kapitálu za jedno úrokovací období, pak její výše bude rovna hodnotě kapitálu v čase $t = 0$ navýšené o úrok na konci úrokového období. Tedy

$$\begin{aligned} FV &= PV + PV \cdot r \cdot t \\ &= PV + I. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Budeme li počáteční kapitál úročit po n úrokovacích období, pak celkovou výši úroků vypočteme jako

$$I = PV \cdot r \cdot t, \tag{1.3}$$

kde $t = n \cdot UO$. Odtud plyne, že budoucí hodnota kapitálu v případě jednoduchého úročení je lineární funkcí času t. U jednoduchého úročení tedy nedochází k připisování úroků z úroků v dalších obdobích.

Jestliže bude $t < UO$, pak bude čas vyjádřen poměrně k velikosti úrokového období. Např. uvažujme případ, kdy peněžní prostředky ležely na běžném účtu 27 dnů a úrokovací období je 1 rok. Pak za čas t do rovnice pro výpočet FV dosadíme výraz $\frac{27}{360}$. Obdobně pokud by prostředky byly uložené na bankovní účtu 2 měsíce a banka by připisovala úrok dva krát za rok ($UO = 6$ měsíců), pak by platilo $t = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$.

Přístup založený na jednoduchém úročení se využívá k výpočtu úroků na běžných účtech. Pro tyto účely je typické, že na bankovním účtu dochází k pohybu finančních prostředků. Uvažujeme tedy rozdílnou výši a směr toku finančních prostředků a také čas, po který jsou prostředky na účtu. Důležitým předpokladem je, aby úrokové podmínky vycházející z úrokové sazby zůstaly neměnné. Na tomto místě je nutné zdůraznit k jakému období se vztahuje uvedená úroková sazba a jakou poměrnou část tohoto období jsou prostředky úročeny.

Uveďme si jednoduchý příklad.

Příklad 1. Banka poskytuje zhodnocení vkladů roční úrokovou sazbou ve výši 1,2 % p.a. Počáteční stav na bankovním účtu ke dni 1.5. byl 5 000 Kč. Následně bylo 8.5. vloženo 2 500 Kč, 15.5. 3 700 Kč a 24.5. 1 200 Kč. Stanovte výši připsaných úroků a konečný stav účtu k 31.5. Budeme uvažovat německou metodu pro úrokovací období.

Řešení. *Nejdříve je nutné spočítat dny, po které je kapitál bance k dispozici, resp. čas t_i, za který bude vypočítán úrok. Tedy*

- *počáteční zůstatek účtu 5.000 Kč - 30 dnů, pak* $t_1 = \frac{30}{360}$
- *vklad 8.5. 2.500 Kč - 22 dnů (30-8), pak* $t_2 = \frac{22}{360}$
- *vklad 15.5. 3.700 Kč - 15 dnů (30-15), pak* $t_3 = \frac{15}{360}$
- *vklad 24.5. 1200 Kč - 6 dnů (30-24), pak* $t_4 = \frac{6}{360}$.

Dalším krokem je výpočet úroku z každé částky podle vzorce (1.3) *:*

- *úrok z počátečního zůstatku:* $I_1 = 5000 \cdot 0,012 \cdot \frac{30}{360} = 6,25$
- *úrok z vkladu 8.5:* $I_2 = 2500 \cdot 0,012 \cdot \frac{22}{360} = 1,8\overline{3}$
- *úrok z vkladu 15.5.:* $I_3 = 3700 \cdot 0,012 \cdot \frac{15}{360} = 1,85$
- *úrok z vkladu 24.5.:* $I_4 = 1200 \cdot 0,012 \cdot \frac{6}{360} = 0,24$.

Nyní již můžeme spočítat výsledný připsaný úrok jako $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. *Tedy*

$$I = 6,25 + 1,8\overline{3} + 1,85 + 0,24 = 8,17\overline{3}.$$

Na závěr vypočítáme konečný stav na účtu, kdy sečteme počáteční stav účtu, jednotlivé úložky a výsledný úrok. Tedy

$$5000 + 2500 + 3700 + 1200 + 8,17\overline{3} = 12408,17\overline{3}.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 1. Jaká bude hodnota vkladu ve výšce 10 000 Kč po 7 měsících při útokové sazbě 3 % p.a., za předpokladu, že jsme vložili vklad na začátku 6. měsíce. Úrokovací období je 1 rok. Jaká je hodnota vkladu 6 měsíců po uložení? Jaká by byla hodnota vkladu za předpokladu, že úrokovací období jsou 2 roky?
[10 175; 10 000; 10 000]

Cvičení 2. Klient vložil na účet 12 000 Kč. Po 101 dnech mu byl připsán úrok 202 Kč. Jaká byla úroková míra, kterou byl účet zhodnocován? Určete datum, kdy byl vklad uskutečněn (z reálného pohledu i z pohledu finanční matematiky), jestli předpokládáme roční úrokovací období.
[6 % p.a.; 21.9.; 19.9.]

Cvičení 3. Vložili jsme na účet sumu 5 000 Kč. Na konci období stav účtu činil 5 055 Kč. Úroková míra byla 9%. Určete jak dlouho byly peníze úročeny?
[44 dní]

Cvičení 4. Na jak dlouho jsme museli uložit vklad ve výši 550 000 Kč, abychom při úrokové sazbě 9 % p.a. získali na konci dvou letého úrokovacího období sumu 641 575 Kč. Jaká musí být minimální délka úrokovacího období (v letech), aby se vklad alespoň zdvojnásobil a úroky by byly vyplaceny jen jednou (po celou dobu by platilo jednoduché úročení). Kolik to bylo přesně roků, měsíců a dnů?
[666 dní; 12 let; 11let 1 měsíc a 10 dnů]

Cvičení 5. Cestou na letní festival měl Lenny dopravní nehodu a rozbil svůj harlej. Měl však motocykl pojištěn. Pojišťovna mu vplatila k 1.8. sumu 400 000 Kč. Peníze okamžitě uložil na účet úročený sazbou 7,6 % p.a. Kolik musel k dané sumě přidat z vlastních peněz, aby si na konci roku mohl koupit nový motocykl za 1 200 000 Kč? Jak by se situace změnila, kdyby si ho koupil na Vánoce (může jít na účtě do záporu; kontokorent je úročen sazbou 17 % p. a.)?
[763 166,40 Kč; 764 897,25 Kč]

Cvičení 6. Dezider nabyl 600 m měděného drátu s průměrem 3,2 mm. Peníze utržené z prodeje kabelu ve sběrných surovinách uložil na 3 různé účty. Peníze z prodeje 100 m kabelu dal na účet s úrokovou sazbou 0,2 % p.m. na d dni. Peníze z prodeje 200 m kabelu dal na jiný účet se sazbou 0,8 % p.q. na dva krát tak dlouhou dobu. Peníze ze zbytku dal na pětkrát tak dlouhou dobu (vzhledem k prvním účtu) na třetí účet se sazbou 0,02 % p.d. (když

peníze nebyly na účtu, nezhodnocovaly se). Na konci roku, kdy mu byly připsané úroky na všech účtech, měl dohromady sumu ve výši 5 091,29 Kč. Počítáme s ročním úrokovacím obdobím. Jak dlouho byly peníze na jednotlivých účtech? (Hustota mědi je 8960 kg/m3 a výkupní cena čisté mědi je 115 Kč/kg.)
[42 dnů, 84 dnů a 210 dnů]

Cvičení 7. Klient si půjčil u nebankovní instituce sumu 200 000 Kč na opravu své zánovní Škody Rapid. Za vyřízení půjčky zaplatil poplatek 15 000 Kč. Úroková sazba činila 15 % p.a. Půjčil si 4. 4.2014 a splatil 11. 11. 2014. Jaká je skutečná úroková míra úvěru (RPSN) pokud použijeme metodu úročení 30/360? Jaká je skutečná úroková míra (RPSN), jestli je úvěr úročen metodou (aktuální počet dní v měsíci)/360.
[29,6675 %; 29,6074 %]

Cvičení 8. Pan Klíště si u své banky uložil 20 000 Kč a za 30 let si plánuje vyzvednou 58 700 Kč. Banka mu přislíbila, že bude každý rok zvyšovat úrokovou sazbu o 0,1 procentuálního bodu. Jaká byla počáteční úroková sazba, kterou se vklad úročil v průběhu prvního roku? Uvažujeme jednoduché úročení.
[5 % p.a.]

Cvičení 9. Jak dlouho by musel mít pan Klíště u své banky uložených 20 000 Kč, aby na konci vyzvednul 39 125 Kč. Banka mu přislíbila, že bude každý rok zvyšovat úrokovou sazbu o 0,2 procentuálního bodu. Počáteční úroková sazba, kterou se vklad úročil v průběhu prvního roku byla 3 %. Uvažujeme jednoduché úročení.
[19 let 7měsíců 25 dní]

Cvičení 10. Jak dlouho by musel mít pan Klíště u své banky uložených 20 000 Kč, aby na konci vyzvednul 61 741,86984 Kč. Banka mu přislíbila, že bude každý rok zvyšovat úrokovou sazbu o 1 procento z přčedchozí sazby. Počáteční úroková sazba, kterou se vklad úročil v průběhu prvního roku byla 6 %. Uvažujeme jednoduché úročení.
[30 let]

Cvičení 11. Pan Klíště si u své banky uložil 200 000 Kč a plánuje si za 15 let vyzvednout sumu 274 395,6555 Kč. Banka mu přislíbila, že bude každý rok zvyšovat úrokovou sazbu o 3 procenta z předchozí úrokové míry. Jaká byla počáteční úroková sazba, kterou se vklad úročil v průběhu prvního roku? Uvažujeme jednoduché úročení.
[2 % p.a.]

1.2.2 Složené úročení

Logika složeného úročení vychází z proměnlivosti kapitálu, ze kterého je počítán úrok. Tato změna je dána již realizovaným úrokem, který klient „nespotřebuje“, ale přičte ho k počátečnímu kapitálu. V následujícím období tedy dochází k úročení úroků. Nechť FV_i značí budoucí hodnotu kapitálu v i-tém úrokovacím období a PV_i značí současnou hodnotu kapitálu v i-tém úrokovacím období. Pak platí

$$FV_1 = PV_1 + I = PV_1 + PV_1 \cdot r = PV_1(1 + r)$$

Pro druhé období položme $PV_2 = FV_1 = PV_1(1 + r)$. Tedy pak

$$\begin{aligned} FV_2 = PV_2 + I &= PV_2 + PV_2 \cdot r = PV_2(1 + r) \overset{PV_2=FV_1}{=} PV_1(1 + r)(1 + r) \\ &= PV_1(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Pro třetí období platí $PV_3 = FV_2 = PV_1(1 + r)^2$. Tedy pak

$$\begin{aligned} FV_3 = PV_3 + I &= PV_3 + PV_3 \cdot r = PV_3(1 + r) \overset{PV_3=FV_2}{=} PV_1(1 + r)^2(1 + r) \\ &= PV_1(1 + r)^3. \end{aligned}$$

Obecně pak pro n úrokovacích období platí

$$FV_n = PV_1(1 + r)^n.$$

Odtud dostáváme vzorec pro složené úročení

$$FV = PV(1 + r)^t, \tag{1.4}$$

kde PV značí počáteční vklad a FV hodnotu tohoto vkladu po čase t. Výraz $(1 + r)$ nazýváme *úrokovací faktor* nebo též *úročitel*. Je vidět, že budoucí hodnota kapitálu vykazuje exponenciální růst.

Příklad 2. Vypočtěte budoucí hodnotu z částky 43 000 Kč za 17 let, pokud víte, že banka poskytuje úrokovou sazbu 5,2 % p. a. a budeme předpokládat, že se tato sazba za celou dobu nezmění.

Řešení. *Pro výpočet použijeme vzorec* (1.4)*. Pak*

$$FV = 43000 \cdot (1 + 0,052)^{17} = 101797,2469.$$

Příklad 3. Jak dlouho musí ležet vklad ve výši 73 200 Kč na bankovním účtu, abyste získali od banky částku 107496,6678, při úrokové sazbě 3 % p.a.?

Řešení. *Ze vzorce (1.4) si vyjádříme čas t. Tedy*

$$\begin{aligned} FV &= PV(1+r)^t \\ \frac{FV}{PV} &= (1+r)^t \\ \ln\left(\frac{FV}{PV}\right) &= \ln\left[(1+r)^t\right] \\ \ln(FV) - \ln(PV) &= t\ln(1+r) \\ t &= \frac{\ln(FV) - \ln(PV)}{\ln(1+r)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dosadíme a dostáváme výsledek

$$t = \frac{\ln(107496,6678) - \ln(73200)}{\ln(1,03)} = 13.$$

Někdy se také můžeme setkat se zvláštním případem úročení, kdy se úroková míra mění dle daného algoritmu. Jedná se například o situaci, kdy se úroková míra řídí zákonitostmi aritmetické řady nebo geometrické řady. Na takový případ je pak možné se dívat jako na součet lineárních úročení. Blíže viz *akumulační faktor*.

Příklad 4. Uvažujme peněžní vklad na bankovním účtu ve výši 2 000 Kč. Banka připisuje úrok každý měsíc a po každém připsání úroku se úroková sazba zvýší o 0,1 procentního bodu. Kolik bude činit FV za jeden rok? Výchozí úroková sazba činí 0,5 % p.m.

Řešení. *Při řešení tohoto příkladu je nutné počáteční vklad postupně úročit po dobu dvanácti úrokovacích období. Tedy*

$$\begin{aligned} FV &= 2000 \cdot (1+0,005) \cdot (1+0,005+0,001) \cdot (1+0,005+2\cdot 0,001) \\ &\cdots \ (1+0,005+11\cdot 0,001) = 2266,92. \end{aligned}$$

V případě, že nás bude zajímat pouze výše úrokové míry za určitou dobu, můžeme k jejímu výpočtu využít vlastnosti aritmetické řady.

Příklad 5. Zjistěte výši úroku, kterou získáme z částky 2000 Kč, pokud ji do banky vložíme na začátku dvanáctého měsíce a po měsíci ji vybereme. Banka připisuje úrok každý měsíc a po každém připsání úroku se úroková sazba zvýší o 0,1 procentního bodu. Výchozí úroková sazba v prvním měsíci činí 0,5

Řešení. *Abychom byli schopni vypočíst úrok z částky 2 000 Kč vložených na začátku dvanáctého měsíce, je nutné nejdříve určit úrokovou míru platnou v tomto období. Tedy*

$$r_{12} = 0,005 + 11 \cdot 0,001 = 0,016.$$

Pak výši úroku z částky 2 000 Kč vložených na začátku dvanáctého měsíce určíme jako

$$I_{12} = 2000 \cdot 0,016 = 32.$$

Pro srovnání s výsledkem příkladu 4 uveďme podobný příklad, ale uvažujme jednoduché úročení.

Příklad 6. Uvažujme peněžní vklad na bankovním účtu ve výši 2 000 Kč. Úroková sazba se zvýší o 0,1 procentního bodu na konci každého měsíce. Kolik bude činit FV za jeden rok, budeme-li uvažovat jednoduché úročení? Výchozí úroková sazba činí 0,5 % p.m.

Řešení. *Rozepišme si jak bude vypadat FV. Tedy*

$$\begin{aligned} FV &= 2000 + I_1 + I_2 + \ldots + I_{12} \\ &= 2000 + 2000 \cdot 0,005 + 2000 \cdot 0,006 + \ldots + 2000 \cdot 0,0016. \end{aligned}$$

Vidíme, že rostoucí úroky tvoří aritmetickou řadu. Je tedy možné je sečíst. Pak

$$\begin{aligned} FV &= 2000 + 2000 \cdot (0,005 + 0,006 + \ldots + 0,016) \\ &= 2000 + 2000 \cdot \frac{12}{2} \cdot (0,005 + 0,016) \\ &= 2252. \end{aligned}$$

Vidíme, že při jednoduché formě úročení dosáhneme na menší konečnou hodnotu kapitálu při zachování růstu úrokové sazby. Je to dáno právě efektem úroku z již realizovaných úroků u úročení složeného.

Analogicky bude vypadat situace při geometrickém růstu úrokové sazby.

Příklad 7. Kolik bude činit FV za rok, pokud se úroková sazba po každém připsání navýší o 10 % z její aktuální hodnoty? Počáteční úroková míra činí 0,5 % p.m.?

Řešení. *Rozepišme si, jak bude vypadat FV:*

$$\begin{aligned} FV &= 2000 \cdot (1 + 0,005) \cdot (1 + 0,005 \cdot 1,1) \cdot (1 + 0,005 \cdot 1,1^2) \\ &\cdots (1 + 0,005 \cdot 1,1^{11}) = 2266,89. \end{aligned}$$

Obecně by bylo možné vzorec zadefinovat prostřednictvím růstového faktoru g % takto:

$$FV = PV \cdot (1 + r) \cdot [1 + r \cdot (1 + g)] \cdot [1 + r \cdot (1 + g)^2] \ldots [1 + r \cdot (1 + g)^{n-1}]$$

Uveďme si ještě výpočet výše úroku.

Příklad 8. Zjistěte výši úroku, kterou získáme z částky 2 000 Kč, pokud ji do banky vložíme na začátku dvanáctého měsíce a po měsíci ji vybereme. Banka připisuje úrok každý měsíc a po každém připsání úroku se úroková sazba zvýší o 10 % z její aktuální hodnoty. Výchozí úroková sazba v prvním měsíci činí 0,5 % p.m.

Řešení. *Nejprve vypočteme výši úrokové míry, kterou banka úročí vklady ve dvanáctém měsíci. Tedy*

$$r_{12} = 0,005 \cdot 1,1^{11} = 0,14266.$$

Pak výše úroku za 12. měsíc bude

$$I_{12} = 2000 \cdot 0,14266 = 28,5317.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 12. Otec založil své dceři termínovaný vklad k jejím 3. narozeninám. Na účet vložil 10 000 Kč. Úroková sazba byla 5 % p.a. prvních 5 let, 6 % p.a. dalších 5 let a 7 % p.a. posledních 5 let. Jaká byla hodnota účtu, když dceři bylo 18 let a účet jí byl vyplacen.
[23 954,92 Kč]

Cvičení 13. Jak dlouho (v celých letech) musí být peníze uložené v bance při sazbě 3,6 % p.a., aby se celkové zhodnocení rovnalo zhodnocení při 6,3 % p.a. na 16 let? Úrokové období je jeden rok.
[27,64 = 28 let]

Cvičení 14. Investor investoval 100 000 Kč na dobu 8 let. Po uplynutí této doby byl výnos z investice 50 000 Kč. Jaká byla roční průměrná výnosnost investice? Jak se změní, pokud platíme 1 000 Kč vstupní poplatek a stejnou sumu na konci jako výstupní poplatek? Jaká bude výnosnost, jestliže budeme platit navíc i roční poplatky 100 Kč (na začátku roku)? Všechny poplatky se strhávají z vkladu, čili žádné dodatečné prostředky nevkládáme.
[5,1989506 %; 4,9782 %; 4,8879 %]

Cvičení 15. Karel propadl poutavé reklamě na spotřební úvěr na nákup nové televize. Televize stála 30 000 Kč. Úvěr je úročen sazbou 15 % p.a. se splatností 4 roky (jednou splátkou). Poplatek za sjednání úvěru byl 2000 Kč a roční poplatek byl 800 Kč (na konci roku). Poplatky se připisují k dluhu. Určete roční průměrnou sazbu nákladů tohoto úvěru.
[18,9 %]

1.2.3 Kombinované úročení

Vztah složeného a jednoduchého úročení hraje významnou roli ve vztahu k úrokovacímu období. Již z charakteru výpočtů obou přístupů je patrno, kdy bude výhodnější využít jeden či druhý způsob úročení. Zjednodušeně lze říci, že pokud $t < UO$, pak bude pro věřitele vždy výhodnější využít lineární způsob úročení (jednoduché úročení). Naproti tomu bude-li platit $t > UO$, pak bude pro věřitele prospěšnější využít efektu úroku z úroků, tedy exponenciální úročení (složené úročení). Následující obrázek názorně definuje vztah jednoduchého a složeného úročení.

Bude-li počítán úrok za časové období, které přesahuje délku úrokovacího období, bude pro věřitele vždy výhodnější použít složeného úročení. Podíváme-li se na tuto problematiku blíže, pak situace, kterou jsme si na předchozím obrázku znázornili nebude platit pouze pro první úrokovací období, ale bude platná pro všechna úrokovací období. To znamená, že výhoda jednoduchého úročení nad složeným bude vždy v průběhu jednoho úrokovacího období. Tedy pokud $\frac{t}{UO} \notin \mathbb{Z}^+$ bude pro výpočet výše úroku v posledním UO výhodnější použít jednoduché úročení, neboť takto dosáhne věřitel na vyšší odměnu za svůj kapitál.

Nyní si zavedeme obecný vzorec pro výpočet hodnoty FV při kombinovaném úročení:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n \cdot (1 + r \cdot K), \tag{1.6}$$

kde platí $t = n + K$ a n je celočíselný násobek úrokovacího období a K pak necelý zbytek $(K < UO)$.

Kombinací jednoduchého a složeného úročení může věřitel maximalizovat svůj užitek. Tato maximalizace užitku může nabýt tří forem:

- výše úroků,
- požadované FV může být dosaženo s nižším vstupním kapitálem,
- za předpokladu dané PV a FV stačí vklad úročit po kratší časové období.

Uvedené výhody si můžeme demonstrovat na příkladech.

Příklad 9. Jaká je budoucí hodnota počátečního vkladu 11 000 Kč za dobu 5 let a 3 měsíce, pokud banka garantuje 3 % p. a.? Srovnejte využití kombinovaného a složeného úročení.

Řešení. *Kombinované úročení:*
Výpočet provedeme na základě vzorce (1.6), kde $n = 5$ *a* $K = \frac{3}{12}$. *Tedy*

$$FV = 11000 \cdot (1 + 0,03)^5 \cdot \left(1 + 0,03 \cdot \frac{3}{12}\right) = 12847,6549.$$

Složené úročení:
Výpočet provedeme na základě vzorce (1.4), kde $t = 5,25$. *Tedy*

$$FV = 11000 \cdot (1 + 0,03)^{5,25} = 12846,5975.$$

Příklad 10. Kolik potřebujeme vložit na bankovní účet, abychom za 4,5 let dosáhli na částku 25 000 Kč? Víme, že banka počítá s úrokovou sazbou 7 % p.a. Srovnejte využití kombinovaného a složeného úročení.

Řešení. *Kombinované úročení:*
Výpočet provedeme na základě vzorce (1.6), kde $n = 4$ *a* $K = \frac{1}{2}$. *Tedy*

$$PV = \frac{25000}{(1 + 0,07)^4 \cdot (1 + 0,07 \cdot \frac{1}{2})} = 18427,4206.$$

Složené úročení:
Výpočet provedeme na základě vzorce (1.4), kde $t = 4,5$. *Tedy*

$$PV = \frac{25000}{(1 + 0,07)^{4,5}} = 18437,966.$$

Vidíme, že pro dosažení stejné výše kapitálu za danou dobu potřebujeme v případě kombinovaného úročení méně prostředků.

Nyní si ukážeme, jak postupovat při určování doby úročení za předpokladu maximalizace užitku. Stejně jako v případě hledání počtu úrokových období u složeného úročení využijeme k výpočtu logaritmus. Pokud výsledná hodnota hledané neznámé není celé číslo znamená to, že počet úrokových období bude výsledné celé číslo + 1. Dále pokračujeme zápisem rovnice, kdy použijeme PV a FV. Vstupní kapitál úročíme složeným úročením na počet celých úrokových období. Zbylou část vynásobíme výrazem pro jednoduché úročení. Uvedený postup si demonstrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 11. Jak dlouho musíme čekat, abychom získali částku 135 000 Kč, pokud vložíme na bankovní účet vklad 105 000 Kč. Dále víme, že úroková sazba, kterou banka po celou dobu garantuje činí 2,1 % p. s.

Řešení. *Nejdříve ze vzorce* (1.4) *vyjádříme čas* t*. Tedy*

$$
\begin{aligned}
FV &= PV \cdot (1+r)^t \\
t &= \frac{\ln(FV) - \ln(PV)}{\ln(1+r)} \\
t &= \frac{\ln(135000) - \ln(105000)}{\ln(1,021)} = 12,0926.
\end{aligned}
$$

Z prvního kroku výpočtu je patrné, že se částka musí úročit déle než 12 pololetí[1]*. Necelá část úrokovacího období* K *bude menší než 1. O počtu celých úrokovacích období informuje číslo před desetinou čárkou. Ve druhém kroku tedy dopočítáme necelou část období* K*, po kterou se vklad bude úročit jednoduchým úročením. Využijeme vzorec* (1.6)*, kde položíme* $n = 12$*. Tedy*

$$
\begin{aligned}
135000 &= 105000 \cdot (1+0,021)^{12} \cdot (1+0,021 \cdot K) \\
1 + 0,021 \cdot K &= \frac{135000}{105000 \cdot (1+0,021)^{12}} \\
K &= \frac{\frac{135}{105 \cdot (1+0,021)^{12}} - 1}{0,021} \\
K &= 0,09170524 \textit{ pololetí.}
\end{aligned}
$$

Pokud K *vyjádříme ve dnech, budeme tedy uvažovat že úrokové období je 1 pololetí což se rovná 180dní, dostáváme*

$$
0,09170524 \cdot 180 = 16,5 \textit{ dne.}
$$

V tomto případě dny zaokrouhlujeme směrem nahoru, tedy pokud chceme z částky 105 000 Kč za daných podmínek získat 135 000 Kč musíme čekat 6 let a 17 dnů.

Příklady k procvičení

Cvičení 16. Zodpovědný bankovní úředník Světýlko poradil mladému perspektivnímu páru, jak investovat svých 60 000 Kč. Peníze mají uložit na 6 let 6 měsíců a 6 dní. Úroková sazba v bance činí 6 % p. a. při ročním úročení. Kolik budou mít na účtu po stanovené době za předpokladu, že jim bankovní úředník Světýlko vybral nejlepší možnou kombinaci úročení (neuvažujeme spojité úročení).
[87 749,59 Kč]

[1] UO= 6 měsíců, kterým odpovídá úroková sazba 2,1%.

Cvičení 17. Za jakou nejkratší dobu dosáhneme na účtu sumu 100 000 Kč, jestli jsme na počátku vložili sumu 60 000 Kč? Banka nám poskytuje roční úročení vkladů při sazbě 6 % p.a. (neuvažujeme spojité úročení).
[8 let 9 měsíců 5 dní]

1.2.4 Nominální a efektivní úroková míra

Výše jsme si uváděli r jako úrokovou míru, která se může vztahovat k období kratšímu než je úrokovací období. Jestliže je úroková sazba přiřazena k úrokovacímu období délky jedna, říkáme, že se jedná o *efektivní úrokovou sazbu.* V případě, že bude udána úroková sazba na nějaký časový interval, ale úrokovací období bude kratší než tento interval, pak úrokovou sazbu pro daný časový interval budeme označovat jako *nominální úrokovou sazbu.* Počet úrokovacích období během časového intervalu, pro který je dána nominální úroková sazba, se nazývá počtem konverzí. Pro snazší identifikaci zaveďme označení nominální úrokové míry s počtem konverzí m (r_m), kdy $m \geq 1$. Jak již bylo zmíněno na začátku této kapitoly pro $m = 1$ je nominální úroková sazba rovněž efektivní úrokovou mírou. Výše úrokové sazby determinovaná počtem konverzí nominální úrokové sazby vychází z následujícího vztahu:

$$r = \frac{r_m}{m}. \tag{1.7}$$

Uvažujme m konverzí nominální úrokové míry a n časových intervalů, pro něž je dána nominální úroková sazba. Pak vzorec pro FV bude mít následující tvar:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{n \cdot m}. \tag{1.8}$$

Z rovnice je možné vyjádřit ostatní proměnné. Tedy

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{n \cdot m}}, \tag{1.9}$$

$$r_m = m\left(\sqrt[n \cdot m]{\frac{FV}{PV}} - 1\right), \tag{1.10}$$

$$n = \frac{\ln FV - \ln PV}{m \ln\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)}. \tag{1.11}$$

Příklad 12. Roční nominální úroková sazba činí 4 %. Do banky uložíme částku 1 000 000 Kč. Vypočtěte

a) jakou částku vybereme po jednom roce, bude-li banka úročit jedenkrát do roka.

b) jakou částku vybereme po jednom roce, bud-li banka připisovat úrok každé čtvrtletí.

c) jakou částku vybereme po deseti letech, bude-li banka úročit jedenkrát do roka.

d) jakou částku vybereme po deseti letech, bud-li banka připisovat úrok každé čtvrtletí.

Řešení. *V příkladech a)-d) se liší délka úrokovacího období a doba, po níž jsou peníze v bance uloženy. Podívejme se, jak tyto podmínky ovlivní částku, kterou si z banky vybereme.*

ad a) *Zde máme* $PV = 1000000$, $m = 1 = n$, $r_m = 4\% = r$. *Tedy podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot (1 + 0,04) = 1040000.$$

ad b) *Zde máme* $PV = 1000000$, $m = 4$, $n = 1$, $r_m = 4\%$. *Tedy podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^4 = 1040604,01.$$

Všimněme si, že pro klienta je častější úročení výhodnější.

ad c) *Zde máme* $PV = 1000000$, $m = 1$, $n = 10$, $r_m = 4\%$. *Tedy podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot (1 + 0,04)^{10} = 1480244,28.$$

ad d) *Zde máme* $PV = 1000000$, $m = 4$, $n = 10$, $r_m = 4\%$. *Tedy podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{40} = 1488864,73.$$

Pokud bychom chtěli určit dopad konverzí na budoucí hodnotu jednotkového kapitálu, můžeme k tomu využít ekvivalentní *efektivní úrokovou sazbu* r_e. Platí následující vztah:

$$(1 + r_e) = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m. \qquad (1.12)$$

Odtud dostáváme

$$r_e = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m - 1. \tag{1.13}$$

Analogicky lze vyjádřit

$$r_m = m\left(\sqrt[m]{1 + r_e} - 1\right). \tag{1.14}$$

Reálná situace často vyžaduje variabilitu úrokové míry v čase. Pro tento účel si zavedeme *úrokový akumulační faktor* $A(0,n)$, kde 0 značí počátek sledovaného období a n konec sledovaného období. Můžeme uvažovat až n variant úrokové sazby. Při jednotkovém vstupním kapitálu můžeme vyjádřit $A(0,n)$ následovně:

$$A(0,n) = (1 + r_{0,1}) \cdot (1 + r_{1,2}) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{n-1,n}), \tag{1.15}$$

kde symbolem $r_{i,i+1}$ značíme úrokovou sazbu platnou v období od i do $i+1$, kde $i = 0, 1, ..., n-1$[2].

Pokud chceme vyjádřit úrokový efekt $A(0,n)$ jedním připsáním úroků, využijeme k tomu efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá časovému intervalu $\langle 0, n\rangle$. Z tohoto pohledu pak efektivní úroková míra představuje přírůstek jednotkového kapitálu za zvolený interval, v tomto případě n. Můžeme tedy zapsat:

$$(1 + r_{0,1}) \cdot (1 + r_{1,2}) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{n-1,n}) = 1 + r_e.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 18. Spočítejte roční efektivní úrokovou míru pro sazbu 8 % p.a. jestliže je úročení

- pololetní,
- čtvrtletní,
- měsíční,
- týdenní (předpokládáme, že měsíc má 4 týdny),
- denní (rok má 360 dní),
- hodinové,
- minutové,

[2] Bude-li pro všechna $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ platit $r_{i,i+1} = r$, pak platí $A(0,n) = (1+r)^n$.

- sekundové.

[8,16 %; 8,2432 %; 8,3215 %; 8,3277 %; 8,3287 %; 8,3287061 %; 8,3287064 %]

Cvičení 19. Máte k dispozici dvě investice. První vám přináší výnos 2 % p.m. při měsíčním úročení a druhá 12,3 % p.s. při pololetním úročení. Na základě efektivní úrokové míry určete, která z možností je lepší. Jaká by musela být výše druhé úrokové sazby (vyjádřeno jako p.s.), aby přinášela stejný výnos jako první úroková sazba?
[první, 0,268242 > 0,261129; 12,616242 %]

1.2.5 Úroková intenzita a spojité úročení

Do tohoto okamžiku jsme si představili v procesu úročení s ohledem na čas pouze diskrétní případy. Rovněž jsme si ukázali efekt úrokového období při dané nominální úrokové míře. Pokud bychom v dělení časových intervalů pokračovali, mohli bychom pozorovat tendenci růstu FV společně se zkracujícím se úrokovým obdobím. Tento jev si demonstrujeme na příkladě.

Příklad 13. Opět uvažujme případ, kdy banka vklady úročí 4 % roční nominální úrokovou mírou. Do banky si na rok uložíme částku 1 000 000 Kč. Zjistěte dopad na FV, bude-li banka úrok připisovat

a) každý měsíc,

b) každý týden (uvažujme 4 týdny v měsíci),

c) každý den (uvažujme 360 dní v roce).

Řešení. *ad a) Zde je* $PV = 1000000$, $m = 12$, $n = 1$, $r_m = 0,04$. *Pak podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12} = 1040741,54.$$

ad b) Zde je $PV = 1000000$, $m = 48$, $n = 1$, $r_m = 0,04$. *Pak podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{48}\right)^{48} = 1040793,44.$$

ad c) Zde je $PV = 1000000$, $m = 360$, $n = 1$, $r_m = 0,04$. *Pak podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{360}\right)^{360} = 1040808,46.$$

Obecně platí, že pokud budeme zkracovat intervaly mezi připisováním úroků, tedy m se bude blížit nekonečnu, $m \to \infty$, dostaneme *spojité úročení.* Víme že

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e}. \tag{1.16}$$

Pak tedy platí

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r_m}}\right)^{\frac{m}{r_m}\cdot r_m} = \mathrm{e}^{r_m}. \tag{1.17}$$

Příklad 14. Opět uvažujme případ, kdy banka vklady úročí 4% roční nominální úrokovou mírou. Do banky si na rok uložíme částku 1 000 000 Kč. Zjistěte dopad na FV, bude-li banka úrok připisovat

a) každou hodinu,

b) spojitě.

Řešení. *ad a) Zde je* $PV = 1000000$*,* $m = 360\cdot 24$*,* $n = 1$*,* $r_m = 0,04$*. Pak podle vzorce* (1.8) *dostáváme*

$$FV = 1000000\cdot\left(1+\frac{0,04}{360\cdot 24}\right)^{360\cdot 24} = 1040810,68.$$

ad b) Zde je $PV = 1000000$*,* $m \to \infty$ $n = 1$*,* $r_m = 0,04$*. Pak podle vzorce* (1.17) *dostáváme*

$$FV = 1000000\cdot \mathrm{e}^{0,04} = 1040810,77.$$

Vidíme, že pokud uvažujeme hodinové připisování úroků je výsledek velmi blízky spojitému úročení. Pro ilustraci důležitosti UO se vraťme k výsledku, kdy $UO = 1$ rok.

Pokud bychom chtěli stejně jako v případě efektivní úrokové míry dosáhnout stejného úrokového efektu jak při diskrétní tak při spojité formě úročení, využili bychom k tomu tzv. *úrokovou intenzitu* f. Platí

$$\mathrm{e}^f = 1 + r_e,$$

odtud pak dostáváme

$$f = \ln(1 + r_e). \tag{1.18}$$

Na základě rovnosti (1.12) dostáváme

$$f = \ln\left(1+\frac{r_m}{m}\right)^m. \tag{1.19}$$

Pak budoucí hodnotu vloženého kapitálu za n period spočítáme podle vzorce

$$FV = PV \cdot \mathrm{e}^{f \cdot n}. \tag{1.20}$$

Pro současnou hodnotu PV pak platí

$$PV = \frac{FV}{\mathrm{e}^{f \cdot n}}. \tag{1.21}$$

Příklady k procvičení

Cvičení 20. Určete, na kolik se zhodnotí účet o hodnotě 60 000 Kč při úrokové intenzitě 5,80 %, když budou peníze ležet na účtu 500 dní při spojitém úročení. Určete jaká je roční efektivní úroková sazba.
[65 033,34; 5,97 %]

Cvičení 21. Na účet jste vložili 40 000 Kč. Za 7 let jste vložili dalších 40 000 Kč. Po dalších 7 letech jste vybrali 80 000 Kč. Na účtu vám zbylo 80 000 Kč. Účet byl úročen spojitě. Jaká byla výška úrokové intenzity.
[0,063669]

Cvičení 22. Uvažujeme účet A s ročním úročením se sazbou 12 % a účet B spojitě úročen s intenzitou 12 %. Za jak dlouho bude na účtu B dva krát tolik prostředků jako na účtu A. Na oba jsme na začátku vložili stejné množství peněz? Jak se výsledek změní, když zohledníte jenom reálny stav na účtu a nezapočítáte úroky, na které máme nárok, ale budou připsány až na konci úrokového období? (druhou část řešte pomocí Excelu)
[103,9 let; 86,995 let resp. těsně před koncem 87 roku]

1.2.6 Časová ekvivalence kapitálu

V praxi člověk musí vyřešit časový nesoulad mezi finančními toky. Znamená to potřebu porovnávat velikost kapitálu k různým časovým okamžikům. V této souvislosti se často setkáváme také s termínem *časová hodnota peněz.* Můžeme říci, že finanční toky v různém čase jsou ekvivalentní, pokud vztaženy ke stejnému datu jsou jejich hodnoty kapitálu stejné. Tento princip byl definován již v úvodu do jednoduchého úrokování, kdy jsme porovnávali vstupní hodnotu kapitálu s konečnou hodnotou kapitálu. Obecně je však toto porovnání možné realizovat v jakémkoli časovém okamžiku.

Příklad 15. Porovnejte, která z nabízených variant je pro dlužníka nejvýhodnější:

a) zaplatit okamžitě částku 47 000 Kč,

b) zaplatit za 2 roky částku 52 310 Kč,

c) zaplatit za 5 let částku 69 058 Kč.

Uvažujme alternativní náklady použití kapitálu ve výši 7 % p.a.

Řešení. *Aby bylo možné jednotlivé varianty porovnat, je potřeba přepočítat jejich hodnotu ke stejnému datu. Můžeme např. vypočítat současnou hodnotu všech tří případů. Tedy*

ad a) Zde je zadána přímo současná hodnota. Tedy $PV_a = 47000$.

ad b) Zde platí $n = 2$, $FV_b = 52310$, $r = 0,07$. *Dopočítáme*

$$PV_b = \frac{FV_b}{(1+0,07)^2} = 45689,58.$$

ad c) Zde platí $n = 5$, $FV_c = 69058$, $r = 0,07$. *Dopočítáme*

$$PV_c = \frac{FV_c}{(1+0,07)^5} = 49237,4.$$

Porovnáme-li výsledky, vidíme, že nejmenší je PV_b. *Je tedy pro dlužníka nejvýhodnější.*

1.2.7 Nominální a reálný úrok

Cenová hladina je jeden z faktorů, který se zobrazuje, resp. měl by být zachycen v ceně kapitálu. Do této chvíle jsme však pohyb cenové hladiny v procesu úročení neuvažovali. Nyní se na tuto problematiku zaměříme. Dále uvažujme růst cenové hladiny, tedy zaměříme se na inflaci. Nicméně v případě deflace, poklesu cenové hladiny, bude snadné z následujícího schématu odvodit postup výpočtu.

Inflace, budeme značit π, kapitál znehodnocuje. Stejným způsobem jako u kapitálu působí rovněž na připisované úroky. Pokud bychom se na inflaci dívali z pohledu výpočtu budoucí hodnoty, můžeme inflaci chápat jako inverzní úročení. Díky růstu cenové hladiny bude možné za stejnou výši kapitálu v budoucnu nakoupit méně zboží a služeb. Pokud bychom tedy abstrahovali úrok, stejná výše kapitálu bude v budoucnu v reálném vyjádření nižší.

Budeme-li uvažovat vliv inflace, pak nutně platí, že

$$PV_{t=0}(real) > PV_{t=1}(real),$$

kde $PV_{t=i}(real)$ značí současnou reálnou hodnotu kapitálu v časovém okamžiku i. Přitom platí, že

$$PV_{t=1}(real) = \frac{PV_{t=0}(real)}{(1+\pi)}.$$

Budeme-li uvažovat také nominální úrokovou míru r, pak pro budoucí reálnou hodnotu kapitálu FV_r za jedno období platí

$$FV_r = \frac{PV(1+r)}{1+\pi}.$$

Budeme-li uvažovat reálnou úrokovou míru r_r, pak zřejmě platí

$$1 + r_r = \frac{1+r}{1+\pi}.$$

Odtud je možné vyjádřit nominální úrokovou míru r jako

$$r = r_r + \pi + r_r \cdot \pi. \tag{1.22}$$

Tato rovnice se označuje jako *Fisherova rovnice.*

Předchozí úvahy se vztahovaly pouze k jedné časové periodě. Tento problém je možné zobecnit na různou délku úrokového nebo inflačního období. K připisování úroku také může docházet několikrát za inflační období. Obecně tedy pro budoucí reálnou hodnotu kapitálu FV_r platí vzorec

$$FV_r = \frac{PV(1+\frac{r_m}{m})^{m \cdot n}}{(1+\pi)^{m_* \cdot n}}, \tag{1.23}$$

kde m_* označuje četnost inflačních období na jedno období pro něž platí nominální úroková míra.

Příklad 16. Určete reálnou hodnotu kapitálu za dva roky jestliže jeho současná hodnota je 100 000 Kč. Prostředky vložíme na bankovní účet s roční nominální úrokovou sazbou ve výši 3,5 %. Banka úročí vložené prostředky měsíčně. Odhadovaná kvartální výše inflace na následující dva roky činí 0,5 %.

Řešení. *Podle vzorce* (1.23) *vypočteme*

$$FV_r = \frac{100000(1+\frac{0{,}035}{12})^{12 \cdot 2}}{(1+0,005)^{4 \cdot 2}} = 103045,2.$$

Budeme-li uvažovat inflaci v případě spojitého úročení, je třeba zmínit pojem *inflační intenzita*, kterou si označíme jako f_π. Platí

$$f_\pi = \ln(1 + \pi). \tag{1.24}$$

Reálnou hodnotu kapitálu pak vypočteme jako

$$FV_r = PV \cdot \mathrm{e}^{f - f_\pi}. \tag{1.25}$$

Příklad 17. Jaká bude reálná hodnota kapitálu za 4 roky, pokud uvažujeme, že banka garantuje pololetní připisování úroků s roční úrokovou sazbou ve výši 3,7 %. Dále víme, že odhadovaná inflace na následující roky bude 1. rok 1,7 %, 2. rok 2,3 %, 3. rok 4 % a 4. rok 3,2 %. Počáteční vklad na bankovní účet bude 30 000 Kč.

Řešení. *Dosadíme-li za* $PV = 30000$, $r_m = 0,037$, $m = 2$, *pak*

$$FV_r = \frac{30000 \cdot (1 + \frac{0,037}{2})^{2 \cdot 4}}{(1 + 0,017)(1 + 0,023)(1 + 0,04)(1 + 0,032)} = 31109,9919.$$

Příklad je možné řešit také jako spojitý proces: Nejprve podle vzorce (1.13) *vypočteme efektivní úrokovou míru*

$$r_e = \left(1 + \frac{0,037}{2}\right)^{2 \cdot 4} - 1 = 0,157946.$$

Nyní dopočítáme podle vzorce (1.18) *úrokovou intenzitu*

$$f = \ln(1 + 0,157946) = 0,146648.$$

Podobně jako se počítá efektivní úroková míra, dá se dopočítat efektivní inflace π_e. *Tedy*

$$\pi_e = (1 + 0,017) \cdot (1 + 0,023) \cdot (1 + 0,04) \cdot (1 + 0,032) - 1 = 0,116631.$$

Nyní dopočítáme inflační intenzitu

$$f_\pi = ln(1 + 0,116631) = 0,11032.$$

Nyní již můžeme vypočítat budoucí reálnou hodnotu kapitálu podle vzorce (1.25)

$$FV_r = 30000 \cdot \mathrm{e}^{0,146648 - 0,116631} = 31109,9919.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 23. Během hyperinflace vaše rodina hladoví. Rozhodnete se prodat auto, abyste měli na jídlo. Cena auta je 400 000 Kč. Cena chleba v době prodeje auta je 32 Kč. Peníze můžete uložit při sazbě 100 % p.a. Inflace je 270 000 % p.a. Určete kolik chlebů si můžete koupit

a) za 1 měsíc,

b) za 3 měsíce,

c) za rok,

pokud uložíte všechny prostředky z prodeje auta.
[59; 23; 9]

Cvičení 24. Máte v plánu koupit do pěti let stavební pozemek, který má k dnešnímu dni cenu 1 milión Kč. Můžete ho koupit hned nebo peníze uložit na účet úročený měsíčně sazbou 3 % p.a. Stála roční inflace je 3,1 % p.a. Vyplatí se pozemek koupit hned, nebo čekat a vydělat na úrocích? Jak by se situace změnila, kdyby byla inflace v prvním roce 3,2 % p.a., v druhém roce 3,3 % p.a., v třetím roce 2,8 %, ve čtvrtém 2,9 % a v pátém 2,7 % p.a.?
[pozemek koupit hned, reálná hodnota peněz za 5 let by byla jenom 997 170,80 Kč; vyplatí se prodat za 5 let, na úrocích vyděláme reálně 3 006, 92 Kč]

Cvičení 25. Vlastníte účet úročený spojitě s roční efektivní úrokovou sazbou 5,1 %. Vklad činí 300 000 Kč. Banka nabízí dvě alternativy pro zabezpečení účtu proti inflačnímu růstu. Buď bude zvyšovat úrokovou míru každý rok o 0,1 procentního bodu, nebo o 2 % oproti úrokové sazbě z předešlého roku. Kterou alternativu zvolíte? Jaká je reálna hodnota účtu, jestli předpokládáme stálou intenzitu inflace 3 % a volbu lepší z dvou variant pro zvyšování úrokové sazby?
[druhou (nominální hodnota účtu je 3770,52 Kč vyšší); 556 244,77 Kč]

1.2.8 Problematika zdanění

Úroky, stejně jako jiné příjmy, zpravidla podléhají dani (*tax*). Ta se někdy označuje také jako *srážková daň*. U daňových plateb je nutné, stejně jako u procesu úročení či výpočtu vlivu inflace, stanovit časový interval za který se daň určuje. Dobu určenou k výpočtu daňové povinnosti budeme značit jako *daňové období DO*. A pro zjednodušení budeme výraz $(1 - tax)$, který představuje zůstatek po zdanění, označovat jako k.

Můžeme identifikovat tři přístupy s ohledem na DO:

1. daň je splatná v okamžiku připsání úroků. V tomto případě nastává situace $DO = UO$.

2. k jistině je připočítán několikrát úrok (úrok z úroku) a následně bude provedeno zdanění. Tedy platí $DO > UO \wedge DO < T$.

3. zdanění je provedeno jednorázově v době výběru prostředků z bankovního účtu. Tedy $DO = T$.

Nyní si uvedeme několik názorných příkladů na nichž si odvodíme vzorce, které se při zdanění využívají.

Příklad 18. Jakou částku obdržíme za čtyři roky z částky 7 000 Kč, pokud banka garantuje po celou dobu úrokovou sazbu 4,7 % p. a. a úročí jedenkrát ročně? Připsaný úrok podléhá dani z příjmů. Srážková daň je splatná ročně. Daňová sazba činí 15 %.

Řešení. *Víme, že* $PV = 7000$, $r = 0,047$, $tax = 0,15$ *(*$k = 0,85$*). Rozepišme si, jak situace vypadá v jednotlivých letech.*
Situace na konci 1. roku:

$$\begin{aligned} FV_1 &= 7000 + 7000 \cdot 0,047 - 7000 \cdot 0,047 \cdot 0,15 \\ &= 7000 \cdot (1 + 0,047 \cdot 0,85) = 7279,65. \end{aligned}$$

Situace na konci 2. roku:

$$\begin{aligned} FV_2 &= 7279,65 + 7279,65 \cdot 0,047 - 7279,65 \cdot 0,047 \cdot 0,15 \\ &= 7279,65 \cdot (1 + 0,047 \cdot 0,85) = 7570,47. \end{aligned}$$

Situace na konci 3. roku:

$$\begin{aligned} FV_3 &= 7570,47 + 7570,47 \cdot 0,047 - 7570,47 \cdot 0,047 \cdot 0,15 \\ &= 7570,47 \cdot (1 + 0,047 \cdot 0,85) = 7872,91. \end{aligned}$$

Situace na konci 4. roku:

$$\begin{aligned} FV_4 &= 7872,91 + 7872,91 \cdot 0,047 - 7872,91 \cdot 0,047 \cdot 0,15 \\ &= 7872,91 \cdot (1 + 0,047 \cdot 0,85) = 8187,44. \end{aligned}$$

Pokusme se nyní situaci z příkladu zobecnit:

$$
\begin{aligned}
FV_1 &= PV + PV \cdot r - PV \cdot r \cdot tax = PV[1 + r \cdot (1 - tax)] = PV[1 + rk] \\
FV_2 &= PV[1 + r \cdot (1 - tax)] + PV[1 + r \cdot (1 - tax)] \cdot r \\
&- PV[1 + r \cdot (1 - tax)] \cdot r \cdot tax \\
&= PV[1 + r \cdot (1 - tax)][1 + r \cdot (1 - tax)] \\
&= PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^2 = PV[1 + rk]^2 \\
FV_3 &= PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^2 + PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^2 \cdot r \\
&- PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^2 \cdot r \cdot tax \\
&= PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^2[1 + r \cdot (1 - tax)] \\
&= PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^3 = PV[1 + rk]^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Odtud je patrné, že pro n daňových období, za podmínky $DO = UO$, bude platit

$$FV_n = PV[1 + r \cdot (1 - tax)]^n = PV[1 + rk]^n. \tag{1.26}$$

Nyní si ukážeme, jak řešit zdanění v případě, že $DO > UO$ a zároveň $T > DO$. Pro výpočet daňové srážky je nutné separovat jistinu a připsané úroky, protože daň se vztahuje pouze na připsané úroky a již jednou zdaněné úroky nepodléhají opětovnému zdanění. Odvodíme obecný zápis:

$$
\begin{aligned}
FV_1 &= \left[PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - PV\right]k + PV \\
&= PV\left[\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right)k + 1\right] \\
FV_2 &= PV\left[\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right)k + 1\right]\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right]k \\
&+ PV\left[\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right)k + 1\right] \\
&= PV\left[\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right)k + 1\right]^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Tedy pak obecně pro n daňových období můžeme psát

$$FV_n = PV\left[\left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1\right)k + 1\right]^n. \tag{1.27}$$

Příklad 19. Jakou částku obdržíme za čtyři roky z částky 7 000 Kč, pokud banka garantuje po celou dobu úrokovou sazbu 4,7 % p. a. a úročí čtyřikrát ročně? Připsaný úrok podléhá dani z příjmů. Daň bude splatná jednou ročně. Daňová sazba činí 15 %.

Řešení. *Víme, že* $PV = 7000$, $r = 0,047$, $m = 4$, $tax = 0,15$, $n = 4$. *Výpočet provedeme podle vzorce* (1.27)

$$FV = 7000 \left[\left(\left(1 + \frac{0,047}{4} \right)^4 - 1 \right) (1 - 0,15) + 1 \right]^4 = 8209,81.$$

Na příkladu je opět velmi patrný vliv UO. Další efekt je však dán také daní samotnou, neboť je splatná pouze jednou za více UO, znamená to, že svou srážkou „nebrzdí“ kumulační efekt úroku.

Podívejme se nyní na situaci, kdy budeme aplikovat kombinované úročení. Vyjděme opět z výchozího příkladu, kdy úrokové období bude jeden kvartál a zvětšeme T o 2 měsíce. Je patrné, že doba 2 měsíce je menší než jedno UO, proto v tomto intervalu bude uplatněna výhoda lineárního úročení. I za toto období je však nutné provést daňovou srážku.

Příklad 20. Jakou částku obdržíme za čtyři roky a dva měsíce z částky 7000 Kč, pokud banka garantuje po celou dobu úrokovou sazbu 4,7 % p. a. a úročí čtyřikrát ročně? Připsaný úrok podléhá dani z příjmů. Daň bude splatná jednou ročně. Daňová sazba činí 15 %.

Řešení. *Nejdříve vypočteme* FV *po 4 letech.*

$$FV = 7000 \left[\left(\left(1 + \frac{0,047}{4} \right)^4 - 1 \right) (1 - 0,15) + 1 \right]^4 = 8209,81.$$

Nyní přidáme 2 zbývající měsíce. Zde se využije jednoduché úročení. Je potřeba si uvědomit, že 2 měsíce jsou $\frac{2}{3}$ *z* UO.

$$FV = 8209,81 \left(1 + \frac{0,047}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,85 \right) = 8264,47.$$

Podobně, jako v případě několika připsání úroku během jedné daňové srážky, budeme postupovat také při spojitém úročení, kde bude stejně nutné oddělit jistinu od připočítaného úroku. Tedy pro jedno DO bude platit

$$FV_1 = PV \left(e^f - 1 \right) \cdot k + PV = PV \left[\left(e^f - 1 \right) k + 1 \right]$$

Pro n období pak platí

$$FV = PV \left[\left(e^f - 1 \right) k + 1 \right]^n. \tag{1.28}$$

Tuto metodiku můžeme aplikovat na předchozí příklad. Úroková intenzita bude

$$f = \ln \left(1 + \frac{0,047}{4} \right)^4 = 0,0457375.$$

FV pak dopočteme jako

$$FV = 7000 \cdot \left[\left(\mathrm{e}^{0,0457375} - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right]^4 = 8209,81.$$

Vidíme, že výsledek je stejný jako v případě diskrétního úročení.

Poslední případ výpočtu a aplikace daně je situace, kdy $DO = T$. Pak vzniká jednorázová daňová povinnost v době výběru prostředků z bankovního účtu.

Zůstaňme u našeho příkladu spojitého úročení.

Příklad 21. Jakou částku obdržíme za čtyři roky z částky 7000 Kč, pokud banka garantuje po celou dobu úrokovou sazbu 4,7 % p. a. a úročí spojitě? Připsaný úrok podléhá dani z příjmů. Daň bude splatná při výběru prostředků po čtyřech letech. Daňová sazba činí 15 %.

Řešení.

$$FV = 7000 \cdot \left[\left(\mathrm{e}^{0,0457375 \cdot 4} - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right] = 8222,79.$$

Z výsledků je patrné, že varianta danění až při výběru prostředků, je nejvýhodnější.

Zaměřme se nyní na situaci, kdy budeme uvažovat problematiku danění a reálné hodnoty kapitálu najednou. Daňová povinnost je počítána vždy z nominální hodnoty kapitálu. Opět bude nutné rozlišovat, za jaký časový interval je daň odváděna. Toto následně dáme do souvislosti s délkou UO a inflací. Úprava o efekt inflace se provede vždy až na konci T.

Příklad 22. Uvažujme vklad na bankovní účet ve výši 200 000 Kč. Banka úročí roční úrokovou sazbou ve výši 4,8 % p. a. a připisuje úrok dvakrát za rok. Banka odvádí jednou ročně srážkovou daň z připsaného úroku. Daňová sazba činí 15 %. Prostředky ponecháme na bankovním účtu 10 let. Průměrná odhadovaná roční inflace během následujících 5 let bude 2,1 % a ve zbylých 5 letech bude průměrná inflace dle odborného odhadu činit 2,8 %. Jaká bude konečná reálná hodnota kapitálu po jeho zdanění?

Řešení. *Využijeme-li vzorce* (1.27) *a* (1.23) *dostaneme*

$$FV = \frac{200000 \cdot \left[\left(\left(1 + \frac{0,048}{2}\right)^2 - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right]^{10}}{(1 + 0,021)^5 \cdot (1 + 0,028)^5} = 235315,76.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 26. Na jak dlouho musely být uloženy prostředky ve výši 10 000 Kč, aby na úrocích přibylo alespoň 100 Kč při úrokové sazbě 5,6 % p. a. Z úroků se platí daň 15 %. Uvažujeme jednoduché úročení, roční úrokovací období a roční zdaňovací období.
[76 dnů]

Cvičení 27. Slečna Hortenzie vyhrála ve Sportce 100 000 Kč. Tyto peníze rozdělila na dva účty s úrokovými sazbami 4 % p.a. a 8 % p.a. Počítáme s tříletým úrokovacím obdobím. Po 1 roce, 5 měsících a 6 dnech jí byly úroky připsány a na účtech měla dohromady 112 950 Kč. Kolik peněz vložila Hortenzie na první a kolik na druhý účet? Kolik by měla na konci, kdyby platila srážkovou daň z výhry (sazba 20 %) a daň z úroků (sazba 15 %). Uvažujeme jednoduché úročení a roční daňové období.
[25 000 Kč a 75 000Kč; 88 806 Kč]

Cvičení 28. Pan Novák, provozovatel pekárny Pepa, půjčil 60 000 Kč příteli. Ten měl půjčku splatit za 240 dnů. Pan Novák každé 3 dny zvedl úrokovou sazbu o 0,02 procentního bodu vůči dosavadně platné úrokové míře. Celková splátka na konci činila 62 116 Kč. Jaká byla počáteční úroková sazba (v % p.a.)? Jaký by byl Novákův výnos z půjčky, kdyby se z úroků platily daně? Jak by se změnila konečná splátka, kdyby úroková sazba rostla o 0,02 % z předchozí úrokové míry každé tři dny? Jaký byl výnos, pokud se platili daně z úroků? Uvažujeme pouze jednoduché úročení.
[4,5 %; 1 798,6 Kč; 61 814,29 Kč; 1 542,15 Kč]

Cvičení 29. Uvažujeme dynamicky úročený termínovaný účet, na který jsme vložili 100 000 Kč. Úroková míra na účtu se mění každých 10 dnů. Počáteční úroková sazba byla 6 % p.a. Po 10 dnech vzrostla o 0,004 procentuálního bodu, za další 10 dnů klesla o 0,002 procentuálního bodu. Toto se opakovalo po celou dobu, kdy byly peníze na účtu. Jaký byl stav účtu po 200 dnech? Jaký byl po 200 dnech výnos po zdanění?
[103 833,33 Kč; 3 258,33 Kč]

Cvičení 30. Student měl na počátku roku stav na účtu 12 048,67 Kč. Úroková míra na účtu je 2,5 % p.a. Každý měsíc dostává příspěvek od rodičů 5 000 Kč k 15. dni v měsíci. K 10. dni v měsíci platí internát ve výši 3 000 Kč. K prvnímu dni v měsíci si vkládá na ISIC sumu 2 000 Kč na stravu. Ostatní výdaje neuvažujeme, jsou placené v hotovosti. V červnu a srpnu nedostane nic od rodičů, ale neplatí ani ubytování ani stravu. Během léta si vydělal 10 000 Kč každý měsíc (výplata přišla na účet 14.8. a 14.9). 10.7. si vybral

z účtu 5 000 Kč na festival a 6.8. 6 000 Kč na druhý festival. Uvažujme pouze jednoduché úročení. Určete stav účtu na konci roku Anglickou, Německou a Francouzkou metodou. Jedná se o nepřestupní rok.
[21 048,67 Kč + úroky UK: 320,1175 Kč; D: 319,5467 Kč; FR: 324,5636 Kč]

Cvičení 31. Kolik peněz banka vydělá ročně na vkladu 100 000 Kč pokud ho úročí měsíčně se sazbou 6 % p.a. a daň 15 % je klientovi stržena srážkově při každé výplatě úroku, ale banka tyto daně odvádí jednorázově až na konci roku? Kolik by to činilo, kdyby tento stav přetrval 10 let?
[21,70 Kč; 343,3283 Kč]

Cvičení 32. Investor si vložil na termínovaný vklad sumu 650 000 Kč. Termínovaný vklad je úročen sazbou 4 % p.a. a je vázán na dobu 10 let. V případě předčasného ukončení platí vkladatel penále ve výši 30 % z úroků, které na účtu přibyly za celou dobu trvání termínovaného účtu. Klient 7 let po založení tohoto účtu objeví další, který je úročen sazbou 7 % p.a. Vyplatí se mu změnit termínovaný účet? Jak se situace změní, když se z úroků budou platit daně?
[ano, celkový výnos je o 10 217,82 Kč větší; nijak, jenom by byl rozdíl ve výnosu pouze 7 696,43 Kč]

Cvičení 33. Investor si vložil na termínovaný vklad sumu 1 000 000 Kč. Vstupní poplatek činil 10 000 Kč. Poplatek za vedení účtu byl 300 Kč splatný na konci roku. Termínovaný vklad je úročen sazbou 6 % p.a. a je vázán na dobu 20 let. V případě předčasného ukončení platí vkladatel penále 20 000 Kč + 30 % z úroků, které na účtu přibyly za celou dobu trvání termínovaného účtu. Klient 12 let po založení tohoto účtu objeví další, který je úročen sazbou 8,5 % p.a.; vstupní poplatek je 1 % z vkládané sumy (ale maximálně 15 000 Kč) a roční poplatek 500 Kč placený na konci roku. Z úroků se platí daně. Vyplatí se mu změnit termínovaný účet?
[ne, první účet vydělá o 22 875,77 Kč více po zohlednění poplatků]

Cvičení 34. Klient vložil 80 000 Kč do dynamicky úročeného vkladu. Úročení je měsíční. Úroková sazba je závislá na hodnotě vkladu. Pokud je hodnota méně než 100 000 Kč, je to 5 % p.a.; jestliže je mezi 100 000 Kč a 200 000 Kč, je sazba 7 % p.a. a pokud je nad 200 000 Kč je to 9 % p.a. Úroková sazba se mění následující měsíc po překročení stanovené hranice. Z úroků se platí daně na konci roku. Určete hodnotu vkladu po 20 letech.
[275151,87 Kč]

Cvičení 35. Za jakou nejkratší dobu dosáhneme na účtu sumu 100 000 Kč, jestli jsme na počátku vložili sumu 60 000Kč? Banka nám poskytuje čtvrtletní úročení vkladů při sazbě 6 % p.a. (neuvažujeme spojité úročení).

Z úroků se platí daň 15 % na konci roku. Jestliže dosáhneme požadovanou částku uprostřed roku potom daň z úroků z posledního roku

a) neplatíme vůbec,

b) zaplatíme v plné výši k datu uzavření účtu (musí nám stále zbýt 100000 Kč),

c) BONUS: daň bude splatná až na konci roku. Na účtu necháme dostatečné množství peněz, aby pokryly daň. Ty se nadále úročí (a z úroků se odvádí daň na konci roku).

[10 let 15 dní, 10 let 17 dní, 10 let 17 dní (o něco kratší)]

Cvičení 36. Jak dlouho budeme muset držet na termínovaném účtu vklad 60 000 Kč, aby dosáhla hodnota účtu nejméně 100 000 Kč? Banka nám poskytuje měsíční úročení vkladů při sazbě 6 % p.a. (neuvažujeme spojité úročení). Z úroků se platí daň 15 % na konci roku. Za založení účtu se nám z vkladu strhne vstupní poplatek ve výši 1 % z vkladu (maximálně však 5 000 Kč). Na konci roku se po zdanění strhne poplatek za vedení účtu ve výši 250 Kč. Jestliže dosáhneme požadovanou částku uprostřed roku, potom daň z úroků z posledního roku a poslední poplatek za vedení účtu

a) neplatíme vůbec,

b) zaplatíme v plné výši k datu uzavření účtu (musí nám stále zbýt 100 000 Kč)

c) BONUS: daň i s poplatkem bude splatná až na konci roku. Na účtu necháme dostatečné množství peněz, aby pokryly daň a poplatek, které se nadále úročí (a z úroků se odvádí daň).

[10 let 2 měsíce 10 dní, 10 let 3 měsíce 10 dní, 10 let 3 měsíce 8 dní]

Cvičení 37. Jak dlouho musíme minimálně čekat, aby se nám vklad 100 000 Kč zdvojnásobil, pokud uvažujme spojité úročení s intenzitou 10 %? Jak se doba změní v případě, že jsou úroky daněny srážkovou daní 15 %.
[6,9315 let (6 let 11 měsíců 5 dní 7 hodin a 55 minut); 8,1547 let (8 let 1 měsíc 25 dní 16 hodin 23 minut)]

Cvičení 38. Klientovi byla nabídnuta spojitě úročená investice s úrokovou intenzitou 12 % p.a. na 9 let, která je daněna srážkovou daní 15 %. Jestliže by vložil do investice 1 000 000 Kč, jaká by byla konečná částka? Ví taky o alternativní investici, kde je na rozdíl od první alternativy úroková intenzita první 3 roky 11 % p.a. , další 3 roky 9 % p.a. a poslední 3 roky je to neznáma

intenzita f. Jaká je minimální hodnota intenzity f, aby byla druhá investice výnosnější než první? Jak by se sazba změnila za předpokladu, že by se daň z úroků platila vždy ke konci roku?
[2 504 276,82 Kč; 16 %; 15,9826 %]

Cvičení 39. Založili jste si 3 letý terminovaný účet úročený spojitě. Banka přislíbila roční úrokovou intenzitu 4,5 % po celou dobu trvání. Banka si účtuje vstupní poplatek 1 % z vkladu (max. 5000 Kč), který bude stržený z uložené částky. Dále si účtuje na konci každého roku poplatek za vedení účtu ve výši 300 Kč. Předpokládáme, že počáteční vklad činil 450 000 Kč. Určete, jaká je skutečná roční výnosnost tohoto produktu, za předpokladu, že 15% daň z úroků se platí z účtu před zaúčtováním poplatku (poplatky nesnižují základ daně)? Jaká by byla tato výnosnost v případě, že by se poplatky do základu daně počítaly?
[3,5002 %; 3,5099 %]

Cvičení 40. Kombajnista Pepa se rozhodl koupit jsi nový oblek, aby oslnil výčepní Helenu. Po konzultaci finanční stránky věci se svými přáteli nad pár škopky piva usoudil, že si bude muset vzít spotřební úvěr. Tak i učinil. Půjčil si u nebankovní instituce 130 000 Kč splatných za 7 let. Banka dluh úročí spojitě sazbou 14 % p.a. Za vyřízení půjčky zaplatil na místě 10 000 Kč a k tomu se mu každý rok (na konci) připočte k dluhu částka 1 500 Kč za vedení účtu. Určete RPSN dané půjčky. Jak by se situace změnila, kdyby se vstupní poplatek připočetl k dluhu.
[17,13 %; 16,98 %]

Cvičení 41. Zloději uloupili z banky 340 000 Kč. Peníze dali svému bossovi, který je zatím uschoval v bance při sazbě 1 % p.m. a měsíčním úročení. Všechny lupiče policie ihned chytila. Prvního z nich pustili po 6 letech. Dostal od šéfa 30 000 Kč z odcizené částky za odvedenou práci. Druhý si odseděl 10 let, a když ho pustili, dostal zaplaceno 40 000 Kč z lupu. Třetí dostal 12 let, a když ho pustili, obdržel za své služby jednosměrný lístek na dno bažiny. Kolik zbylo bossovi, pokud s výjimkou výplat dvěma lupičům s penězi nemanipuloval? Kolik by mu zbylo, kdyby z úroků musel platit 20 % daně? Jaká by byla reálná hodnota této (zdaněné) sumy za předpokladu stálé roční inflace 4 %? Dvě výplaty byly v reálné výši vzhledem k času loupeže. [1 312 606,94 Kč; 982 085,94 Kč; 613 407,98 Kč]

Cvičení 42. Dle ekonomických expertů bude roční úroková míra v současném roce i následujících 4 letech 3,5 % s pravděpodobností 0,3, 4 % s pravděpodobností 0,5 nebo 4,5 % s pravděpodobností 0,2. Úročení je roční. Hodnota úrokové míry není nijak ovlivněna, její hodnotou v předchozích letech. Určete střední hodnotu účtu po pěti letech, pokud jste na začátku vložili 220 000 Kč. Jak se změní výsledek daně (srážková daň 15 %)? Jaká bude reálna hodnota v případě pololetního zdaněného úročení (daň se platí na konci roku) a průměrné roční inflace 4 %? [267 020,84 Kč; 259 497,19 Kč; 213 630,09 Kč]

Cvičení 43. Jak velkou sumu musíme uložit na účet, jestli chceme mít na účtu za 7 let 7 měsíců a 7 dní sumu s reálnou hodnotou 1 000 000 Kč? Banka nám poskytuje pololetní úročení vkladů při sazbě 4 % p.a. Roční inflace činí 2 %. K řešení využijte

a) reální úrokovou míru,

b) spojitý vliv inflace.

Proč jsou výsledky odlišné? Který je přesnější?
[860 223,54 Kč; 860 202,79 Kč; první je přesnější, protože při využití spojitého vlivu inflace se v posledním roce úročí lineárně a zároveň je vliv inflace exponenciální]

1.3 Diskontování

V předchozí kapitole jsme se zabývali situací, kdy dochází k placení úroku na konci UO. Nyní si ukážeme jak postupovat v případě diskontování. Výpočet primárně vychází z budoucí hodnoty kapitálu. Rozdíl budoucí a současné hodnoty se nazývá *diskont* a vyjadřuje, o kolik musí být snížena budoucí hodnota, abychom získali hodnotu současnou. Můžeme tedy zapsat:

$$PV = FV - D, \tag{1.29}$$

kde D značí diskont. Jestliže si jako d označíme diskontní sazbu, pak platí

$$D = FV \cdot d \cdot t \tag{1.30}$$

Příklad 23. Věřitel získal směnku jejíž splatnost je jeden rok. V době splatnosti bude vyplacena nominální částka ve výši 110 000 Kč. Výše dluhu v době podpisu směnky činila 100 000 Kč. Kolik činí diskont a kolik činí diskontní míra? Jaký je úrok I a úroková míra r?

Řešení. *Ze zadání známe* $PV = 100000$, $FV = 110000$, $t = 1$. *Tedy pak ze vzorce* (1.29) *dostaneme*

$$D = FV - PV = 10000,$$

a ze vzorců (1.29) *a* (1.30) *dostaneme*

$$d = 1 - \frac{PV}{FV} = 0,0909091.$$

Nyní vypočteme úrok jako

$$I = FV - PV = 10000.$$

Úroková míra je pak

$$r = \frac{I}{PV} = 0,1.$$

Odvoďme si vztah mezi úrokovou a diskontní mírou. Výpočet diskontní sazby bude vycházet ze vztahu

$$PV = FV(1 - d \cdot t). \tag{1.31}$$

Za předpokladu $FV = 1$ a $UO = 1$ platí

$$\begin{aligned} PV &= \frac{1}{1+r} \\ PV &= (1-d). \end{aligned}$$

Odtud pak porovnáním výrazů vyjádříme

$$d = 1 - \frac{1}{1+r}.$$

Tedy pak

$$d = \frac{r}{1+r}. \tag{1.32}$$

Příklad 24. Dlužník podepsal věřiteli dlužní úpis na částku 3 000 000 Kč. Dlužní úpis bude splatný za 18 měsíců a za jistinu bude zaplacen v době splatnosti úrok ve výši 6 % z dlužné částky. Sedm měsíců po transakci se věřitel rozhodne prodat cenný papír na peněžním trhu. Aktuální cena (diskontní sazba na trhu) se pohybuje ve výši 11 % p. a.

a) Kolik obdrží majitel cenného papíru za daných podmínek na trhu?

b) Jak dlouho by musel majitel cenného papíru počkat, pokud budeme předpokládat, že tržní cena bude stále 11 %, aby získal alespoň částku odpovídající zapůjčeným prostředkům.

Řešení. *a) Našim úkolem bude spočítat současnou hodnotu cenného papíru od úpisu za sedm měsíců. K výpočtu použijeme diskont, ovšem jak již víme, diskont se počítá z budoucí hodnoty. Prvním krokem tedy bude spočítat budoucí hodnotu. Dále je ze zadání patrné, že úroková sazba bude činit 6 % a UO odpovídá délce 1,5 roku. Tedy*

$$FV = 3000000 \cdot (1 + 0,06 \cdot 1,5) = 3270000.$$

Po uplynutí sedmi měsíců zbývá do splatnosti směnky ještě 11 měsíců. Pak její aktuální cena na trhu při 11% diskontní sazbě bude

$$PV = 3270000 \cdot \left(1 - 0,11 \cdot \frac{11}{12}\right) = 294027,5.$$

Jak je patrné, prodejní cena bude nižší než výše dluhu v době úpisu.

b) Nyní nás zajímá čas, ve kterém se současná hodnota úpisu bude rovnat dlužné částce 3000000. Tedy

$$3000000 = 3270000 \cdot (1 - 0,11 \cdot t).$$

Odtud

$$t = \frac{1 - \frac{3000000}{3270000}}{0,11} = 0,750626$$

Budeme-li uvažovat, že měsíc má 30 dní, pak do doby splatnosti bude zbývat 9 měsíců a 1 den. Odtud dostaneme odpověď. Tedy aby majitel dlužného úpisu získal požadovanou sumu, musí tento cenný papír prodat dle tržních podmínek nejdříve za 8 měsíců a 29 dnů.

Příklady k procvičení

Cvičení 44. Určete nákupní hodnotu směnky s nominálem 10 000 Kč se splatností 1 rok. Uvažujeme diskontní sazbu 6 %.
[9 400 Kč]

Cvičení 45. Podnikatel nakoupil 30 sudů piva do své krčmy. Splatnost piva je 60 dnů. Jestliže nakupující splatí fakturu do 3 dní, bude mu poskytnuta sleva 0,5 % z ceny zboží. Na trhu je dostupná úroková míra 3 % p.a. Vyplatí se kupujícímu zaplatit hned? Jak se situace změní, kdyby na trhu byla úroková míra 4 %, resp. 60 %?
[ano 0,004975<0,005; ne 0,006623>0,005; ano, ale muselo by se zaplatit až 3. den]

Cvičení 46. Spekulant objevil unikátní investiční příležitost. Bankéř V mu vystaví směnku s nominálem 100 000 Kč na 180 dnů při diskontní sazbě 3 % p. a. (půjčí mu) . Bankéř R si od něj nechá vystavit stejnou směnku s diskontní sazbou 4 % p. a. Určete kolik na téhle transakci spekulant vydělá za dané období jestliže přebytečné prostředky ukládá na běžný účet úročen sazbou 1,5 % p. a.? Bankéř V se rozhodne směnku prodat společnosti pro vymáhaní pohledávek 60 dní před splatností a ti požadují její okamžité proplacení ve výši její aktuální hodnoty. Spekulant je nucen eskontovat směnku. Bankéř V mu jí eskontuje s diskontní sazbou 9 % p.a. Kolik musí spekulant zaplatit ze svých úspor, aby proplatil dluh vymahačské společnosti za předpokladu, že použije všechny prostředky z eskontované směnky a zúročeného původního zisku? Maximálně kolik dní před splatností by musela celá operace proběhnout, aby nemusel platit nic ze svého? Jaká by musela být maximální výše eskontní sazby v případě, že bude eskontovat 60 dnů před splatností, aby nemusel dávat nic ze svého?
[503,75 Kč; 497,5 Kč; 30 dní; 6,015 %]

Cvičení 47. Za 53 349 Kč jsme koupili dlužný úpis s nominálem 60 000 Kč a diskontní sazbou 6 %. Na jakou dobu byla směnka vystavena?
[666 dní]

Cvičení 48. Banka A vlastní 1 000 směnek s nominální hodnotou 10 000 Kč splatné k 20. 12. 2015, 500 směnek s nominální hodnotu 30 000 Kč splatné k 12. 11. 2015 a 700 směnek s nominální hodnotou 45 000 Kč splatné k 13. 8. 2015. Rozhodne se je eskontovat 15. 5. 2015. Diskontní sazba činí 9,5 % (standard ACT/360). Kolik banka A získá eskontem? Jaká je střední doba splatnosti směnek?
[54 457 500 Kč; 136,9912 dnů]

1.3.1 Složený diskont

U složeného úročení hrálo významnou roli úrokové období. Jinak tomu nebude ani u počítání diskontu. Označme PV současnou hodnotu kapitálu na začátku 1. úrokovacího období, PV_1 současnou hodnotu kapitálu na začátku druhého úrokovacího období, atd. Zřejmě platí

$$PV_{n-1}(1 + r) = FV.$$

Následně pak pro n období můžeme zapsat:

$$
\begin{aligned}
PV_{n-1} &= FV(1-d) = \frac{FV}{1+r} \\
PV_{n-2} &= PV_{n-1} - PV_{n-1} \cdot d = FV(1-d)^2 = \frac{FV}{(1+r)^2} \\
&\vdots \\
PV &= FV \cdot (1-d)^n = \frac{FV}{(1+r)^n}.
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že výše diskontu pak bude

$$D = FV\left[1-(1-d)^n\right]. \tag{1.33}$$

Podobně jako jsme byli schopni u spojitého úročení vyjádřit efektivní úrokovou sazbu, zavedeme při počítání s diskontem *efektivní diskontní sazbu.* Budeme-li uvažovat nominální diskontní sazbu d_m a nominální úrokovou sazbu r_m s m konverzemi za úrokovou periodu (m-krát za úrokovou periodu se připisuje úrok), pak pro PV platí

$$PV = FV \cdot \left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m = \frac{FV}{\left(1+\frac{r_m}{m}\right)^m}. \tag{1.34}$$

Bude-li platit $T = m \cdot n$, pak

$$PV = FV \cdot \left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{m \cdot n} \frac{FV}{\left(1+\frac{r_m}{m \cdot n}\right)^{m \cdot n}}. \tag{1.35}$$

Označíme-li si d_e efektivní diskontní sazbu, pak podobně jako při úrokování platí

$$\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m = (1-d_e).$$

Příklady k procvičení

Cvičení 49. Jaká je cena bezkupónového dluhopisu, který Vám vyplatí 45 000 Kč, když je na trhu úroková sazba 5 %? Doba splatnosti dluhopisu je

a) 10 let,

b) 5 let,

c) 1 rok.

[27 626,09 Kč; 35 258,68 Kč; 42 857,14 Kč]

Cvičení 50. Král vybudoval velkou armádu za 20 miliónů zlaťáků, kterou se rozhodl svěřit jednomu ze svých čtyř synů. První syn řekl, že potáhne s armádou přes moře na západ a za 5 let donese poklad v hodnotě 30 miliónů zlaťáků. Druhý syn řekl, že potáhne pouští na jih a přinese za 10 let 60 miliónů zlaťáků. Třetí syn by se chtěl vydat do stepi na východě a slíbil, že přinese za 15 let 90 miliónů zlaťáků. Čtvrtý syn by se vydal do hor na dalekém severu a přinesl by do 20 let kořist ve výši 120 miliónů zlaťáků. Král požaduje, aby se jeho bohatství zvětšilo každý rok alespoň o desetinu. Kterého syna si král vybere?
[druhého]

Cvičení 51. Podařilo se nám našetřit 100 000 Kč a chceme je zainvestovat. Máme k dispozici několik projektů v různých zemích světa. Rizikovost země a projektu je zohledněna v požadované výnosové míře (požadované úrokové míře). Švýcarský projekt nám za 10 let přinese 165 000 Kč, požadujeme výnosnost 5 % ročně. Singapurský projekt nám přinese 210 000 Kč za 11 let, požadujeme 7 % ročně. Projekt v Saudské Arábii nám přinese 260 000 Kč za 9 let při požadované úrokové sazbě 11 %. Surinamský projekt nám přinese 460 000 Kč za 11 let při požadované roční výnosové míře 15 %. Somálský projekt nám přinese 1 460 000 Kč za 12 let při požadované výnosnosti 25 %. Který projekt si vybereme?
[Saudská Arábie]

1.3.2 Spojitý diskont

Obdobně jako u polhůtního úročení i v případě diskontování můžeme využít procesu spojitého úročení. Již víme, že

$$FV = PV \cdot \mathrm{e}^{ft}.$$

Má-li být zajištěna rovnost akumulačních faktorů jak diskrétního tak spojitého procesu, musí evidentně platit následující:

$$\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{m \cdot n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{f \cdot n}},$$

kde $n = \frac{T}{m}$. Tedy

$$f = -\ln\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^m \tag{1.36}$$

a současně nominální diskontní sazba s počtem konverzí m bude mít podobu:

$$d_m = m \cdot \left(1 - e^{\frac{-f}{m}}\right).$$

Příklad 25. Nákupní cena směnky je 106 000 Kč. Směnka maturuje za 3 roky v nominální výši 180 000 Kč. Určete roční nominální diskontní sazbu, je-li počet konverzí 4.

Řešení. *Ze zadání víme, že* $PV = 106000$, $FV = 180000$, $t = 3$, $m = 4$. *Ze vzorce*

$$FV = PV \cdot \mathrm{e}^{f \cdot t}$$

vyjádříme

$$f = \frac{\ln FV - \ln PV}{t}.$$

Tedy

$$f = \frac{\ln 180000 - \ln 106000}{3} = 0,17651.$$

Odtud dopočítáme dosazením do vzorce (1.36)

$$d_4 = 4 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-0,17651}{4}}\right) = 0,17267.$$

Příklad 26. Nakoupili jste dluhový cenný papír za cenu 2 010 000 Kč. Nominální hodnota tohoto cenného papíru činí 3 000 000 Kč. Dále víme, že nominální roční diskontní sazba činí 9,5 %. Za jakou dobu bude dluhový cenný papír dle daných podmínek splatný?

Řešení. *Ze zadání známe* $PV = 2010000$, $FV = 3000000$, $d = 0,095$. *Tedy*

$$f = -\ln(1 - d) = 0,0998.$$

Víme, že

$$FV = PV \cdot \mathrm{e}^{f \cdot t},$$

tedy

$$t = \frac{\ln FV - \ln PV}{f} = 4,0128.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 52. Máte k dispozici dvě alternativy, buďto peníze uložíte na spojitě úročený účet s intenzitou 3 % p.a., nebo nakoupíte cenné papíry. Cenný papír vyplatí za 3 roky 2 000 Kč, za 6 let 4 000 Kč, za 8 let 5 000 Kč a za 10 let 3 000 Kč. Kolik je maximální přípustná cena cenného papíru, aby se nám jeho koupě vyplatila více než vklad peněz na účet? Jaká by byla celková roční výnosnost, kdyby byl počáteční majetek 200 000 Kč, tržní cena cenného papíru by byla 11 000 Kč? Peníze, které zbydou po nákupu cenných papírů a peníze, které budou vyplaceny z cenného papíru, se převedou na daný spojitě úročený účet.
[11 324,54 Kč; 3,3425 %]

1.3.3 Inflace a diskont

Jestliže bude předmětem zájmů zjištění reálného úrokového efektu, tak i v případě diskontování bude nutné zohlednit cenový vývoj v ekonomice za sledované období T. Počáteční hodnota kapitálu stejně jako diskont budou vztaženy k časovému okamžiku, kdy inflace $\pi = 0$. Ve výchozím stavu tedy reálná hodnota odpovídá nominální hodnotě. Konečnou hodnotu kapitálu bude nutné upravit o vliv inflace. Reálná hodnota diskontu bude v diskrétním případě rovna

$$D_r = FV_r - PV = \frac{FV}{(1+\pi)^n} - PV. \tag{1.37}$$

Analogicky pro spojitý případ platí

$$D_r = FV_r - PV = \frac{FV}{\mathrm{e}^{f_\pi t}} - PV. \tag{1.38}$$

Příklad 27. Zjistěte reálnou hodnotu diskontu, který se vztahuje na dluhový cenný papír s nominální cenou 90 000 Kč a dobou splatnosti 3 roky. Diskontní sazba je 4 % p. a. Dle odhadu centrální banky bude inflace v následujících letech: 1,4 %, 2,3 %, a 2,7 %.

Řešení. *Známe* $FV = 90000$, $t = 3$, $d = 0,04$, $\pi_1 = 0,014$, $\pi_2 = 0,023$ *a* $pi_3 = 0,027$. *Tedy pak*

$$D_r = \frac{90000}{(1+0,014)(1+0,023)(1+0,027)} - \left[90000 \cdot (1-0,04)^4\right] = 8039,7.$$

Příklad 28. Kolik bude činit absolutní hodnota reálného výnosu ze směnky, která maturuje za tři roky v nominální hodnotě 600 000 Kč. Kupní cena směnky je 538 000 Kč. Dále víme, že kvartální výše inflace pro následující tři roky bude činit 0,75%. Dopad inflace bude vyjádřen spojitě.

Řešení. *Ze zadání víme, že* $FV = 600000$, $PV = 538000$, $\pi = 0,075 p.q.$, $t = 3$. *Tedy pak*

$$d = 1 - \sqrt[t]{\frac{PV}{FV}} = 1 - \sqrt[3]{\frac{538000}{600000}} = 0,037.$$

Dále dopočteme inflační intenzitu podle vzorce (1.24). *Tedy*

$$f_\pi = \ln(1+0,0075)^4 = 0,02989.$$

A nyní již můžeme dopočítat reálný výnos (reálný diskont)

$$D_r = \frac{FV}{\mathrm{e}^{f_{pi} t}} - PV = 10540.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 53. Během hyperinflace vaše rodina hladoví. Rozhodnete se nyní prodat auto, abyste měli na jídlo. Cena auta je 400 000 Kč. Cena chleba v době prodeje auta je 32 Kč. Peníze můžete uložit při sazbě 100 % p.a. Inflace je 270 000 % p.a. Určete kolik chlebů si můžete koupit

a) za 1 měsíc,

b) za 3 měsíce,

c) za rok, pokud vložíte na účet všechny prostředky z prodeje auta.

Uvažujeme jednoduché úročení. Příklad počítejte i pomocí jednoduchého diskontování.
[59 ;23 ;9]

1.3.4 Diskont a daňová problematika

Úrok získaný u předlhůtního úročení (diskont) může rovněž podléhat daňové povinnosti. Opět stejně jako v případě polhůtního úročení podléhá dani pouze částka generovaná zúročením, nikoli jistina, respektive celková hodnota kapitálu. Označme si jako Tax výši daně a tax míru zdanění. Pak můžeme psát:

$$Tax = D \cdot tax \tag{1.39}$$

$$D_{tax} = D - Tax.$$

Odtud pak dostáváme

$$D_{tax} = FV \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^m\right] \cdot k \tag{1.40}$$

Příklad 29. Kolik bude daň z bezkupónového dluhopisu jehož nákupní cena činí 265 300 Kč a nominální hodnota, kterou obdrží vlastník za 6 let bude 350 000 Kč. Uvažovaná daňová sazba činí 15 %. Dále víme, že je uvažována roční nominální diskontní sazba s měsíční konverzí. Kolik bude činit tato sazba?

Řešení. *Ze zadání víme, že* $FV = 350000$, $PV = 265300$, $n = 6$, $tax = 0,15$, $m = 12$. *Pak diskont spočteme jako*

$$D = 350000 - 265300 = 84700$$

a daň

$$Tax = 84700 \cdot 0,15 = 12705$$

Diskontní sazbu dopočteme ze vzorce (1.35)

$$d_m = m\left(1 - \sqrt[m\cdot n]{\frac{PV}{FV}}\right) = 12 \cdot \left(1 - \sqrt[72]{\frac{265300}{350000}}\right) = 0,046089.$$

Příklad 30. Zjistěte výši diskontu po zdanění u cenného papíru, jehož nominální hodnota v době splatnosti činí 15 000 000 Kč. Daňová sazba činí 15 %. Cenný papír jste zakoupil dnes a je splatný za 10 let. Pokud víte, že ekvivalentní roční efektivní úroková sazba je 5,5 %, kolik bude současná hodnota tohoto cenného papíru?

Řešení. *Ze zadání víme, že* $FV = 15000000$, $tax = 0,15$, $t = 10$, $r_e = 0,055$. *Nejdříve dopočítáme úrokovou intenzitu*

$$f = \ln(1 + 0,055) = 0,053541.$$

Pak diskont po zdanění je

$$\begin{aligned} D_{tax} &= FV \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-f\cdot t)}\right) \cdot (1 - tax) = 15000000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0,053541\cdot 10}) \cdot 0,85 \\ &= 528576,11. \end{aligned}$$

Nyní dopočítáme současnou hodnotu

$$PV = FV - D = FV \cdot \left[1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,053541\cdot 10}\right)\right] = 8718541,31.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 54. Rozhodli jsme se vložit peníze na dynamicky úročený účet na 320 dnů. Vklad činil 60 000 Kč. Úroková sazba byla 160 dnů na úrovni 5 % p.a. , 30 dnů na úrovni 5,5 % p.a., 50 dnů na úrovni 5,7 % a 80 dnů na úrovni 5,2 %. Jaká byla hodnota vkladu na konci? Jaká by byla hodnota, kdyby se platila daň 15 % na konci roku? Uvažujeme jednoduché úročení. Příklad počítejte i pomocí jednoduchého diskontování.
[62 776,67 Kč; 62 360,17 Kč]

1.3.5 Zohlednění daně a inflace u diskontování

Protože celou částku diskontu obdržíme v čase $t = 0$, pak v tento okamžik rovněž známe výši své daňové povinnosti. Přestože se diskont pojí s okamžikem nákupu cenného papíru, jeho existence je fakticky naplněna až časovým okamžikem T. Bude tedy rozhodující, kdy k zaplacení daně dojde. Za předpokladu kladného růstu cenové hladiny bude pro plátce výhodnější odvádět daň s nižší reálnou hodnotou. Proto bude zkoumána reálná hodnota daně podle toho, kdy bude daň placena. Stejně jak bylo uvedeno v problematice polhůtního zdanění, daňová povinnost vychází z nominální výše úroku. Můžeme tedy vyjádřit vztah pro reálnou hodnotu zdaněného diskontu D_{rt}

$$D_{rt} = FV \cdot [1 - (1 - d)^n] \cdot \frac{1 - tax}{(1 + \pi)^n}. \tag{1.41}$$

Vidíme, že ve výpočtu D_{rt} jsou inflace a daňová zátěž v přímé interakci. Nicméně reálná hodnota diskontu není pro daňovou povinnost rozhodující, daň vychází z nominální výše:

$$Tax = FV \cdot [1 - (1 - d)^n] \cdot tax. \tag{1.42}$$

Jak již bylo zmíněno, pro daň je důležité zohlednit časový okamžik platby. Výše uvedený vztah vyjadřuje daňovou povinnost v čase$t = 0$. Kdybychom, ale platili daň až v době, kdy je cenný papír splatný, pak je to pro plátce výhodnější. Předpokládáme však kladný cenový růst. Reálná hodnota daňové zátěže by se dala vyjádřit následovně:

$$Tax_r = FV \cdot [1 - (1 - d)^n] \cdot \frac{tax}{(1 + \pi)^n}. \tag{1.43}$$

Příklad 31. Vypočítejte reálnou výši diskontu po zdanění. Dále stanovte současnou hodnotu daňové povinnosti. Jaká by byla reálná hodnota daně, pokud bychom prováděli odvod v době splatnosti dlužného cenného papíru? Uvažujte dluhopis, jehož kupní cena činí 78 000 000 Kč. Dluhopis je splatný za 4 roky a nominální hodnota v době splatnosti dluhopisu je 100 000 000 Kč. Daňová sazba činí 1 5%. Předpokládaná průměrná roční inflace během následujících čtyř let je 1,8 %.

Řešení. *Ze zadání víme, že* $PV = 78000000$, $t = 4$, $FV = 100000000$, $tax = 0,15$, $\pi = 0,018$. *Nejprve si vypočteme výši daně v čase* $t = 0$

$$Tax = (100000000 - 78000000) \cdot 0,15 = 3300000.$$

Nyní vypočítáme výši reálného diskontu, přitom k výpočtu inflační intenzity využijeme vzorec (1.24)

$$D_r = 100000000 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(1+0,018)\cdot 4} - 78000000 = 15112693.$$

Dále spočítáme reálnou výši diskontu po zdanění

$$D_r t = 15112693 - 3300000 = 11812693$$

Na závěr dopočítáme reálnou hodnotu daně v době splatnosti cenného papíru. Tedy

$$Tax = (100000000 - 78000000) \cdot 0,15 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(1+0,018)\cdot 4} = 3072719.$$

Vidíme, že reálná daňová zátěž v čase klesá.

Příklady k procvičení

Cvičení 55. Koupili jste dluhopis za 10 000 Kč, který vyplácí za 6 let 15 000 Kč. Reálna výše diskontu po zdanění je 5 Kč. Daň z diskontu je 15 % a je splatná při prodeji dluhopisu. Určete stálou roční míru inflace na nejbližších 6 let?
[5,7013 % p.a.]

2
Anuitní počet

Problematika anuit se vztahuje na již probranou látku úrokového počtu. Je založena na využívání vlastností aritmetické a geometrické řady, neboť v podstatě hledáme sumu budoucích nebo současných hodnot z opakovaného vkladu, či výběru - anuity. Každý jednotlivý vklad je buďto úročen, vztahuje se na hledání budoucí hodnoty (proces spoření), a nebo diskontován, pak je hledána současná hodnota platby (důchod, úvěr). Celá problematika bude v zásadě postavená na polhůtním úročení.

Jak pro sumaci budoucích hodnot, tak pro sumaci současných hodnot bude potřebné sledovat délku časového intervalu mezi platbami – platební období PO a délku úrokového období. Později při úvaze zdanění budeme ještě přidávat k posouzení jak často dochází k placení daně. Z tohoto pohledu můžeme rozlišovat tři základní situace, kterými bude determinován výpočetní postup. Potřeba vzájemné komparace PO a UO vychází ze vzájemného vztahu lineárního a exponenciálního úročení. Hlavní motivací je maximálně využít dopad úrokového efektu na kapitál. Z kapitoly o kombinovaném úročení již víme, že pokud je částka úročena v intervalu kratším než UO, pak má výhodu lineární forma úročení.

Při početních úlohách v příkladech tedy budeme rozlišovat následující situace:

- $UO = PO$
- $UO > PO$
- $UO < PO$

Z pohledu vlivu úrokového efektu bude rovněž důležité sledovat okamžik, kdy dojde k první platbě. Zde mohou nastat dvě situace. Buď bude první platba provedena na začátku platebního období PO, nebo na konci platebního období. Pak budeme odlišovat termín předlhůtní platba (spoření/důchod) a polhůtní platba (spoření/důchod). Okamžik platby během platební periody je důležitý z pohledu úročení posledního vkladu pro případ hledání budoucích hodnot, respektive diskontování první provedené platby.

U elementárního anuitního počtu je nutné dodržet některé předpoklady:

- Výše anuity je po celou dobu, kterou sledujeme, konstantní.
- Pravidelnost platby, kterým se rozumí dodržení stejného časového intervalu mezi jednotlivými platbami.
- Stejné úrokové podmínky, tj. způsob úročení a parametry k výpočtu úroku se po celou uvažovanou dobu nemění.

Později si ukážeme, že je možné tyto striktní podmínky určitým způsobem rozvolnit.

2.1 Spoření

Jak již bylo naznačeno, u spoření se hledá součet budoucích hodnot z vložených vkladů. Každý z vkladů bude úročen dle zadaných podmínek. Ukažme si problematiku na názorném příkladu. Začněme situací, kdy délka úrokového období je stejná jako frekvence vkladů.

2.1.1 $UO = PO$

Předlhůtní spoření

Příklad 32. Uvažujme, že budeme během následujících 4 let posílat vždy začátkem roku pravidelné platby ve výši 1000 na bankovní účet. Dále naše prostředky budou úročeny úrokovou sazbou 2 % p.a. a úrokové období bude odpovídat rovněž jednomu roku. Fakticky tedy učiníme 4 vklady a každému z těchto vkladů bude připsán patřičný úrok. Jediným rozdílem u těchto vkladů bude čas, ze kterého se bude počítat úrok. Nejdéle se bude úročit první vklad a logicky nejkratší dobu bude úročen poslední vklad. Tedy k výpočtu sumy prostředků, které budeme mít k dispozici na konci uvažované doby vkládání na účet můžeme postupovat po jednotlivých krocích. Výsledkem bude suma vkladů navýšena o úrok z každého vkladu.

Řešení.

$$\begin{aligned}
FV_1 &= 1000 \cdot (1 + 0,02)^4 = 1084,432 \\
FV_2 &= 1000 \cdot (1 + 0,02)^3 = 1061,208 \\
FV_3 &= 1000 \cdot (1 + 0,02)^2 = 1040,4 \\
FV_4 &= 1000 \cdot (1 + 0,02)^1 = 1020.
\end{aligned}$$

Tedy součet jednotlivých budoucích hodnot z uvedených vkladů a v souladu s danými podmínkami úročení nám dávají výslednou hodnotu 4204,04.

Z příkladu je patrné, že se jednalo o případ *předlhůtního spoření* (úložka vždy začátkem roku). První vklad byl realizován v čase t=0. Výsledkem této skutečnosti je to, že takovýto vklad bude na rozdíl od vkladu, který bude následovat až na konci PO, úročen o jedno úrokovací období navíc (1+r). Toto jedno zúročení "navíc" se pojí se všemi uvažovanými vklady během doby spoření.

Jestliže se vrátíme k našemu příkladu, můžeme pozorovat zajímavou skutečnost. Pokud podělíme budoucí hodnotu dvou po sobě jdoucích vkladů, tak vždy dostaneme stejný výsledek:

$$\begin{aligned} \frac{1000 \cdot (1+0,02)^4}{1000 \cdot (1+0,02)^3} &= (1+0,02) \\ \frac{1000 \cdot (1+0,02)^3}{1000 \cdot (1+0,02)^2} &= (1+0,02) \\ \frac{1000 \cdot (1+0,02)^2}{1000 \cdot (1+0,02)^1} &= (1+0,02) \\ &. \end{aligned}$$

Představená eventualita nám okamžitě vyvolá asociaci s vlastností geometrické řady, kde pro kvocient platí $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dále víme, že součet n členů geometrické řady má následující tvar:

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Vrátíme-li se k našemu příkladu, bude mít zápis tuto formu:

$$S = 1000 \cdot (1+0,02) \frac{[(1+0,02)^4] - 1}{(1+0,02) - 1} = 4204,04.$$

Souhrnný zápis výše uvedeného:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} FV_i &= a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r) \\ &= a(1+r)\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r)^{n-n}\right] \end{aligned}$$

Výraz v hranatých závorkách představuje geometrickou řadu právě s koeficientem $(1+r)$ Soulad výsledků geometrické řady a dílčích součtů je zajištěn dodržením v úvodu stanovených předpokladů. Pakliže uvažujeme větší počet anuit, má využití vlastností geometrické řady nesporné přednosti.

Jak jsme si mohli povšimnout, tak první člen uvedené geometrické řady má hodnotu vkladu navýšenou o úrok, tedy $1000 \cdot (1 + 0,02)$. Je to z toho důvodu, že první platba byla realizována v čase $t = 0$.

Z důvodu přehlednosti zaveďme indexaci pro součet budoucích hodnot předlhůtních vkladů (spoření) jako S^0. Zobecněním formule pro výpočet budoucí hodnoty (spoření), za předpokladu $a \neq 1$ a platby na začátku platebního období dostáváme následující výraz:

$$S^0 = a\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{2.1}$$

Obdobně jako jsme zavedli termín akumulační faktor u polhůtního úročení, zavedeme v procesu spoření termín *střadatel*, který je možné při jednotkové anuitě definovat jako

$$s^0 = (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Výsledná hodnota střadatele nám říká, kolik naspoříme za n vkladových období při úrokové sazbě r ($UO = PO$), jestliže na počátku každého platebního období uložíme 1 Kč.

Pro součet budoucích hodnot musí následně platit:

$$S^0 = a \cdot s^0.$$

Polhůtní spoření

Polhůtním spořením se rozumí takový případ, kdy první anuita je realizována na konci platebního období. Z praktického hlediska to znamená, že poslední anuita je generována v okamžiku realizace všech vkladů a jejich úroků. U této poslední anuity již není časový prostor pro připsání úroku. Pro názornější představení zmíněného efektu se vraťme k našemu výchozímu příkladu.

Pro výpočet součtu budoucích hodnot bude platit:

$$\begin{aligned} FV_1 &= 1000 \cdot (1+0,02)^3 = 1061,208 \\ FV_2 &= 1000 \cdot (1+0,02)^2 = 1040,4 \\ FV_3 &= 1000 \cdot (1+0,02)^1 = 1020 \\ FV_4 &= 1000 \cdot (1+0,02)^0 = 1000. \end{aligned}$$

Součtem dílčích budoucích hodnot dostáváme 4121,608. Ke stejného výsledku samozřejmě dospějeme i přes součet geometrické řady:

$$S = 1000\frac{(1+0,02)^4 - 1}{(1+0,02) - 1} = 4121,608.$$

Z již dříve vysvětleného a rovněž z obrázku je patrné, že poslední platba je provedena v okamžiku výběru peněžních prostředků. Nezůstává tedy žádný čas k zúročení.

Souhrnný zápis součtu budoucích hodnot:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} FV_i &= a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r)\\ &= a\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r)^{n-n}\right]\end{aligned}$$

Rozdíl oproti předlhůtnímu skládání anuit spočívá v tom, že u každého vkladu chybí přepsání úroku z jedné (poslední) úrokové periody.

Zobecněním formule pro výpočet součtu budoucích hodnot (spoření), za předpokladu $a \neq 1$ a platby na konci platebního období ($OU = PO$) dostáváme následující výraz:

$$S^1 = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (2.2)$$

Pro střadatele polhůtního bude platit:

$$s^1 = \frac{(1+r) - 1}{r}.$$

Pak

$$S^1 = a \cdot s^1.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 56. Jak dlouho budeme ukládat 1 000 Kč na spořicí účet ke konci roku, abychom dosáhli sumu 47 575,42 Kč? Banka účet úročí sazbou 3 % p.a. při ročním úročení.
[30 let]

Cvičení 57. Pana Huspeninu přestalo bavit platit vysoké poplatky za převody mezi běžným a spořicím účtem. Rozhodnul se nahradit účet, kde odkládal svoje peníze měsíčně (předlhůtně) a byl úročen měsíčně, za účet, kde bude odkládat peníze pololetně (taktéž předlhůtně) a je taktéž úročen pololetně. Úroková sazba je na obou účtech stejná 1 % p.q. Plánovaná doba spoření byla 10 let. Určete, kolikanásobně více bude muset klient odkládat na novém účtu, aby naspořil stejně jako na starém? Odhadněte, jestli to bude víc nebo míň než šestkrát. Své rozhodnutí zdůvodněte.
[5,9613]

Cvičení 58. Po skončení studií v 27 letech si začnete ukládat na důchod. Hned první vklad vložíte při založení spořicího účtu ve výši 10 000 Kč. Předpokládáte, že váš příjem bude růst a teda budete moci svoje vklady průběžně zvyšovat. Chcete spořit až do odchodu do důchodu (v 67) a budete peníze odkládat vždy na počátku roku. Úroková sazba je 5 % p.a. a úrok se připisuje jednou ročně. O kolik musíte každý rok zvýšit svůj vklad, abyste při odchodu do důchodu měli k dispozici 2 milióny?
[431,17 Kč]

Cvičení 59. Spoříme na účtu který je úročen stálou sazbou r p.a. s měsíčním úročením. Ukládáme každý měsíc předlhůtně stejnou částku. Za 3 roky jsme naspořili 100 000 Kč. Z účtu jsme vybrali 20 000 Kč a spořili dalších 6 let se stejnými podmínkami. Na konci 9 roku bylo na účtu 300 000 Kč. Určete výši úrokové sazby r.
[30 682,21 Kč]

Cvičení 60. Spořili jsme 16 let. Na začátku každého měsíce jsme na účet vkládali stejnou částku. Účet byl úročen stejnou sazbou po celou dobu úročení. Úročení bylo měsíční. Po 8 letech spoření jsme měli na účtu 20 000 Kč. V tuto dobu jsme z účtu vybrali jistou sumu. Po dalších 4 letech jsme měli na účtu 28 000 Kč. K tomuto datu jsme z účtu vybrali dvakrát tolik co naposledy. Po dalších 4 letech jsme měli na účtu 35 000 Kč. Určete, jaká byla roční úroková míra tohoto spořicího účtu?
[14,0723 %]

2.1.2 $UO > PO$

Předlhůtní spoření

V této části si představíme jak postupovat, pokud během jednoho připsání úroků dojde k několika vkladům. Z části věnované úročení víme, že v případě $T < UO$ bude lineární úročení produkovat větší budoucí hodnotu kapitálu. Právě na této skutečnosti je postaven výpočetní mechanismus, kdy časový interval jednoho úrokového období přesahuje prodlevu mezi jednotlivými vklady.

Ukažme si jednoduchý příklad. Předpokládejme, že během jednoho úrokovacího období provedeme m vkladů. I zde budeme respektovat předpoklady z úvodu kapitoly. Mějme k dispozici peněžní částku 1 Kč, kterou rovnoměrně rozdělíme na m dílků. Dále uvažujme stejný časový úsek mezi jednotlivými vklady. Tedy platební perioda bude rovna $\frac{1}{m}$ z UO. Našim úkolem bude zjistit kolik bude činit budoucí hodnota ze všech uložených prostředků. Je zřejmé, že na konci úrokového období budeme mít minimálně ukládanou částku tedy

$$\frac{1}{m} \cdot m = 1$$

a dále úrok připsaný ke každému vkladu. Jak již bylo zmíněno všechny vklady během daného úrokovacího období se budou úročit lineárně.

I zde budeme rozlišovat, kdy dojde k první platbě, zda na začátku, či na konci platebního období.

Uvědomme si, že jediná změna mezi jednotlivými vklady se bude týkat zbývajícího času od vkladu do konce úrokové periody. Pro jednotlivé vklady uložené na začátku platebního období bude doba úročení následující:

$$\begin{array}{lll}
FV_1 & \ldots & \dfrac{m}{m} \\
FV_2 & \ldots & \dfrac{m-1}{m} \\
FV_3 & \ldots & \dfrac{m-2}{m} \\
\vdots & & \\
FV_n & \ldots & \dfrac{m-(m-1)}{m}.
\end{array}$$

Z principu lineárního úročení je zřejmé, že jednotlivé budoucí hodnoty budou:

$$\begin{array}{llll}
FV_1 & = \dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + r \cdot \dfrac{m}{m}\right) & = & \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m} \cdot r \cdot \dfrac{m}{m} \\
FV_2 & = \dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + r \cdot \dfrac{m-1}{m}\right) & = & \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m} \cdot r \cdot \dfrac{m-1}{m} \\
FV_3 & = \dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + r \cdot \dfrac{m-2}{m}\right) & = & \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m} \cdot r \cdot \dfrac{m-2}{m} \\
 & & \vdots & \\
FV_m & = \dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + r \cdot \dfrac{m-(m-1)}{m}\right) & = & \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m} \cdot r \cdot \dfrac{1}{m}
\end{array}$$

Součet jednotlivých vkladů stejné velikosti je $m\frac{1}{m} = 1$. Pokud se ale podrobněji podíváme na výši úroků, pak můžeme součet zapsat následovně:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} I_i &= \frac{1}{m}\cdot r\cdot\frac{m}{m}+\frac{1}{m}\cdot r\cdot\frac{m-1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}\cdot r\cdot\frac{1}{m}\\ &= \frac{r}{m^2}\cdot[m+(m-1)+(m-2)+\ldots+1]\,.\end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce okamžitě asociuje aritmetickou řadu, kterou sečteme:

$$S_m=\frac{m}{2}\cdot(m+1).$$

Následně dostáváme:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i=\frac{r}{m^2}\cdot\left[m\cdot\frac{m+1}{2}\right]=\frac{m+1}{2m}\cdot r.$$

Výše uvedený výraz je předlhůtní zásobitel jednoho úrokovacího období. Pokud výše vkladu (anuity) bude různá od $\frac{1}{m}$, například ve výši x, pak celkový úrok získaný lineárním úročením na konci úrokového období bude:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i=m\cdot x\frac{m+1}{2m}\cdot r.$$

Součet všech budoucích hodnot z uskutečněných vkladů během jednoho UO musí být:

$$\sum_{i=1}^{n} FV_i=m\cdot x+m\cdot x\cdot\frac{m+1}{2m}\cdot r=m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m+1}{2m}\cdot r\right). \tag{2.3}$$

Příklad 33. Vypočítejte kolik obdržíme na úrocích za jedno úrokové období pravidelnými předlhůtními vklady na bankovní účet. Výše vkladu činí 1 500 Kč a spoření provádíme v měsíčních intervalech. Roční úroková sazba činí 4,2 % a úrok banka připisuje semianuálně. Jakou částku budeme mít k dispozici na konci prvního úrokového období?

Řešení.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} I_i &= 6\cdot 1500\cdot\frac{6+1}{2\cdot 6}\cdot\frac{0,042}{2}=110,25\\ \sum_{i=1}^{6} FV_i &= 6\cdot 1500\cdot\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0,021\right)=9110,25.\end{aligned}$$

Na konci úrokovacího období obdržíme částku našich vkladů 9000 a součet připsaných úroků ke každému vkladu 110,25.

Považujeme za vhodné na tomto místě upozornit na důležitost předpokladu pravidelnosti vkladů. Nyní se budeme zabývat situací, kde je neznámou veličinou platební perioda.

Příklad 34. Uvažujme zadání předchozího příkladu. Jak často musíte ukládat částku 1 500 Kč, abyste při pololetním úročení s úrokovou sazbou 2,1 % dosáhli na konci úrokové periody cílové částky 9 110,25 Kč?

Řešení.

$$\begin{aligned} 9110,25 &= m \cdot 1500 \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot 0,021\right) \\ &\vdots \\ m &= 6. \end{aligned}$$

Odtud tedy plyne, že $\frac{6 \text{ měsíců}}{6}$*, což znamená, že platební perioda je jeden měsíc.*

Nesprávná odpověď je šest vkladů. Pouze správný počet vkladů není řešením daného příkladu, neboť konečná částka kapitálu se odvíjí také od výše připsaného úroku a jak již víme, je úrok funkcí úrokové sazby a času. Právě z tohoto důvodu je velmi důležité tuto skutečnost respektovat. Ukažme si, že rozdílná doba pro připsání úroků nám dá v konečném výsledku odlišné řešení. Pokud bychom tedy vložili 6 vkladů v posledním měsíci s pětidenními intervaly, pak konečná hodnota prostředků, které budeme mít k dispozici na konci šestého měsíce bude

$$\begin{aligned} FV_1 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6}\right) &= 1505,25 \\ FV_2 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6} \cdot \frac{25}{30}\right) &= 1504,38 \\ FV_3 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6} \cdot \frac{20}{30}\right) &= 1503,5 \\ FV_4 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6} \cdot \frac{15}{30}\right) &= 1502,63 \\ FV_5 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6} \cdot \frac{10}{30}\right) &= 1501,75 \\ FV_6 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{6} \cdot \frac{5}{30}\right) &= 1500,88. \end{aligned}$$

Celkově máme na konci úrokového období k dispozici 9 018,3751 což je odlišná částka oproti původnímu vkladovému plánu.

Příklad 35. Kolik prostředků budeme mít na konci úrokového období, pokud budeme ukládat vždy na začátku platebního období úložku ve výši 2.500 Kč. Víme, že úrok se připisuje každé čtvrtletí a roční úroková sazba činí 4,6 %.

Polhůtní spoření

Na rozdíl od výše uvedené problematiky bude první vklad proveden na konci platební periody. Protože musí být dodržena stejná prodleva mezi anuitami, pak každá z anuit bude realizována na konci platebního cyklu.

Ilustrujme si situaci v souladu s příkladem pro předlhůtní spoření v rámci jednoho úrokového období, kdy toto období bude zahrnovat opakované vklady. Pro součet budoucích hodnot jednotlivých vkladů nám bude stačit zjistit připsaný úrok u každého vkladu. Výsledná hodnota bude součtem samotných vkladů a připsaných úroků.

Období po kterou jsou jednotlivé vklady úročeny:

$$\begin{array}{rcc} FV_1 & \ldots & \dfrac{m-1}{m} \\ FV_2 & \ldots & \dfrac{m-2}{m} \\ FV_3 & \ldots & \dfrac{m-3}{m} \\ & \vdots & \\ FV_m & \ldots & \dfrac{m-m}{m} \end{array}$$

Výpočet dílčích úroků:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{m-1}{m} \\ I_2 &= \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{m-2}{m} \\ &\vdots \\ I_m &= \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{m-m}{m}. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} I_i &= \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{m-2}{m} + \ldots + \frac{1}{m} \cdot r \cdot \frac{0}{m} \\ &= \frac{r}{m^2} \cdot \left[(m-1) + (m-2) + \ldots + 1 + 0\right]. \end{aligned}$$

V zápise pro součet jednotlivých připsaných úroků můžeme opět identifikovat aritmetickou řadu. Součet této řady má následující tvar:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i = \frac{r}{m^2}\left[(m-1)+(m-2)+\ldots+0\right]$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{m} I_i = \frac{r}{m^2}\left[m\cdot\frac{m-1}{2}\right] = \frac{m-1}{2\cdot m}\cdot r.$$

Součet budoucích hodnot polhlůtních vkladů na konci úrokovacího období určíme jako

$$\sum_{i=1}^{n} FV_i = m\cdot x + m\cdot x\cdot\frac{m-1}{2m}\cdot r = m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m-1}{2m}\cdot r\right). \tag{2.4}$$

Na rozdíl oproti předlhůtnímu úročení bude délka úročení každého z vkladů zkrácena o dobu jednoho platebního období.

Příklad 36. Budeme vycházet z předchozího zadání ale k ukládání vkladů bude docházet na konci platební periody. Na konci měsíce po dobu půl roku budeme pravidelně ukládat částku 1 500 Kč, při úrokové sazbě 2,1 % a semianuálním úročení.

Řešení. *Získaná částka úroků:*

$$\sum_{i=1}^{6} I_i = 6\cdot 1500\cdot\frac{6-1}{2\cdot 6}\cdot 0,021 = 78,75.$$

Prostředky na konci úrokového období:

$$\sum_{i=1}^{6} FV_i = 6\cdot 1500\cdot\left(1+\frac{6-1}{2\cdot 6}\cdot 0,021\right) = 9078,75.$$

Do teď jsme uvažovali u předlhůtního i u polhůtního úročení budoucí hodnoty z vkladů pouze za jedno úrokovací období. Pokud však budeme spořit přes několik úrokovacích období, využijeme informace o spoření v rámci jednoho úrokovacího období a složeného úročení. Je nutné si uvědomit, že při pravidelných vkladech po celou dobu T bude suma naspořená v každém úrokovacím období identická. Částka získaná za jedno úrokovací období vstupuje do následujícího úrokovacího období jako počáteční kapitál. K připsání úroku dochází na konci každého úrokovacího období.

Nechť $\sum_{i=1}^{n} FV_i$ za jedno úrokovací období je rovno X. Pak můžeme součty lineárních zúročení dále nechat exponenciálně úročit přes celé T a můžeme psát v souladu se vzorcem (2.2) z úvodní části kapitoly o polhůtním spoření:

$$S = X \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

kde $X = \sum_{i=1}^{n} FV_i = m \cdot x \cdot \left[1 + \frac{m-1}{2m} \cdot r\right]$.

Rozdíl mezi předlhůtním a polhůtním spořením bude jak již bylo vysvětleno způsobeno posunem o jednu platební periodu. Tento rozdíl je zachycen pouze v rámci součtu úroků v rámci jednoho úrokovacího období.

Pro případ předlhůtního spoření tedy nabývá výraz následující tvar:

$$S^0 = m \cdot x \cdot \left[1 + \frac{m+1}{2m} \cdot r\right] \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{2.5}$$

Pro případ polhůtního spoření pak bude platit:

$$S^1 = m \cdot x \cdot \left[1 + \frac{m-1}{2m} \cdot r\right] \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \tag{2.6}$$

Příklad 37. Kolik naspoříte pravidelnými měsíčními úložkami ve výši 800 Kč za dobu deseti let předtlůtním a polhůtním způsobem spoření, jestliže roční úroková sazba činí 4 % a banka počítá úrok kvartálně.

Řešení. *Musíme si uvědomit jakou délku z pohledu času má úrokovací období a jakou délku představuje platební perioda. Zde vkládáme každý měsíc a banka připisuje úrok čtyřikrát ročně. Tedy během jednoho připsání úroků realizujeme tři vklady. Dále z pohledu délky procesu spoření a intervalu připisování úroků vidíme, že budeme mít celkově 40 úrokových období. Můžeme pro případ předlhůtního spoření zapsat:*

$$S^0 = 800 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{0,04}{4}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{40} - 1}{\frac{0{,}04}{4}} = 118109.$$

Analogicky pro případ polhůtního spoření bude platit:

$$S^1 = 800 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0,04}{4}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{40} - 1}{\frac{0{,}04}{4}} = 117718.$$

Vidíme, že ze všech vkladů jsou počítány budoucí hodnoty k okamžiku konce prvního úrokovacího období. Vklady v průběhu jednoho úrokovacího období jsou úročeny lineárním úročením. Pokud bychom chtěli vztáhnout hodnotu vkladů v rámci jedné úrokové periody na začátek úrokovacího období, pak je nutné přistoupit k této problematice z pohledu předlhůtního úročení. Prostým diskontováním bychom dostali odlišné výsledky konečné naspořené částky. Musíme si uvědomit, že pokud vztáhneme všechny platby jednoho úrokovacího období do času $t = 0$, pak musí platit, že zúročená suma těchto současných hodnot přes jedno úrokové období se musí rovnat sumě budoucích hodnot v rámci jednoho úrokovacího období, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} PV_i \cdot (1+r) = \sum_{i=1}^{n} FV_i. \tag{2.7}$$

Příklad 38. Na základě zadání předchozího příkladu ukažte platnost vzorce (2.7).

Řešení. *Nejdříve podle vzorce (2.3) určíme budoucí hodnotu vkladů*

$$\sum_{i=1}^{3} FV_i = 800 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot 0,01\right) = 2416.$$

Dále na základě vzorce (1.31) vypočteme současnou hodnotu vkladů k počátku úrokovacího období.

$$PV = FV(1 - d \cdot t),$$

kde jak již víme z látky o úročení $d = \frac{r}{1+r}$. *Pak*

$$\begin{aligned} PV_1 &= 800 \\ PV_2 &= 800 \cdot \left(1 - 0,009901 \cdot \frac{1}{3}\right) = 797,3597 \\ PV_3 &= 800 \cdot \left(1 - 0,009901 \cdot \frac{2}{3}\right) = 794,7195. \end{aligned}$$

Vypočteme

$$\sum_{i=1}^{3} PV_i = 2392,079.$$

Následně současnou hodnotu zúročíme.

$$2392,079 \cdot (1 + 0,01) = 2416.$$

Obdržený výsledek odpovídá výsledku při přímém výpočtu budoucí hodnoty (vzorci (2.7)).

Povšimněme si, že pokud bychom použili lineárního diskontování:

$$\begin{aligned} PV_1 &= 800 \\ PV_2 &= 800 \cdot \left(1 - 0,01 \cdot \frac{1}{3}\right) = 797,3422 \\ PV_3 &= 800 \cdot \left(1 - 0,01 \cdot \frac{2}{3}\right) = 794,702 \end{aligned}$$

tak nedosáhneme stejného výsledku, jako když přistoupíme k výpočtu prostřednictvím předlhůtního úročení.

$$\sum_{i=1}^{3} PV_i = 2392,044.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 61. Založili jsme si účet v bance, která nám připisuje úrok jednou ročně se sazbou 3 % p.a. Jak často musíme vkládat na účet polhůtně 3 000 Kč, abychom měli po 5 letech naspořených 387 752,73 Kč?
[24 (každé 2 týdny)]

Cvičení 62. Slečna Xenie si začala odkládat své peníze na spořicí účet v marné naději, že za 10 let s nimi začne nový život. Plánuje si odkládat 20 000 Kč na začátku každého pololetí při úrokové sazbě 8 % p. a. a ročním úročení. Po 5 letech banka však snížila úrok na 3 % p.a. Z úroků se platí daně. Kolik bude muset ukládat na účet v průběhu druhých 5 let, jestliže chce dosáhnout stejné sumy jako při původní úrokové sazbě?
[28 186,05 Kč]

Cvičení 63. Jednoho dne jsme obdrželi e-mail, že nám umřel vzdálený strýc z Jihoafrické republiky. Zdědili jsme částku 200 000 Kč. Tyto peníze jsme se rozhodli vložit na spořicí účet, kde budeme dále spořit po částkách 3 100 Kč vždy ke konci čtvrtletí. Banka poskytuje roční úročení se sazbou 3,25 % p.a. Za založení účtu banka z vkladů strhne poplatek ve výši dvou plánovaných průběžných vkladů (maximálně však 5 000 Kč). Dále se platí roční poplatek 150 Kč splatný ke konci roku. Za jak dlouho budeme mít na účtu 821 593,466 Kč? Za jak dlouho bude mít účet hodnotu milión Kč plus potřebné prostředky na roční poplatek?
[23 let; 27 let 4 měsíce a 7 dní]

Cvičení 64. Začali jsme spořit s úložkou 10 000 Kč ročně předlhůtně. Každý rok jsme odloženou sumu snížili o 500 Kč. Úroková sazba byla 8 % a úročení

roční. Přestali jsme spořit v roce, kdy byl vklad na účet nulový. Jak dlouho jsme spořili? Kolik jsme za tuto dobu naspořili? Jak by se výsledek změnil, kdyby byla frekvence spoření čtvrtletní? V případě, že nulový vklad nebude poslední v roce, zbytek roku se vklady už jenom úročí.
[21 let; 345 962,83 Kč; 6 let; 148 195,09 Kč]

2.1.3 $UO < PO$

Na rozdíl od předchozí podkapitoly nebudeme využívat pro případ delšího intervalu mezi vklady na účet než je časová prodleva mezi připsáním jednotlivých úroků lineárního úročení. Z důvodů popsaných v Kapitole věnované úrokovému počtu budeme volit spíše exponenciální úročení. Cílem je dosažení většího užitku z prostředků pro věřitele. Při všech výpočtech týkajících se anuitního počtu je tedy v první řadě nutné porovnat délky UO a PO.

Předlhůtní spoření
Jestliže budeme spořit takovým způsobem, že bude výhodnější exponenciální úročení z důvodu efektu úroku z úroků, pak při určování součtu budoucích hodnot jednotlivých úložek využijeme vlastností geometrické řady. Abychom mohli sečíst geometrickou řadu, musíme identifikovat kvocient. Na rozdíl od situace $UO = PO$ bude kvocient ovlivněn počtem úrokových period mezi dvěma vklady.

Označme jako r roční úrokovou míru, l počet úrokovacích období UO během jednoho roku, n počet let ve kterých probíhá spoření a m počet vkladů během jednoho roku. Pak

$$\begin{aligned}
FV_1 &= a \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}(n \cdot m)} \\
FV_2 &= a \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}(n \cdot m - 1)} \\
FV_3 &= a \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}(n \cdot m - 2)} \\
&\vdots \\
FV_{n \cdot m - 1} &= a \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m} \cdot 2} \\
FV_{n \cdot m} &= a \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m} \cdot 1}.
\end{aligned}$$

Je patrné, že se jedná o geometrickou řadu s kvocientem

$$\left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}}$$

,

proto celkový součet budoucích hodnot předlhůtních vkladů vypočteme jako

$$S^0 = a \cdot \left(1+\frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}} \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}\cdot m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}}-1}. \tag{2.8}$$

Příklad 39. Kolik budete mít naspořeno za jeden rok, pokud začnete ukládat 1. 1. své prostředky na bankovní účet v pravidelných čtvrtletních intervalech částku 5 000 Kč? Banka garantuje měsíční úrokovou sazbu 0,5 % a úrok počítá dvanáctkrát do roka.

Řešení.

$$\begin{aligned} FV_1 &= 5000 \cdot (1+0,005)^{12} = 5308,389 \\ FV_2 &= 5000 \cdot (1+0,005)^{9} = 5229,553 \\ FV_3 &= 5000 \cdot (1+0,005)^{6} = 5151,888 \\ FV_4 &= 5000 \cdot (1+0,005)^{3} = 5075,376 \\ \sum_{i=1}^{4} FV_i &= 20765,21. \end{aligned}$$

Je evidentní, že dílčí budoucí hodnoty tvoří geometrickou řadu, pro kterou existuje kvocient:

$$q = \frac{5000 \cdot (1+0,005)^{12}}{5000 \cdot (1+0,005)^{9}} = (1+0,005)^3.$$

Pro součet takové geometrické řady musí platit

$$S = a_1 \cdot \frac{(1+0,005)^{3n}-1}{(1+0,005)^3-1},$$

kde a_1 *je zúročený vklad od jednoho vkladu do druhého vkladu tedy* $5000 \cdot (1+0,005)^3$, *resp. úroky připsané k poslednímu vkladu, a počet UO (n) je* $3 \cdot 4 = 12$.

$$S^0 = 5000 \cdot (1+0,005)\frac{(1+0,005)^{12}-1}{(1+0,005)^3-1} = 20765,21.$$

Poznámka. *Exponent u kvocientu udává počet připsání úroků mezi dvěma vklady.*

Poznámka. *Uvedený příklad jde řešit i přes efektivní úrokovou sazbu odpovídající délce platebních intervalů:*

$$r_e = (1 + 0,005)^3 - 1 = 0,015075.$$

Pak

$$S^0 = 5000 \cdot (1 + 0,015075) \cdot \frac{(1 + 0,015075)^4 - 1}{0,015075} = 20765,21.$$

Polhůtní spoření

Na rozdíl od předlhůtního spoření je doba úročení každého vkladu zkrácena o délku jednoho vkladového období. Pro součet geometrické řady to tedy znamená takovou hodnotu prvního členu, který odpovídá výši úložky. Platí tedy

$$S^1 = a \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m} \cdot m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{r}{l}\right)^{\frac{l}{m}} - 1}. \tag{2.9}$$

Příklad 40. Uvažujme zadání předchozího příkladu, ale bude se jednat o polhůtní spoření.

Řešení. *Pro každý vklad dostáváme*

$$\begin{aligned} FV_1 &= 5000 \cdot (1 + 0,005)^9 = 5229,553 \\ FV_2 &= 5000 \cdot (1 + 0,005)^6 = 5151,888 \\ FV_3 &= 5000 \cdot (1 + 0,005)^3 = 5075,376 \\ FV_4 &= 5000 \cdot (1 + 0,005)^0 = 5000. \end{aligned}$$

Tedy celkem

$$\sum_{i=1}^{4} FV_i = 20456,82.$$

Nebo podle vzorce (2.9) *dostáváme*

$$S^1 = 5000 \cdot \frac{(1 + 0,005)^{12} - 1}{(1 + 0,005)^3 - 1} = 20456,82.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 65. Jak dlouho musíme odkládat na konci každých 9 měsíců 40 000 Kč, abychom naspořili 913 761,31 Kč? Peníze odkládáme na účet, který je úročen čtvrtletně se sazbou 6 % p.a.
[12 let]

Cvičení 66. Chceme naspořit 100 000 Kč na koupi předražené balalajky. Banka nabízí 2 týdenní úročení se sazbou 10 % p.a. Banka si účtuje poplatek 2 000 Kč na začátku každého roku spoření. Jak dlouho si budeme polhůtně čtvrtletně odkládat 1 000 Kč, abychom naspořili požadovanou částku? Kolik musí činit poslední vklad, abychom už nemuseli čekat, dokud se peníze nezúročí?
[18 let 8 měsíců a 20 hodin; 3 175,10 Kč]

2.1.4 Spojité úročení v procesu spoření

Pokud jsou jednotlivé úložky zhodnocovány spojitým připisováním úroků, jedná se o situaci, která odpovídá menší frekvenci vkladů vzhledem k počtu připsání úroků. V takovém případě je možné součet budoucích hodnot z jednotlivých úložek určit pomocí součtu geometrické řady. Opět musíme rozlišit, zda se jedná o předlhůtní či polhůtní formu spoření.

Příklad 41. Vyjdeme z předchozího Příkladu 39 pro předlhůtní spoření s měsíčním vkladem 5 000 Kč. Budeme uvažovat spojitý proces úročení, který zajistí stejný úrokový efekt jako u diskrétního úročení. Vypočtěte budoucí hodnotu jednotlivých vkladů.

Řešení. *Na základě vzorce pro úrokovou intenzitu* (1.19) *dostáváme roční intenzitu*

$$f = ln((1 + 0,005)^{12}) = 0,059850498.$$

Podle vzorce (1.20) *vypočteme budoucí hodnotu úložek (délky úročení jsou stanoveny v letech)*

$$\begin{aligned} FV_1 &= 5000\,\mathrm{e}^{0,059850498} = 5308,389 \\ FV_2 &= 5000\,\mathrm{e}^{0,059850498\cdot\frac{3}{4}} = 5229,553 \\ FV_3 &= 5000\,\mathrm{e}^{0,059850498\cdot\frac{2}{4}} = 5151,888 \\ FV_4 &= 5000\,\mathrm{e}^{0,059850498\cdot\frac{1}{4}} = 5075,376 \\ \sum_{i=1}^{4} FV_i &= 20765,21. \end{aligned}$$

Ke stanovení kvocientu stačí vydělit dvě po sobě následující budoucí hodnoty. Tedy

$$q = \frac{5000 \cdot \mathrm{e}^{f}}{5000 \cdot \mathrm{e}^{f\cdot\frac{9}{12}}} = \mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{4}}.$$

Pak

$$S^0 = 5000 \cdot \mathrm{e}^{\frac{0,059850498}{4}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{0,059850498\cdot\frac{4}{4}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,059850498}{4}} - 1} = 20765,21.$$

Obecně platí, že kvocient určený na základě dvou po sobě jdoucích členů geometrické řady vypočteme jako

$$\mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}}, \tag{2.10}$$

kde m je počet vkladů během jednoho roku. Tedy pro předlhůtní spoření stanovíme budoucí hodnotu jako

$$S^0 = a\cdot \mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}\cdot m\cdot n}-1}{\mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}}-1}. \tag{2.11}$$

Analogicky pro polhůtní spoření bude platit

$$S^1 = a\frac{\mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}\cdot m\cdot n}-1}{\mathrm{e}^{f\cdot\frac{1}{m}}-1}. \tag{2.12}$$

Příklady k procvičení

Cvičení 67. Kolik musíme ukládat na počátku každého čtvrtletí, abychom za 8 let naspořili 1 milión Kč? Náš účet je úročen spojitě s úrokovou intenzitou 0,066.
[23 528,01 Kč]

2.1.5 Zdanění v procesu spoření

Problematika placení daně již byla probrána v kapitole úrokového počtu. Nyní si ukážeme, jak lze postupovat pokud budou úroky připsané při spoření podléhat dani. Opět je nutné si uvědomit, že placená daň se vztahuje pouze na připsaný úrok v daném daňovém období a úrok již jednou zdaněný nebudeme opětovně zdaňovat.

Uvažujme nejprve situaci, kdy bude daň placena v okamžiku připsání úroku. Tuto daň nazýváme *srážkovou* daní. Jedná se o případ, kdy se úrokové období rovná daňovému období. V praktických výpočtech se do původních vzorců dosadí místo úrokové míry r úroková míra zatížená daní $r_{Tax} = r\cdot k$.

Příklad 42 ($UO > PO$)**.** Kolik bude činit naspořená částka za 10 let? Uvažujeme pravidelnou úložku ve výši 15 000 Kč na konci každého čtvrtletí. Roční úroková sazba činí 3,7 % a banka počítá úrok dvakrát ročně. V době připsání, je z připsaného úroku odváděna daň ve výši 15 %.

Řešení. *Je nutné stanovit úrokové období, které v tomto případě činí šest měsíců. Celkově tedy za dobu T bude 20 úrokovacích období. Dále víme, že* *během jednoho připsání úroků budou provedeny dva vklady. Každý připsaný úrok bude zkrácen o daňovou povinnost 15 %. Jedná se o polhůtní úročení, proto bude výraz reprezentující poměrnou část času psán ve tvaru $m-1$. Tedy*

$$\begin{aligned} S^1 &= 15000 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2-1}{2\cdot 2} \cdot \frac{0,037}{2} \cdot (1-0,15)\right) \\ &\cdot \quad \frac{\left[1 + \frac{0,03}{2} \cdot (1-0,15)\right]^{2\cdot 10} - 1}{\frac{0,037}{2}(1-0,15)} = 704177,504. \end{aligned}$$

Příklad 43 ($UO < PO$)**.** Jakou částku naspoříme za 10 let, pokud budeme ukládat v pravidelných čtvrtletních intervalech částku 40 000 Kč. První vklad provedeme v čase $t = 0$. Víme dále, že banka garantuje roční úrokovou sazbu ve výši 3,9 % a úrok připisuje v měsíčních intervalech. Z připsaných úroků v době připsání se obratem odvádí srážková daň ve výši 15 %.

Řešení.

$$\begin{aligned} S^0 &= 40000 \cdot \left[1 + \frac{0,039\cdot(1-0,15)}{12}\right]^3 \frac{\left[1 + \frac{0,039\cdot(1-0,15)}{12}\right]^{3\cdot 4\cdot 10} - 1}{\left[1 + \frac{0,039\cdot(1-0,15)}{12}\right]^3 - 1} \\ &= 1904505,424. \end{aligned}$$

Daň může být dále *placena periodicky*, kdy během jedné daňové periody (daňové období - DO) může být realizováno několik vkladů a rovněž se může vyskytnout během jednoho daňového období několik zúročení, tedy platí $UO < DO$. Zde je nutné pro výpočet daňové povinnosti separovat čisté vklady a získat tak připsaný úrok, ze kterého se odvede daň.

Pro naspořenou částku po zdanění za jedno daňové období platí

$$X_{tax} = (X - m\cdot x)\cdot k + m\cdot x, \tag{2.13}$$

kde X je hodnota naspořená během jednoho daňového období, $m\cdot x$ je suma vkladů za jedno daňové období.

Pak pro budoucí hodnoty naspořených částek během jednoho daňového období platí

$$\begin{aligned} FV_1 &= X_{Tax}(1 + r_{ef}\cdot k)^{n-1} \\ FV_2 &= X_{Tax}(1 + r_{ef}\cdot k)^{n-2} \\ FV_3 &= X_{Tax}(1 + r_{ef}\cdot k)^{n-3} \\ &\vdots \\ FV_{n-1} &= X_{Tax}(1 + r_{ef}\cdot k) \\ FV_n &= X_{Tax}. \end{aligned}$$

Odtud tedy pro naspořenou částku dostáváme

$$S_{Tax} = [(X - m \cdot x) \cdot k + m \cdot x] \cdot \frac{(1 + r_{ef} \cdot k)^n - 1}{r_{ef} \cdot k}, \tag{2.14}$$

kde r_{ef} je efektivní úroková míra jednoho daňového období a n je počet daňových období.

Příklad 44 ($UO > PO$). Zjistěte naspořenou částku za 7 let pravidelným předlthůtním měsíčním spořením, kdy ukládáte částku 1 500 Kč. Banka nabízí roční úrokovou sazbu 3,5 % a úrok počítá na čtvrtletní bázi. Z připsaného úroku odvádíte ročně daň ve výši 15 %.

Řešení. *Nejdříve vypočítáme částku, kterou budeme mít na konci prvního zdaňovacího období, tj. za jeden rok:*

$$X = 1500 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{0,035}{4}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 1}{\frac{0,035}{4}} = 18344.$$

Protože během jednoho připsání úroků uložíme třikrát spořenou částku, využijeme lineárního úročení. Jelikož je daň placená jednou ročně, tak přes jednotlivá čtvrtletní úroková období budeme využívat exponenciálního úročení. Po celou dobu 7 let uvažujeme pravidelné měsíční úložky, proto do jednoho daňového období přes úroková období využíváme součtu geometrické řady, která má kvocient roven $q = 1 + r_{měsíční}$. Dále odvedeme daň z připsaného úroku:

$$Tax = (18344 - 1500 \cdot 12) \cdot 0,15 = 51,6026.$$

Na konci každého roku po zdanění budeme mít k dispozici:

$$X_{tax} = 18344 - 51,6026 = 18292,4.$$

Tato částka přibude každý rok a následně se bude úročit a odvádět daň pouze z nově připsaného úroku:

$$\begin{aligned}
\left[18292,4 \cdot \left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 18292,4\right] \cdot 0,85 + 18292,4 &= 18843,8 \\
\left[18843,8 \cdot \left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 18843,8\right] \cdot 0,85 + 18843,8 &= 19411,8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tento postup bude aplikován na všechny ročně naspořené zdaněné částky. Následně tedy získáme geometrickou posloupnost, která bude mít počet členů rovný počtu let (daňových období). Kvocient této geometrické posloupnosti bude tvaru:

$$1 + r_{ef} \cdot k = \left(\left(1 + \frac{0,035}{4} \right)^4 - 1 \right) \cdot 0,85 + 1,$$

kde r_{ef} je roční efektivní sazba.

Výraz pro akumulační faktor jednoho úrokovacího období určíme součtem geometrické řady přes jednotlivá daňová období

$$S^0 = X_{tax} \cdot \frac{(r_{ef} \cdot k + 1)^7 - 1}{r_{ef} \cdot k}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} S^0 &= 1500 \cdot 3 \cdot \left[\left(\left(1 + \frac{3+1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{0,035}{4} \right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 4}{\frac{0,035}{4}} - 1 \right) \cdot 0,85 + 4 \right] \\ &\cdot \frac{\left[\left(\left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right]^7 - 1}{\left[\left(1 + \frac{0,035}{4}\right)^4 - 1 \right] \cdot 0,85} = 140225,52. \end{aligned}$$

Příklad 45 ($UO < PO$)**.** Kolik prostředků budeme mít k dispozici za sedm let spoření, jestliže budeme ukládat pravidelně každé čtvrtletí částku 6 000 Kč a banka nám bude připisovat měsíčně úrok s úrokovou sazbou 0,006 p.m. Uvažujme polhůtní vklady, tedy první úložka následuje na konci prvního čtvrtletí. Každý rok odvedeme z připsaných úroků daň ve výši 15 %.

Řešení. *Nejprve sečteme geometrickou řadou naspořenou částku za jedno daňové období, tj. jeden rok:*

$$X = 6000 \cdot \frac{(1 + 0,006)^{3 \cdot 4} - 1}{(1 + 0,006)^3 - 1} = 24659,8$$

$$X_{tax} = (24659,8 - 4 \cdot 6000) \cdot 0,85 + 4 \cdot 6000 = 24560,83.$$

Následně sečteme posloupnost přes jednotlivé roky, tj. daňová období:

$$S^1 = X_{tax} \cdot \frac{\left[\left((1 + 0,006)^{3 \cdot 4} - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right]^7 - 1}{\left[(1 + 0,006)^{3 \cdot 4} - 1 \right] \cdot 0,85} = 208220,39.$$

Příklad 46. Vyjděme ze zadání předchozího příkladu s tím rozdílem, že úroky budou počítány spojitě pří úrokové intenzitě f = 3,5892 % .

Řešení. *Opět je nutné postupně sčítat dvě geometrické posloupnosti. Nejprve sečteme naspořenou částku, resp. připsaný úrok během jednoho daňového období:*

$$\begin{aligned} X &= 6000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{0,035892} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,035892}{4}} - 1} = 24326,4 \\ Tax &= (24326,4 - 24000) \cdot 0,15 = 48,96596 \\ X_{tax} &= 24326,4 - 48,96596 = 24277,47 \end{aligned}$$

Obecný zápis pro součet posloupnosti v jednom zdaňovacím období můžeme zjednodušeně zapsat:

$$X_{tax} = a \cdot \left[\left(\frac{\mathrm{e}^{f} - 1}{\mathrm{e}^{f \cdot \frac{1}{m}} - 1} - m \right) \cdot 0,85 + m \right]. \tag{2.15}$$

Nyní zbývá sečíst posloupnost přes jednotlivá daňová období s kvocientem $q = \left(e^{f} - 1\right) \cdot 0,85 + 1$. *Tedy můžeme rozepsat jako:*

$$S^{1} = X_{tax} \cdot \frac{\left[\left(\mathrm{e}^{0,035892} - 1 \right) \cdot 0,85 + 1 \right]^{7} - 1}{\left(e^{0,035892} - 1 \right) \cdot 0,85} = 186624,5.$$

Poslední z možný případů placení daně je situace *jednorázového odvodu.* Záležitost je poměrně jednoduchá, neboť je potřeba pouze vyjádřit celkovou část připsaných úroků a ty následně zdanit.

Příklad 47. Kolik bude činit naspořená částka po zdanění za 12 let, pokud vkládáme prostředky jedenkrát za dva měsíce a banka připisuje úrok spojitě. Výše pravidelné úložky činí 1 400 Kč a uvažujeme předlhůtní spoření. Úroková intenzita je 2,7 %. V době realizace naspořené částky zaplatíme jednorázovou daň ve výši 15 % z připsaných úroků.

Řešení.

$$S^{0} = 1400 \cdot \left[\left(\mathrm{e}^{\frac{0,027}{6}} \frac{\mathrm{e}^{0,027 \cdot 12} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,027}{6}} - 1} - 6 \cdot 12 \right) \cdot 0,85 + 6 \cdot 12 \right] = 116536,80.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 68. Hamižná paní Jepicová požaduje, aby se vklady na jejím spořícím účtu za půl roku zhodnotily o 5 % (před zdaněním). Své vklady ukládá měsíčně předlhůtně. Banka připisuje úroky na konci každého půlroku. Daně z úroků 15 % se platí na konci každého roku. Kolik bude mít naspořeno za 13 let, jestliže bude vkládat 1 000 Kč měsíčně.
[454 648,9026 Kč]

Cvičení 69. Máme v plánu spořit 20 let po 2 000 Kč měsíčně polhůtně a následně dalších 23 let 4 000 Kč měsíčně polhůtně. Máme na výběr 3 účty:

- Účet A: sazba 3,50 % p.a. při čtvrtletním úročení, poplatek za zřízení 1500 Kč, roční poplatek za vedení účtu 190 Kč.
- Účet B: sazba 3,55 % p.a. při pololetním úročení, poplatek za zřízení 2 000 Kč, roční poplatek za vedení účtu 350 Kč.
- Účet C: sazba 3,60 % p.a. při ročním úročení, poplatek za zřízení 1 400 Kč, roční poplatek za vedení účtu 470 Kč.

Poplatky se strhávají z účtu na konci roku. Na konci roku se též platí daň 15 % z připsaných úroků. Který účet se nám nejvíc vyplatí?
[Účet C přináší nejvyšší zhodnocení (A: 2 065 457,44 Kč; B: 2 065 483,23 Kč; C: 2 065 586,56 Kč)]

Cvičení 70. Pan Podržveslo se rozhodl naspořit si na jachtu. Odkládal si pololetně předlhůtně 20 000 Kč. Měl v plánu spořit 20 let. Úroková sazba na účtu byla 4 % p.a. Jelikož se jedná o prominentního klienta, banka mu poskytla spojité úročení (4 % je roční úroková intenzita). Po 5 letech mu banka změnila podmínky úročení vkladů. Poskytovala mu jenom měsíční úročení (se stejnou sazbou). Po dalších pěti letech mu banka změnila úročení na čtvrtletní (se stejnou sazbou). Po dalších pěti letech banka změnila úročení na pololetní. Po dalších pěti letech naznal pán Podržveslo, že je načase peníze z banky vybrat. Kolik měl k dispozici peněz na nákup jachty? Jak by se situace změnila, kdyby musel platit ke konci roku daně z úroků 15 %?
[1 234 502,06 Kč; 1154179,42 Kč]

Cvičení 71. Banka poskytuje čtvrtletní úročení se sazbou 1 % p.q. Slečna Božka okouzlila při sjednání spořicího účtu zaměstnance banky natolik, že ji nabídli spojité úročení vkladů (se stejnou efektivitou). Spořit plánuje 6 let a chce ukládat 4 000 Kč na konci měsíce. Z úroků se platí daň 15 % na konci roku. Kolik za tuto dobu naspoří?
[319 858,09 Kč]

Cvičení 72. K 1. 1. 2010 jsme si založili spořicí účet. Cílová suma, kterou chceme mít na účtu 31. 12. 2015 je 200 000 Kč. Za založení účtu jsme zaplatili poplatek 1 000 Kč. Chceme spořit měsíčně polhůtně sumu 2 500 Kč. Úroková sazba činí 2 % a úročení je roční (z úroků se platí daň). Za vedení účtu si banka na konci každého měsíce účtuje 20 Kč. Státní podporu za ukončený rok spoření, dostáváme vždy k 1. 4. následujícího roku (první státní prémii teda dostaneme 1. 4. 2011). Za poslední rok spoření dostaneme státní prémii k poslednímu dni spoření. Kolik musí být konstantní státní prémie, abychom dosáhli cílové částky v daném čase? BONUS: Jak by se situace změnila, kdybychom peníze neukládali na koci měsíce, ale uprostřed? (zohledníme fakt, že mzdy přicházejí na účet kolem 10. v měsíci a trvá několik dní než se přesunou na spořící účet)
[2 122,53 Kč; 2 101,21 Kč]

Cvičení 73. Měli jsme sjednané spoření na 12 let. Vkládali jsme 30 000 Kč na konci roku. 4 roky před koncem spoření jsme vyhráli v loterii. Celou výhru jsme dali na spořicí účet. Do konce doby spoření se zhodnotila o polovinu. Na konci spoření jsme měli k dispozici 1 000 000 Kč. Kolik jsme vyhráli v loterii? Kolik byla úroková sazba, jestli bylo úročení čtvrtletní a úroky se danily na konci roku?
[221 417,84 Kč; 12 %]

Cvičení 74. Kolik naspoříme za 11 let, jestli každý následující vklad zvýšíme o 4 %? První vklad při založení účtu bude 50 000 Kč. Frekvence vkládaní i úročení je roční. Úroková sazba je 5 % p.a. v průběhu celé doby spoření. Jak by se situace změnila v případě že

a) růst vkladů bude taky 5 %.

b) budeme spořit čtvrtinovým vkladem, při čtvrtletní frekvenci vkladů a úročení. Úroky z vkladů se daní. Růst vkladů bude taky čtvrtinový (1 %).

[897 147,83 Kč; 940 686,65 Kč; 864 642,33 Kč]

2.1.6 Spoření a inflace

V případě, že uvažujeme „znehodnocení“ naspořené částky v důsledku růstu cenové hladiny během procesu spoření, budeme využívat informace získané o reálném úroku, neboť skutečný dopad na kapitál bude zprostředkován právě reálnou úrokovou sazbou. Reálnou úrokovou sazbu určenou podle vzorce (1.22) pak budeme aplikovat na výše uvedené varianty příkladů.

Příklad 48. Stanovte reálnou hodnotu naspořené částky předlhůtním spořením během 15 let spoření. Úložky jsou v pravidelných čtvrtletních intervalech ve výši 5 000 Kč a banka garantuje roční úrokovou sazbu 4 % a připisuje úrok měsíčně. Průměrná roční výše inflace činí 1,7 %.

Řešení.

$$r_r = \frac{1+r_n}{1+\pi} - 1 = \frac{\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{12}}{(1+0,017)-1} = 0,02334.$$

Pak

$$S^0 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{0,02334}{12}\right)^3 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}02334}{12}\right)^{3\cdot 4\cdot 15} - 1}{\left(1+\frac{0{,}02334}{12}\right)^3} - 1 = 360203.$$

V případě úroku je nutné si uvědomit, že je nutné používat roční efektivní úrokovou sazbu, neboť je většinou známá roční míra inflace.
Příklady k procvičení

Cvičení 75. Začali jsme spořit ve 23 letech. Ukládali jsme 60 000 Kč každého půlroku polhůtně po dobu 5 let, úročení bylo roční. Potom jsme dalších 6 let ukládali 120 000 Kč na začátku každého roku. Úročení bylo pololetní. A nakonec jsme spořili 7 let po 10 000 Kč na konci měsíce. Úročení bylo spojité. Potom už jste nespořili, jenom jste nechali peníze ležet na účtu (podmínky úročení se už neměnily). Po celou dobu byly peníze na jednom účtu, jenom se měnili jeho podmínky. Úroková sazba, respektive úroková intenzita, byla 4 % p.a. po celou dobu. Jaká bude reálna hodnota naspořených prostředků, jestliže během celé doby spoření a úročení byla inflace 2,7 % ročně?
[2 181 091,51 Kč]

2.1.7 Spoření, daň a inflace

Připomeňme, že daň se vždy odvádí z nominální výše úroku, resp. z nominální úrokové míry. Z toho plyne, že dopad cenové hladiny bude zohledněn až po zdanění.

Příklad 49. Budeme vycházet ze zadání Příkladu 48. Každý rok budeme odvádět daň z připsaných úroků ve výši 15 %. Jaká bude reálná hodnota po zdanění naspořených prostředků a kolik bude činit celková výše odvedené daně?

Řešení. *Na základě vzorce (1.13) vypočteme efektivní úrokovou sazbu*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1 = 0,040742.$$

Podle vzorce (2.8) budeme mít na konci každého roku částku

$$X = 5000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^3 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{3} - 1} = 20506,73.$$

Splatná daň se vztahuje pouze na připsaný úrok, tedy

$$tax = (20506,73 - 20000) \cdot 0,15 = 76,01.$$

Částka po zdanění:

$$X = 20430,72.$$

Jednotný zápis k vyjádření akumulovaných prostředků na konci každého daňového období:

$$X = 5000 \cdot \left\{ \left[\left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^3 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{3} - 1} - 4 \right] \cdot 0,85 + 4 \right\} = 20430,72.$$

Dále se tato částka bude vytvářet každý rok. Z takto naakumulovaného kapitálu se bude připisovat úrok, který na konci roku bude zdaněn. Konečné budoucí hodnoty budou tvořit geometrickou řadu, kde do kvocientu bude vstupovat efektivní úroková sazba snížena o efekt zdanění

$$S^0_{tax} = 20430,72 \cdot \frac{(1 + 0,040742 \cdot 0,85)^{15} - 1}{0,040742 \cdot 0,85} = 393150,65.$$

Nyní ještě zbývá zohlednit vliv inflace na hodnotu kapitálu

$$S^0_{tax+\pi} = \frac{393150,65}{(1 + 0,017)^{15}} = 305312,58.$$

Celková částka odvedené daně za 15 let bude činit

$$\begin{aligned} Tax &= 5000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^3 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{3\cdot4\cdot15} - 1}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{3} - 1} - 393150,65 \\ &= 19737,54. \end{aligned}$$

Příklady k procvičení

Cvičení 76. Chceme spořit 12 let. Máme v plánu odkládat si 2 000 Kč počátkem každého měsíce. Účet je úročen pololetně se sazbou 4 % p.a. a z úroků se platí daň 15 % splatná na konci roku. Během celé doby spoření předpokládáme inflaci 1,1 %. Kolik máme po 12 letech reálně naspořeno? O kolik (v desítkách korun) bychom museli každoročně zvednout měsíční vklady, aby se pokryl efekt inflace?
[311 846,23 Kč; 60 Kč]

2.2 Důchody

V oblasti důchodového počtu se budeme zabývat současnými hodnotami částek vyplacených v budoucnu. Uvedená problematika bude navazovat na jednotlivé modelové situace probrané v Podkapitole Spoření. Budeme se zabývat také věčným důchodem a ukážeme si aplikaci časové hodnoty kapitálu u karenčního důchodu. Princip důchodového počtu je založen na kalkulaci částky, ze které následně budou vypláceny anuity v průběhu daného časového intervalu. Tato částka musí být rovna součtu současných hodnot budoucích anuit.

Při řešení problematiky důchodů můžeme často využít postupy využívané již v Podkapitolách věnovaných spoření. Platí totiž identita

$$\sum_{i=1}^{n} PV_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} FV_i}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^{n} FV_i \cdot v^n, \tag{2.16}$$

kde

$$v = \frac{1}{1+r}. \tag{2.17}$$

2.2.1 $UO = PO$

Stejně jako u spoření i v případě důchodů je nutné rozlišovat délku úrokového období a prodlevu mezi jednotlivými výplatami důchodu. Pro pochopení dané problematiky začneme nejprve příkladem, kdy časový interval mezi výplatami a úrokovým obdobím budou stejné.

Předlhůtní důchod

Analogicky jako u hledání budoucích hodnot anuit je nutné rozlišovat, bude-li výplata realizována na začátku výplatního cyklu (předlhůtní důchod) nebo naopak na konci výplatního cyklu (polhůtní důchod).

Příklad 50. Kolik bude činit potřebná částka kterou si zabezpečíme pravidelný důchod vyplácený měsíčně vždy na začátku měsíce? Částka, kterou budeme pobírat činí 12 000 Kč a finanční instituce, která se bude starat o naše fondy garantuje úrokovou sazbu 0,5 % p.m. při měsíčním připisování úroků. Důchod budeme pobírat po dobu 10 let.

Řešení.

$$\begin{aligned}
PV_1 &= 12000 \\
PV_2 &= \frac{12000}{1+0,005} = 11940,3 \\
PV_3 &= \frac{12000}{(1+0,005)^2} = 11880,89 \\
&\vdots \\
PV_{120} &= \frac{12000}{(1+0,005)^{119}} = 7316,29.
\end{aligned}$$

Určení kvocientu:

$$q = \frac{\frac{12000}{1+0,005}}{12000} = \frac{\frac{12000}{(1+0,005)^2}}{\frac{12000}{1+0,005}} = \ldots = \frac{1}{1+0,005}.$$

Kvocient odpovídá výrazu pro diskontní faktor $v = \frac{1}{1+r}$. Následně můžeme dosadit do obecného vzorce pro součet geometrické řady:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

kde za a_1 dosazujeme současnou hodnotu první výplaty, tedy v případě předlhůtního důchodu je to právě výše anuity. Je důležité si uvědomit, že hodnota kvocientu za předpokladu existence kladných úrokových sazeb bude nabývat hodnoty vždy menší než 1 a proto zapisujeme součet geometrický řady v tomto tvaru. Součet současných hodnot vyplacených anuit u předlhůtního důchodu budeme značit D^0.

$$D^0 = 12000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,005)^{12\cdot 10}}}{1 - \frac{1}{1+0,005}} = 108628,5847.$$

Protože úrokové období představuje jeden měsíc, tak do exponentu (počtu úrokových období) dosazujeme 12 měsíců · 10 let.

Potřebná výše kapitálu k zajištění desetiletého důchodu je menší než skutečně vyplacené anuity ($12 \cdot 12000 \cdot 10 = 1440000$). Je to z toho důvodu, že naše prostředky, které leží u vybraného finančního ústavu jsou po celou dobu vyplacení důchodu úročeny.

Vývoj hodnoty vstupního kapitálu určeného na výplatu důchodu lze zapsat následovně:

po první výplatě	$D^0 - a$
po druhé výplatě	$(D^0 - a) \cdot (1 + r) - a$
po třetí výplatě	$[(D^0 - a) \cdot (1 + r) - a] \cdot (1 + r) - a$
$\vdots$	$\vdots$
po poslední výplatě	$[(D^0 - a) \cdot (1 + r) - a] \cdot (1 + r) - a] \dots) \cdot (1 + r) - a = 0.$

Roznásobením závorek ve výrazu v posledním řádku tabulky dostaneme vyjádření důchodu jako součtu diskontovaných anuit.

$$\begin{aligned} D^0 &= a + \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+r)^{n-1}} \\ &= a + a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^{n-1}. \end{aligned}$$

Součtem této geometrické řady dostáváme obecný vzorec pro předlhůtní důchod ve tvaru:

$$D^0 = a \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}. \tag{2.18}$$

Obdobně jako jsme si u spoření zavedli pojem střadatel, zavádíme u důchodu pojem *zásobitel předlhůtní*, který nám uvádí současnou hodnotu jednotkových důchodů.

$$z^0 = \frac{1 - v^n}{1 - v}.$$

Polhůtní důchod

Narozdíl od předchozího případu se bude polhůtní důchod vyznačovat tím, že první realizovaná platba důchodu bude až na konci platebního obodbí. Z toho plyne, že u každé anuity bude o jedno diskontování více.

Příklad 51. Uvažujme zadání příkladu 50 s tím rozdílem, že k výplatám důchodů bude docházet na konci měsíce.

Řešení.

$$\begin{aligned} PV_1 &= \frac{12000}{1 + 0,005} = 11940,3 \\ PV_2 &= \frac{12000}{(1 + 0,005)^2} = 11880,89 \\ PV_3 &= \frac{12000}{(1 + 0,005)^3} = 11821,79 \\ &\vdots \\ PV_{120} &= \frac{12000}{(1 + 0,005)^{120}} = 6595,59. \end{aligned}$$

Jednotlivé současné hodnoty v budoucnu vyplácených anuit představují členy geometrické řady, která má následující kvocient:

$$q = \frac{\frac{12000}{(1+0,005)^2}}{\frac{12000}{1+0,005}} = \frac{\frac{12000}{(1+0,005)^3}}{\frac{12000}{(1+0,005)^2}} = \dots = \frac{\frac{12000}{(1+0,005)^{119}}}{\frac{12000}{(1+0,005)^{120}}} = \frac{1}{1+0,005}.$$

Kvocient zůstává stejný jako u předlhůtního důchodu. První výplata je realizována až na konci platební periody, a proto je nutné vztáhnout ji do okamžiku $t = 0$, tedy diskontovat ji jednu o délku platební periody navíc. Tedy

$$\begin{aligned} D^1 &= \frac{12000}{1+0,005} + \frac{12000}{(1+0,005)^2} + \frac{12000}{(1+0,005)^3} + \dots + \frac{12000}{(1+0,005)^{120}} \\ &= \frac{12000}{1+0,005} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,005)^{120}}}{1 - \frac{1}{1+0,005}} \\ &= 1080881,44. \end{aligned}$$

Pokud srovnáme výsledky potřebného kapitálu na zajištění 120 pravidelných měsíčních výplat ve výši 12 000 Kč, tak vidíme, že v případě polhůtního úroku potřebujeme o 5 404,41 Kč nižší částku. Úspora v uvedené výši je zajištěna tím, že každá z anuit byla úročena o jedno platební období déle, tudíž byla potřebná nižší částka na pořízení tohoto důchodu.

Obecný zápis součtu anuit pro předlhůtní důchod:

$$D^1 = a \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = a \cdot \frac{1 - v^n}{r} \tag{2.19}$$

Pak pro *zásobitel polhůtní* neboli jednotkový důchod platí výraz:

$$z^1 = \frac{1 - v^n}{r}.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 77. Vyhráli jsme v sázce 300 000 Kč. Peníze si vložíme na účet úročený čtvrtletně se sazbou 8 % p.a. Necháme si vyplácet čtvrtletní předlhůtní důchod po dobu 10 let. Kolik bude činit čtvrtletní anuita? O kolik vzroste anuita, když bude vyplácená polhůtně?
[10 751,69 Kč; 251,03 Kč]

2.2.2 $UO > PO$

Pro případ, kdy výplaty důchodu dosahují vyšší frekvence než je připsání úroků z vložené částky u finančního ústavu, budeme kombinovat lineární a exponenciální úročení. Motivací je opět výhoda lineárního úročení nad exponenciálním během jedné úrokové periody. V zásadě můžeme postupovat dvěma způsoby. Můžeme spočítat budoucí hodnotu vyplacených anuit během jednoho připsání úroků (postupujeme prospektivně). Následně musíme získanou sumu diskontovat na současnou hodnotu k počátku úrokovacího období.

Druhou možností je použití diskontní sazby (retrospektivní postup), kdy všechny během jednoho úrokového období realizované platby anuity vztáhneme k časovému okamžiku $t = 0$. Pro určení současné hodnoty každé z anuit se využije vzorec (1.31).

Předlhůtní důchod

Budeme-li uvažovat m předlhůtních anuit během jednoho úrokovacího období, pak hodnotu předlhůtního důchodu určíme jako

$$D^0 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r}. \tag{2.20}$$

Příklad 52. Uvažujme výplaty důchodu pouze během jednoho roku. Výplaty se budou realizovat čtyřikrát do roka vždy na začátku čtvrtletí a bankovní instituce bude připisovat úrok jeden krát ročně. Nechť je výše anuity 100 Kč a roční úroková míra 10 %. Kolik bude činit hodnota těchto čtyř výplat na konci roku, tj. v době připsání úroků? Kolik bude činit současná hodnota předlhůtního důchodu?

Řešení. *Budoucí hodnota anuit ke konci úrokovacího období je*

$$\sum_{i=1}^{4} FV_i = 100 \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0,1\right) = 425.$$

Současnou hodnotu dostaneme diskontováním předešlého výrazu

$$\sum_{i=1}^{n} PV_i = 100 \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0,1\right) \frac{1}{1+0,1} = 386,36.$$

Pro výpočet současné hodnoty anuit je možné použít také diskontování pomocí předlhůtního úročení. Diskontní míru stanovíme podle vzorce (1.32). *Pak*

$$d = \frac{0,1}{1,1} = 0,0909091.$$

Současné hodnoty jednotlivých anuit můžeme psát jako

$$\begin{aligned}
PV_1 &= 100 \cdot (1 - 0,0909091 \cdot 0) = 100 \\
PV_2 &= 100 \cdot \left(1 - 0,0909091 \cdot \frac{1}{4}\right) = 97,727 \\
PV_3 &= 100 \cdot \left(1 - 0,0909091 \cdot \frac{2}{4}\right) = 95,455 \\
PV_4 &= 100 \cdot \left(1 - 0,0909091 \cdot \frac{3}{4}\right) = 93,1818 \\
\sum_{i=1}^{4} PV_i &= 386,3636.
\end{aligned}$$

Pokud je výpočet korektní, pak musí platit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} PV_i \cdot (1 + r) &= \sum_{i=1}^{4} FV_i \\
386,3636 \cdot 1,1 &= 425,
\end{aligned}$$

což je v souladu s naším výpočtem.

Nyní provedeme obecné odvození současné hodnoty předlhůtního důchodu. Odvození probíhá obdobně jako u spoření při polhůtním úročení. Mějme částku 1, kterou během jedné úrokové periody rozdělíme na pravidelné platby ve výši $\frac{1}{m}$. Pak hodnota připadající na předhlůtní úrok z každé anuity se vyjádří následovně:

$$\begin{aligned}
PV_1 &= \frac{1}{m} \cdot d \cdot \frac{m - m}{m} \\
PV_2 &= \frac{1}{m} \cdot d \frac{m - (m-1)}{m} \\
PV_3 &= \frac{1}{m} \cdot d \frac{m - (m-2)}{m} \\
&\vdots \\
PV_m &= \frac{1}{m} \cdot d \frac{m-1}{m} \\
\sum_{i=1}^{m} PV_i &= \frac{1}{m^2} \cdot d \cdot [0 + 1 + 2 + \ldots + (m-1)].
\end{aligned}$$

Na rozdíl od odvození vzore pro spoření (odvození vzorce (2.3)) se jedná o rostoucí aritmetickou řadu s diferencí 1. Zobecněný zápis pro výpočet PV všech předhůtních anuit k časovému okamžiku $t = 0$ je tvaru:

$$D^0 = \sum_{i=1}^{n} PV_i = x \cdot m \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot d\right), \tag{2.21}$$

kde x je výše anuity.

Polhůtní důchod

Současná hodnota součtu anuit ke konci úrokovacího období je rovna

$$D^1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r}. \tag{2.22}$$

Analogicky můžeme odvodit výraz pro sumaci současných hodnot u polhůtní platby anuit:

$$D^1 = \sum_{i=1}^{n} PV_i = x \cdot m \cdot \left(1 - \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot d\right), \tag{2.23}$$

Výplata důchodů po dobu několika úrokovacích období

Budeme-li uvažovat výplatu důchodů po dobu několika úrokovacích období, využijeme pro odvození vzorce součtu geometrické řady. Pro zjištění současné hodnoty předlhůtního důchodu budeme využívat diskontování budoucích hodnot jednotlivých výplat důchodu v jednotlivých úrokovacích obdobích.

$$D^0 = \frac{X^1}{1+r} + \frac{X^1}{(1+r)^2} + \frac{X^1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{X^1}{(1+r)^n}$$

nebo

$$D^0 = X^0 + \frac{X^0}{1+r} + \frac{X^0}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{X^0}{(1+r)^{n-1}},$$

kde $X^0 = m \cdot x \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot d\right)$ a $X^1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r\right)$.

Po součtu těchto geometrických řad bude výraz pro *předlhůtní důchod* nabývat této podoby:

$$D^0 = X^0 \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = X^1 \cdot \frac{1-v^n}{r}. \tag{2.24}$$

Pro *důchod polhůtní* pak analogicky dostaneme:

$$D^1 = X^0 \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = X^1 \cdot \frac{1-v^n}{r}, \tag{2.25}$$

kde $X^0 = m \cdot x \cdot \left(1 - \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot d\right)$ a $X^1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot r\right)$.

Příklad 53. Kolik peněžních prostředků musíme nashromáždit, abychom byli schopni zajistit pravidelné čtvrtletní výplaty po dobu 25 let ve výši 40 000 Kč. Víme, že finanční ústav bude po celou dobu garantovat úrokovou sazbu 2,5 % s ročním připisováním úroků. Jedná se o předlhůtní důchod.

Řešení. *Podle vzorce* (2.24) *dostaneme*

$$D^0 = 4 \cdot 40000 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0,025\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0,025)^{25}}}{0,025} = 2993961,169.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 78. Kolik musím vložit na bankovní účet, aby mi banka vyplácela sumu 7 500 Kč na konci každého 20. dne po dobu 15 let? Úroková sazba na účtu je 4,5 % při půlročním úročení.
[1 475 670,36 Kč]

2.2.3 *UO < PO*

V situaci, kdy mezi dvěma vklady bude připsán několikrát úrok, budeme využívat efektu exponenciálního úročení. Pro odvození vzorce opět využijeme součtu geometrické řady. Na rozdíl od situace, kdy $UO = PO$, bude kvocient geometrické řady zohledňovat několikanásobné diskontování.

Předlhůtní důchod

Pro předlhůtní důchod jako obvykle platí, že první výplata bude realizována v časovém okamžiku $t = 0$. Z toho nutně vyplývá, že první člen geometrické řady bude roven hodnotě anuity.

$$\begin{aligned} D^0 &= a + \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}}} + \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}\cdot 2}} + \ldots \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}\cdot(n\cdot m-1)}} \\ &= a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{r}{l}}\right)^{l\cdot n}}{1 - \left(\frac{1}{1+\frac{r}{l}}\right)^{\frac{l}{m}}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Příklad 54. Stanovte výši kapitálu, který bude zajišťovat pravidelné výplaty vždy na začátku pololetí po dobu 13 let. Výše anuity bude činit 60 000 Kč a bankovní instituce garantuje po celou dobu pobírání renty úrokovou sazbu ve výši 3 p. a., přičemž úrok k Vašim prostředkům bude připisován každý měsíc.

Řešení. *Ke stanovení kvocientu musíme vyjádřit současné hodnoty dvou po sobě jdoucích anuit. Vyjdeme z první a druhé výplaty. Tedy:*

$$
\begin{aligned}
PV_1 &= 60000 \\
PV_2 &= \frac{60000}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6} \\
PV_3 &= \frac{60000}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12}} \\
&\vdots \\
PV_{26} &= \frac{60000}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{150}},
\end{aligned}
$$

pak

$$
q = \frac{\frac{60000}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6}}{60000} = \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6}.
$$

Podle vzorce (2.26) *dopočteme*

$$
D^0 = 60000 \cdot \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{6\cdot 2\cdot 13}}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6}} = 1301769,085.
$$

Polhůtní důchod

Polhůtní důchod znamená, že první výplata bude vztažena ke konci platební periody. K získání její současné hodnoty musí být diskontována právě o počet úrokových období mezi dvěma výplatami. Uvedený dopad diskontování se bude pojit ke všem v budoucnu vyplaceným anuitám. Z toho vyplývá, že hodnota potřebného kapitálu bude nižší v porovnání s předlhůtním důchodem, právě díky efektu úročení uloženého kapitálu.

$$
\begin{aligned}
D^1 &= \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}}} + \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}\cdot 2}} + \dots \frac{a}{(1+\frac{r}{l})^{\frac{l}{m}\cdot(n\cdot m)}} \\
&= a \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{r}{l}}\right)^{\frac{l}{m}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{r}{l}}\right)^{l\cdot n}}{1-\left(\frac{1}{1+\frac{r}{l}}\right)^{\frac{l}{m}}}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Příklad 55. Vycházejme z předchozího zadání s tím rozdílem, že první výplata bude následovat 6 měsíců od uložení peněžních prostředků na bankovní účet.

Řešení. *Ze vzorce (2.27) a využitím kvocientu z předchozího příkladu dostáváme:*

$$D^1 = 60000 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6} \cdot \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{6\cdot 2\cdot 13}}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^6}} = 1282412,273.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 79. Máte k dispozici sumu 500 000 Kč. Jak dlouho budete dostávat polhůtní roční důchod 80 000 Kč? Uvažujme, že účet je úročen sazbou 1,1 % p.m. při měsíčním úročení. Jaká bude velikost poslední splátky? Jak by se situace změnila, kdybychom pobírali důchod jenom 70 000 Kč?
[16 let, 76 215,93 Kč; Nikdy by se nevyčerpal a hodnota vkladu by se zvětšovala]

2.2.4 Spojité úročení ve výplatě důchodů

Do oblasti $UO < PO$ patří i případ, kdy dochází k připisování úroků k vloženým prostředkům trvale, tedy spojité úročení. Výpočet bude opět založen na určení vhodného kvocientu a součtu geometrické řady.

Pokud uvažujeme roční úrokovou intenzitu f, pak současnou hodnotu předlhůtního důchodu určíme jako

$$\begin{aligned} D^0 &= a + \frac{a}{\mathrm{e}^{\frac{f}{m}}} + \frac{a}{\mathrm{e}^{\frac{f}{m}\cdot 2}} + \cdots + \frac{a}{\mathrm{e}^{\frac{f}{m}(m\cdot n-1)}} \\ &= a \cdot \frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{f}{m}\cdot n\cdot m}}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{f}{m}}}}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

kde n je počet let, po které je důchod vyplácen a m je počet výplat za rok.

Příklad 56. Stanovte výši kapitálu k zajištění předlhůtního důchodu, který bude vyplácen v pravidelných měsíčních intervalech po dobu 8 let. Anuita bude činit 14 000 Kč. Roční úroková sazba je 4,5 %. Úrokový efekt nechť je ve stejné výši jako v případě diskrétního úročení.

Řešení. *Nejprve vypočteme úrokovou intenzitu*

$$f = \ln(1 + 0,045) = 0,0440169.$$

Následně můžeme stanovit kvocient

$$q = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0{,}0440169}{12}}}.$$

Pak podle vzorce (2.28) *vypočteme*

$$D^0 = 14000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{0,0440169 \cdot 8}}}{1 - e^{\frac{0,0440169}{12}}} = 1134937,381.$$

Pro případ polhůtního důchodu

$$\begin{aligned} D^1 &= \frac{a}{e^{\frac{f}{m}}} + \frac{a}{e^{\frac{f}{m} \cdot 2}} + \cdots + \frac{a}{e^{\frac{f}{m}(m \cdot n)}} \\ &= a \cdot \frac{1}{e^{\frac{f}{m}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{\frac{f}{m} \cdot n \cdot m}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{f}{m}}}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Příklad 57. Uvažujme polhůtní důchod a zadání příkladu 56.

Řešení. *Podle vzorce* (2.29) *dostáváme*

$$D^1 = 14000 \cdot \frac{1}{e^{\frac{0,0440169}{12}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{0,0440169 \cdot 8}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,0440169}{12}}}} = 1130781,91.$$

Příklady k procvičení

Cvičení 80. Na jak velký důchod máme nárok na konci každého čtvrtletí, jestliže počáteční vklad činil 120 000 Kč? Předpokládáme, že banka připisuje úroky každý měsíc se sazbou 1 % p.m. Důchod se bude vyplácet 7 let. Jak se situace změní v případě spojitého úročení?
[6 418,75 Kč; 6 430,78 Kč]

2.2.5 Karenční důchod

Pokud nás bude zajímat hodnota kapitálu potřebná k zajištění pravidelných důchodových plateb v budoucnu, kdy k zahájení vyplácení anuit dojde s určitým odkladem, hovoříme o tzv. *karenčním důchodu* (odloženém důchodu). Je nutné určit částku, ze které bude možné vyplácet pravidelný důchod, sníženou o úroky připsané za dobu karence. Hodnotu D^0 nebo D^1 diskontujeme k časovému okamžiku $t = 0$. Uveďme příklad na odložený důchod.

Příklad 58. Kolik peněžních prostředků je nutné vložit narozenému dítěti, tak aby při dovršení svých 18 narozenin začalo pobírat pravidelné kapesné po následujících 6 let. Výše kapesného bude činit 3 000 Kč a bude vypláceno koncem každého měsíce. Finanční instituce, u které budou po celou dobu uloženy finanční prostředky bude garantovat roční úrokovou sazbu ve výši 2,8 % a úrok bude připisován jeden krát ročně.

Řešení. *Nejprve zjistíme potřebnou hodnotu prostředků na zajištění výplat kapesného na dobu šesti let.*

$$D^1 = 3000 \cdot 12 \cdot \left(1 + \frac{3-1}{2 \cdot 3} \cdot 0,028\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0,028}\right)^6}{0,028} = 198150,58.$$

Tedy k zajištění pravidelných polhůtních měsíčních výplat ve výši 3 000 Kč po dobu 6 let, dle daných podmínek úročení budeme potřebovat 198 150,58 Kč. K vyplácení kapesného však dojde od dnešního dne za 18 let (+1 měsíc, neboť se jedná o polhůtní výplaty). Proto v čase $t = 0$ *nemusíme uložit celou částku, ale spočtenou částku sníženou o připsaný úrok. Tedy obecně*

$$D_k = D^1 \cdot v^k, \tag{2.30}$$

kde k je doba odkladu (karenční doba).

Vztaženo na náš příklad:

$$D_k = 198150,58 \cdot \frac{1}{1,028^{18}} = 120536,69.$$

Nyní tedy musíme na účet finanční instituce uložit částku 120 536,69 Kč, abychom zajistili pravidelnou polhůtní výplatu ve výši 3 000 Kč po dobu šesti let, která začne za za 18 let.

Příklady k procvičení

Cvičení 81. Naše společnost plánuje vyplácet prémie za realizace projektů. První projekt začne za 7 let. Vyplatí se 4 roční prémie po 100 000 Kč (na začátku roku). Druhý projekt začne za několik let po prvním a vyplatí se 36 polhůtních měsíčních prémií po 20 000 Kč. Jaká doba musí uplynout mezi poslední prémií za první projekt a první prémií za druhý projekt, aby nám na prémie vystačila dotace 363 768,555 Kč, kterou jsme obdrželi k dnešnímu dni? Po celou dobu budou peníze na účtu úročeném čtvrtletně se sazbou 5 % p.a
[5 let a 1 měsíc]

2.2.6 Věčný důchod

Doposud jsme uvažovali formu důchodu s konečnou výplatou. U důchodu bylo pevně dáno, po jakou dobu bude výplata anuit probíhat. V souvislosti s konečnou dobou výplaty anuity hovoříme o dočasném důchodu. Pokud, ale budeme uvažovat v časovém horizontu otevřený interval z pohledu výplat důchodu, pak se dostáváme k takzvanému *věčnému důchodu*. Bude se jednat o výplaty, které nemají ohraničenou dobu vyplácení a svou povahou jsou za splnění určitých podmínek věčné, tedy tvoří *perpetuity*. Počet úrokových období se limitně blíží nekonečnu.

Součet prvků nekonečné geometrické řady určíme jako

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}, \tag{2.31}$$

za předpokladu, že $|q| < 1$. Tento předpoklad je naplněn vždy, protože diskontní faktor v je menší než jedna, jestliže je úroková sazba větší než nula.

Tedy za předpokladu $UO = PO$ a bude pro věčný důchod platit

$$D^0 = \frac{a}{1-v} = a \cdot \frac{1+r}{r}, \tag{2.32}$$

$$D^1 = \frac{a}{r}. \tag{2.33}$$

V úvodu této kapitoly již bylo uvedeno, že prostředky určené k vyplácení budoucích anuit jsou úročeny. Pokud bude připsaný úrok za dobu platební periody odpovídat minimálně výši vyplacené anuity (hodnota anuity se uvažuje k datu připisování úroků), pak bude zajištěn princip věčného důchodu. Z této skutečnosti plyne, že hodnota důchodového účtu je konci každého platebního období stejná. Odtud plyne

$$(D^0 - a) \cdot (1 + r) = D^0.$$

Úpravou tohoto vztahu dostáváme vzorec (2.32). Pro polhůtní důchod platí

$$D^1 \cdot (1 + r) - a = D^1.$$

Odtud dostáváme vzorec (2.33).

Příklad 59. Stanovte potřebnou výši prostředků, která zajistí věčný předlhůtní čtvrtletní důchod ve výši 40 000 Kč. Měsíční úroková sazba činí 0,4 % a banka připisuje úrok čtyřikrát do roka.

Řešení.

$$D^1 = 40000 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,004 \cdot 3}\right) = 3373333,333.$$

Proveďme důkaz udržitelnosti předpokladu věčného důchodu:

$$(3373333,333 - 40000) \cdot (1 + 0,004 \cdot 3) = 3373333,333$$

a nebo

$$(3373333,333 - 40000) \cdot 0,004 \cdot 3 = 40000.$$

Hodnota kapitálu bude zachována, což je nezbytný předpoklad věčného důchodu. Pokud by došlo k nepatrnému snížení vstupního kapitálu, nejednalo by se o věčný důchod, neboť by v budoucnu došlo k jeho vyčerpání. Každý připsaný úrok je tedy vyplacen na anuitě.

V případě že $UO > PO$, dosadíme za první člen geometrické řady buďto současné hodnoty anuit vyplacených během jedné úrokové periody a nebo budoucí hodnoty anuit vztažené ke konci úrokového období a následně diskontované k počátku úrokového období. Předlhůtní i polhůtní úročení bude lineární. Pokud však zvolíme první variantu, nacházíme se v časovém okamžiku $t = 0$ a z pohledu úrokových období se bude jednat o součet anuit začínajících v tomto okamžiku. K určení současné hodnoty důchodu za jedno úrokové období využijeme vzorce (2.21) a (2.23). Pak můžeme psát

$$D^0 = x \cdot m \cdot \frac{1 - \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot d}{d}, \tag{2.34}$$

$$D^1 = x \cdot m \cdot \frac{1 - \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot d}{d}. \tag{2.35}$$

Pokud budeme vycházet z druhého způsobu, pak sumu budoucích hodnot anuit vyplacených během jedné úrokové periody musíme vztáhnout k časovému okamžiku $t = 0$, tedy budeme tuto hodnotu diskontovat (využijeme vzorce (2.20) a (2.22)) a dostaneme:

$$D^0 = x \cdot m \cdot \frac{1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r}{r} \tag{2.36}$$

$$D^1 = x \cdot m \cdot \frac{1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot r}{r}. \tag{2.37}$$

Příklad 60. Stanovte velikost výplaty předlhůtního důchodu v intervalech 60 dnů, tak aby se jednalo o věčný důchod. Víte, že máte k dispozici částku 2 500 000 Kč a prostředky se zhodnocují po celou dobu úrokovou sazbou 1,7 % p.a. Finanční instituce úročí prostředky jednou ročně.

Řešení. *Buď dosadíme do vzorce (2.36) a dostaneme*

$$\begin{aligned} 2500000 &= x \cdot 6 \cdot \frac{1 + \frac{6+1}{2 \cdot 6} \cdot 0,017}{0,017} \\ x &= 7013,78. \end{aligned}$$

nebo dosadíme do vzorce (2.34) *a dostaneme*

$$\begin{aligned} d &= \frac{0,017}{1+0,017} = 0,0167158, \\ 2500000 &= x \cdot 6 \cdot \frac{1 - \frac{6-1}{2\cdot 6} \cdot 0,0167158}{0,0167158} \\ x &= 7013,78. \end{aligned}$$

Budeme-li zkoumat opačnou situaci, kdy $UO < PO$, pak musíme určit hodnotu úroků připsaných za jedno PO. Kvocient vzniklé řady určíme analogicky jako v kapitole o důchodech, kdy $UO < PO$. Tyto poznatky aplikujeme na výpočet součtu nekonečné geometrické řady pomocí vzorce (2.31). Rozdíl mezi předlhůtním a polhůtním důchodem spočívá pouze ve výši prvního členu této řady.

Příklad 61. Kolik bude činit výplata věčného polhůtního důchodu v měsíčních intervalech, jestliže úrokové období bude stanoveno na 10 dnů a měsíční úroková sazba činí 0,7 %. Vstupní kapitál k věčnému důchodu činí 1 700 000 Kč.

Řešení. *Hodnota kvocientu činí* $\left(\frac{1}{1+\frac{0,007}{3}}\right)^3$. *Jedná o polhůtní důchod, proto je nutné provést diskontování první výplaty. A tedy hledaná hodnota vypláceného věčného důchodu je*

$$\begin{aligned} 1700000 &= \frac{\frac{a}{\left(1+\frac{0,007}{3}\right)^3}}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,007}{3}\right)^3}} \\ a &= 11927,79. \end{aligned}$$

Ověření věčného důchodu

$$1700000 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,007}{3}\right)^3 - 1\right] = 11927,79.$$

V případě potřeby je možné změnit věčný důchod na dočasný a naopak. Je nutné určit zůstatkovou hodnotu důchodového účtu ke dni změny typu důchodu. Jestliže měníme věčný důchod na dočasný, pak je situace zjednodušená tím, že hodnota důchodového účtu neklesá (vzhledem ke konci PO).

Příklad 62. Uvažujme, že za 9 let začneme s pravidelnými výplatami polhůtního pololetního důchodu ve výši 60 000 Kč. Banka garantuje 2 % p. a. a prostředky úročí spojitým úročením. Úrokový efekt spojitého úročení odpovídá diskrétní formě úročení. Jedná se o věčný důchod. Kolik prostředků budeme potřebovat k zajištění uvažovaných plateb? Po deseti letech od zahájení výplat se rozhodneme, že své prostředky rozpustíme během následujících dvanácti let. Jak se změní výše anuity? Podmínky úročení se nemění.

Řešení. *Nejprve vypočítáme potřebnou výši kapitálu k zajištění věčného důchodu.*

$$f = \ln(1 + 0,02) = 0,019802627,$$

$$q = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,019802627}{2}}},$$

$$D^1 = 60000 \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,019802627}{2}}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,019802627}{2}}}} = 6029851,572.$$

Víme, že k vyplácení dojde až za 9 let, proto je nutné zohlednit časovou hodnotu kapitálu.

$$D_k = 6029851,572 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{0,019802627 \cdot 9}} = 5045510,069.$$

K zajištění polhůtního věčného důchodu ve výši 60 000 Kč budeme tedy potřebovat 5 045 510,069 Kč. Dále budeme počítat novou výši anuity:

$$6029851,572 = a \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,019802627}{2}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{0,019802627 \cdot 12}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,019802627}{2}}}} = 278116,4644.$$

Tedy změna anuity bude:

$$278116,4644 - 60000 = 218116,4644.$$

Příklad 63. Navážeme na zadání předchozího příkladu. Po 10 letech od začátku vyplácení věčného důchodu se rozhodneme, že vyplácená anuita vzroste o 150 %. Kolik bude činit nová výplata a kolik výplat bude vyplaceno po změně? Jakou hodnotu bude mít poslední anuita?

Řešení. *Víme, že hodnota vstupního kapitálu se do změny anuity nezmění. Následně však již úrok nepokryje celkovou vyplacenou anuitu a proto bude docházet k redukci kapitálu určeného na výplatu anuit až se zcela vyčerpá. Nová anuita bude činit* $60000 \cdot 2,5 = 150000$. *Tedy abychom určili počet* *stejných výplat a výši mimořádné výplaty budeme postupovat následujícím způsobem*

$$\begin{aligned} 6029851,572 &= 150000 \cdot \frac{1}{e^{\frac{0,019802627}{2}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{0,019802627 \cdot n}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,019802627}{2}}}} \\ &\vdots \\ n &= 25,79585. \end{aligned}$$

Z výpočtu plyne, že k vyčerpání kapitálu za daných úrokových podmínek přibližně dojde za 25 let, 9 měsíců a 17 dnů. Z toho plyne, že celkově bude vyplaceno 51 řádných výplat v hodnotě 150 000 Kč a poslední anuita v nižší hodnotě. Současnou hodnotu poslední anuity určíme jako rozdíl dostupného kapitálu a součsné hodnoty 51 řádných anuit

$$150000 \cdot \frac{1}{e^{\frac{0,019802627}{2}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,019802627}{2} \cdot 51}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,019802627}{2}}}} = 5976706.$$

A pak

$$6029851,572 - 5976706 = 53145,58.$$

Tedy současná hodnota poslední splátky je 53 145,58 Kč. Protože k poslední výplatě dojde až za 26 let, je ještě nutné současnou hodnotu poslední anuity zúročit k datu její výplaty.

$$53145,58 \cdot e^{0,019802627 \cdot 26} = 88934,78.$$

V následujícím příkladu budeme přecházet z dočasného důchodu na důchod věčný.

Příklad 64. Kolik bude činit výše pravidelného desetidenního důchodu, který budete pobírat na konci desátého dne? Důchod se začne vyplácet za 27 let. Uvažujete, že důchod bude vyplácen 25 let. Penzijní fond, který Vám bude prostředky spravovat garantuje zhodnocování kapitálu spojitým úročením s úrokovou intenzitou 2,1 %. Po pěti letech od zahájení výplat důchodu se rozhodnete, že provedete změnu ve výplatách. Dočasný důchod změníte na trvalý a dále k výplatám bude docházet v tříměsíčních intervalech. I zde se bude jednat o polhůtní důchod. Jak se změní anuita po přechodu na věčný důchod? Na důchod si ukládáte pravidelné polhůtní měsíční úložky u banky, která garantuje 3 % p. a. a úrok připisuje čtyřikrát do roka. Budete spořit částku 3 500 Kč po dobu 23 let. Z připsaného úroku se bude na konci každého roku odvádět srážková daň ve výši 15 %. Do výplaty důchodu budou Vaše prostředky ležet u banky, kde jste spořili s danými úrokovými podmínkami. Následně peněžní prostředky převedete k penzijnímu fondu, který začne s výplatou bezprostředního důchodu.

Řešení. *Nejprve vypočteme částku, kterou naspoříme během každého roku.*

$$X^1 = 3500 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0,03}{4}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 - 1}{\frac{0,03}{4}} = 42581,05.$$

Musíme však uvažovat daň za připsaný úrok odváděnou ke konci roku

$$\begin{aligned} X_{tax} &= \left[3500 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0,03}{4}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 - 1}{\frac{0,03}{4}} - 42000\right] \cdot 0,85 \\ &+ \ 42000 = 42493,896. \end{aligned}$$

Pak naspořená částka je

$$S^1_{tax} = 42493,896 \cdot \frac{\left[\left[\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 - 1\right] \cdot 0,85 + 1\right]^{23} - 1}{\left[\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 - 1\right] \cdot 0,85} = 1311795.$$

Tedy za dobu 23 let pravidelnými úložkami naspoříme částku 1 311 795 Kč. Nicméně k použití těchto prostředků dojde až za další čtyři roky. Prostředky budou ležet na stejném účtu a budou úročeny. Na tuto situaci se můžeme dívat jako na karenční důchod, je ale nutné zohlednit rozdílné podmínky úročení u penzijního fondu a u banky.

$$FV_{S_{tax}} = 1311795 \cdot \left[\left[\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^4 - 1\right] \cdot 0,85 + 1\right]^4 = 1452436$$

Toto je částka, ze které začneme vyplácet polhůtní dvacetipětiletý důchod v desetidenních intervalech. Jeho výši nyní určíme:

$$\begin{aligned} 1452436 &= a \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,021}{36}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{0,021 \cdot 25}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,021}{36}}}} \\ a &= 2074,95. \end{aligned}$$

Tedy výše desetidenní anuity bude činit 2 074,95 Kč.

Po pěti letech však dojde ke změně frekvence vyplácení anuit a současně se změní dočasný důchod na věčný. Jako první musíme zjistit kolik prostředků budeme k vyplácení věčného důchodu mít k dispozici.

$$D^1 = 2074,95 \cdot \frac{1}{e^{\frac{0,021}{36}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{0,021 \cdot 5}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,021}{36}}}} = 354447,68.$$

Pak

$$D_{new} = 1452436 - 354447,68 = 1097988,32.$$

Tato částka bude nyní 5 let úročena na částku 1 101 195,47 Kč. Věčný důchod bude tedy vyplácen z kapitálu ve výši 1 101 195,47 Kč. Pak

$$\begin{aligned} 1101195,47 &= a \cdot \frac{\frac{1}{e^{\frac{0,021}{4}}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{0,021}{4}}}} \\ a &= 5796,48. \end{aligned}$$

Nová anuita věčného důchodu, která bude vyplácena v kvartálních intervalech, bude ve výši 5 796,48 Kč.

Příklady k procvičení

Cvičení 82. Spoříte 8 let pravidelnými vklady na konci týdne ve výši 1 500 Kč. Úroková sazba je 3,1 % p.a. při měsíčním úročení. Každý kvartál (na konci) dostáváte v práci bonusy ve výši 20 000 Kč. Bonusy vkládáte v celé výši na váš spořicí účet. Po ukončení spoření necháte peníze na účtu ležet 5 let. Následně peníze vyberete a uložíte na jiný účet úročený spojitě s roční intenzitou 2,4 % na prvních 10 let a potom 2,6 %, z kterého vám bude vyplácen věčný polhůtní měsíční důchod. Kolik bude anuita vyplácená na důchodu?
[2 927,86 Kč]

Cvičení 83. Kolik musíme mít na účtu peněz, aby nám z nich byl navěky vyplácen polhůtní pololetní důchod 30 000 Kč. Účet je úročen měsíčně se sazbou 6 % p.a.
[987 572,734 Kč]

2.2.7 Důchody a daně

Úroky připsané na důchodovém účtě mohou v některých případech podléhat zdanění, neboť představují příjem vlastníka důchodového účtu. V případě, že je daň placena srážkově, tj. z každého připsaného úroku, v době připsání úroku dojde k vynásobení úrokové sazby již dříve zavedeným koeficientem

$k = 1 - tax$. Budeme-li uvažovat odvod daně na konci daňového období (zpravidla jeden rok), pak bude platit vzorec

$$
\begin{aligned}
D_{tax} &= \frac{X_{tax}}{1 + r_{ef} \cdot k} + \frac{X_{tax}}{(1 + r_{ef} \cdot k)^2} + \frac{X_{tax}}{(1 + r_{ef} \cdot k)^3} + \cdots + \frac{X_{tax}}{(1 + r_{ef} \cdot k)^{n-1}} \\
D_{tax} &= X_{tax} \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}, \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

kde $v = \frac{1}{1+r_{ef} \cdot k}$ a X_{tax} se určí podle vzorce (2.13).

Příklady k procvičení

Cvičení 84. Kolik peněz musíme mít k dispozici, abychom si zabezpečili 10 letý polhůtní roční důchod s anuitami 100 000 Kč? Úroková sazba je 4,5 % p.a. při ročním úročení. Kolik by bylo potřeba mít na účtu v případě, že se u úroků platí daň 15 %?
[791 271,82 Kč; 818 201,95 Kč]

Cvičení 85. Kolik peněz musíme odložit na účet při narození prvního dítěte, aby v době kdy i druhé dítě (narozené o 2 roky později) odejde v 18 na vysokou školu, jsme si mohli užívat a cestovat? Chceme dostávat 120 000 Kč na začátku každého roku po dobu 6 let. Úročení vkladů je roční se sazbou 3,8 % p.a. (z úroků se platí 15 % daň). Jakou anuitu bychom dostávali, kdybychom na začátku odložili 400 000 Kč (za stejných podmínek úročení)?
[352 646 Kč; 136 113,84 Kč]

Cvičení 86. V 40 letech jsme vyhráli ve sportce 100 000 Kč. Rozhodli jsme se odložit je na 10 let a potom začít tuto sumu rozpouštět jako důchod v částkách 10 000 Kč na začátku každého roku. Úročení je roční se sazbou 4,6 % p.a. (úroky se daní). Jak dlouho budeme dostávat tenhle důchod? Kolik bude činit poslední anuita? Jak se situace změní v případě, že se bude důchod vyplácet polhůtně?
[21 let; 9 473,75 Kč; 23 let; 2 382,52 Kč]

Cvičení 87. Chceme si pořídit důchod, který nám bude vyplácet 5 000 Kč každý měsíc po dobu 15 let. Banka nám nabízí produkt s úrokovou sazbou 6,10 % p.a. při měsíčním úročení. Kolik nás bude tento produkt stát za předpokladu že:

a) důchod je předlhůtní,

b) důchod je polhůtní a z úroků se platí daň 15%,

c) BONUS: důchod je polhůtní, z úroků se platí daň 15 %, za zřízení zaplatíme poplatek 2 000 Kč a na konci každého roku zaplatíme poplatek 180 Kč (po odvedení daně z úroků)?

[591 734,40 Kč; 23 let; 623 738,83 Kč; 627 565,88 Kč]

Cvičení 88. Na našem spořícím účtu jsme si spořili 12 let. Pololetně předlhůtně jsme vkládali stejnou částku. Po naspoření jsme ihned začali s vyplácením důchodu v dvojnásobné výši jako jsme ukládali na spoření také pololetně předlhůtně. Důchod se také vyplácel 12 let. Úročení bylo celých 24 let s pololetní frekvencí. Úroky byly daněny. Úroková sazba byla po celou dobu stejná. Určete její výši.
[6,8774 % p.a.]

Cvičení 89. Kolik musíme mít k dispozici peněz, abychom mohli pobírat důchod 7 800 Kč měsíčně předlhůtně po dobu 7 let? Úročení je roční se sazbou 8 % p.a. Jak se změní situace, když bude důchod polhůtní a z úroků by se platily daně?
[508 433,27 Kč; 523 805,75 Kč]

Cvičení 90. Po pratetě jsme zdědili 666 028 Kč. Uložili jsme je v bance, která peníze úročí pololetně sazbou 4,20 % p.a. Chceme, aby nám banka vyplácela polhůtní měsíční důchod po dobu 20 let. Kolik bude činit pravidelná anuita? Po 10 letech se rozhodneme změnit důchod na věčný, při stejných podmínkách. Kolik bude činit anuita nyní? Jak se celá situace změní, když se budou platit daně z úroků?
[4 093,54 Kč; 1 392,17 Kč; 3 879,50 Kč; 1 157,65 Kč]

Cvičení 91. Při loupeži banky jsme nabyli jmění 700 000 Kč. Tyto peníze nám hned sebral boss mafiánského uskupení a řekl nám, že nám bude vyplácet 4 000 Kč na počátku každého měsíce, abychom sumu okatě neutratili hned na začátku. Peníze dá do své banky, kde svým zaměstnancům poskytuje sazbu 3 % p.a. při ročním úročení. Z úroků se platí daň. Požaduje poplatek 230 Kč na konci každého roku (splatný po zaplacení daně). Tuto dohodu jste patřičně oslavili vydatným množstvím alkoholu, za které vám boss strhnul 2 300 Kč z vašeho podílu. Jak dlouho vám bude vyplácet danou sumu? Kolik bude činit poslední výplata?
[18 let a 3 měsíce; 457,08 Kč]

Cvičení 92. Zámožná choť pana Bořivoje odjela na 5 let rozjímat do lesa. Zanechala mu účet s hodnotou 52 118,63 Kč. Z tohoto účtu se mu bude vyplácet kapesné každé 3 dny (předlhůtně). Banka poskytuje spojité úročení s úrokovou sazbou 7 % p.a. (úroky jsou daněny). Za předpokladu, že průměrná

cena piva je 25 Kč, kolik piv si bude moci pan Bořivoj koupit z jednoho kapesného?
[4 piva]

Cvičení 93. Získali jste 20 miliónu Kč. Chcete si peníze nechat vyplácet pravidelnou anuitou každé ráno po dobu 30 let. Banka vám úročí peníze půlročně se sazbou 7,2 % p.a. Z úroků se platí na konci roku daň 15 %. Kolik bude činit každodenní výplata? Po 13 letech od počátku výplat vás začali trestně stíhat za vaše přečiny. Výplaty důchodu vám byly pozastaveny. Účet se dále úročil podle původních podmínek. Po 3 letech soudních tahanic jste museli zaplatit penále 1 000 000 Kč. Usoudili jste, že bylo poškozeno vaše renomé a měli byste přehodnotit svou budoucnost a rozhodli jste se, že svůj důchod změníte na věčný při původních podmínkách úročení. Kolik bude činit nová anuita?
[4 011,73 Kč; 2 920,06 Kč]

Bonus

Cvičení 94. Chceme si zabezpečit čtvrtletní polhůtní reální důchod ve výši 45 000 Kč po dobu 17 let. Náš účet je úročen čtvrtletním úročením se sazbou 0,75 % p.q. Během celé doby výplaty důchodu počítáme s roční inflací 4 %. Určete kolik musíte mít k dispozici peněz, aby pokryly tenhle důchod? Jak se situace změní v případě, že jsou úroky daněny?
[3 051 326,39 Kč; 3 053 479,65 Kč]

Cvičení 95. Máme k dispozici 4 milióny korun, které jsme získali prodejem rodinných pozemků. Z téhle sumy si chceme zabezpečit věčný měsíční polhůtní důchod. Úročení je spojité se sazbou 0,4 % p.m. Roční inflace činí 2,60 %. Jaká bude reálná výše důchodu, kterou budeme dostávat? Po 30 letech se rozhodneme, že důchod chceme rozpustit za 10 let. Jaká bude anuita v tomto případě?
[7 419,04 Kč; 37 211,12 Kč]

2.3 Úvěry

V této části se budeme zabývat problematikou úvěrů. Základním nástrojem, se kterým budeme pracovat, bude umořovací plán. Pro úvěry využijeme znalosti získané v podkapitole věnované důchodům, neboť z pohledu věřitele se bude jednat o situaci, která počítá součet současných hodnot pravidelných plateb (splátek úvěrů) provedených během určitého časového horizontu. Na rozdíl od důchodu budeme určovat výši splátek a dále jejich rozklad na částku připadající poskytovateli úvěru jako odměna (placený úrok za poskytnutý úvěr) a částku díky níž bude docházet ke snižování dlužné částku, tedy úmor. Bude podstatné, zda budou splátky úvěru konstantní, či bude docházet k jejich změnám. Jelikož jsme v roli plátce úroků, nebudeme v této podkapitole uvažovat zdanění úroku.

2.3.1 Konstantní splátky

Cílem tvorby umořovacího plánu je přes postupné splátky dospět k celkovému umoření dlužné částky. Dále budeme uvažovat pouze situaci, kdy úrokové období bude stejně dlouhé jako frekvence splátek a nebo situaci, kdy mezi dvěma splátkami úvěru dojde k opakovanému připsání úroků.

Začněme situací se stejnou délkou úrokového i splátkového období. Budeme-li abstrahovat od jednorázových poplatků splatných v době sjednání úvěru, pak zpravidla předpokládáme, že první splátka úvěru následuje s určitou prodlevou (např. po měsíci). Z pohledu věřitele vidíme analogii s polhůtním důchodem, pro který platí:

$$D^1 = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}. \tag{2.39}$$

Tedy součet současných hodnot všech v budoucnu splacených anuit musí být roven výši poskytnutého úvěru.

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \ldots + a \cdot v^n.$$

V případě sjednání úvěru víme o jakou částku finanční ústav žádáme, respektive jakou výši úvěru obdržíme. To, co zpravidla hledáme, je výše anuity:

$$a = D \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}. \tag{2.40}$$

Všimněme si inverzního vztahu pro zásobitele polhůtního $\frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^n}}$. Uvedený výraz označujeme jako *umořovatel.* Anuita představuje z pohledu dlužníka pravidelnou platbu za poskytnuté prostředky. Zahrnuje v sobě jednak platbu za cenu kapitálu (úrok I) a také částku, o kterou se snižuje dlužná částka (úmor M). Platí tedy:

$$a = I_h + M_h,$$

kde h označuje pořadí splátky. Výše úroku u splátky h se vypočítá jako

$$I_h = D_{h-1} \cdot r \cdot t,$$

v tomto případě můžeme zapsat $I_h = D_{h-1} \cdot r$, neboť úrokové období je stejně dlouhé jako prodleva mezi splátkami. Zřejmě platí

$$I_1 = a \cdot (1 - v^n), \tag{2.41}$$

kde n je celkový počet splátek. Pak pro úmor musí platit

$$M_1 = a - I_1 = a \cdot v^n. \tag{2.42}$$

Je nutné si uvědomit, že k splátkám anuit dochází v chronologickém řazení. Anuita se nemění, ale výše úroku bude klesat, zatímco úmor bude růst. Proto z důvodu přehlednosti budeme uvádět indexaci zohledňující okamžik platby. Můžeme tedy zapsat, že výše částky připadající na první platbu úroku bude:

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & D_0 \cdot r = a \cdot (1 - v^n) \\ I_2 & = & D_1 \cdot r = a \cdot (1 - v^{n-1}) \\ I_3 & = & D_2 \cdot r = a \cdot (1 - v^{n-2}) \\ & \vdots & \\ I_n & = & D_{n-1} \cdot r. \end{array}$$

Hodnota úroku je počítána ze stavu dluhu v předchozím období. Tak jako jsme rozepsali jednotlivé splátky úroků, můžeme rozepsat i splátky připadající na úmor.

$$\begin{array}{rcl} M_1 & = & a \cdot v^n \\ M_2 & = & a \cdot v^{n-1} \\ M_3 & = & a \cdot v^{n-2} \\ & \vdots & \\ M_n & = & a \cdot v \end{array}$$

Pro přehlednost tedy zopakujme, že platí:

$$D_{h+1} = a \cdot \frac{1 - v^{n-h-1}}{r}, \tag{2.43}$$

$$I_{h+1} = a \cdot \left(1 - v^{n-h}\right), \tag{2.44}$$

$$M_{h+1} = a \cdot v^{n-h}. \tag{2.45}$$

Příklad 65. Sestavte umořovací plán pro první rok, jestliže uvažujeme úvěr ve výši 3 500 000 Kč. Banka požaduje úrokovou sazbu 8 % p. a. a úrok počítá měsíčně. Dluh budete splácet 25 let konstantní splátkou v pravidelných měsíčních intervalech.

Řešení. *Nejprve vypočítáme podle vzorce* (2.40) *výši anuity:*

$$a = 3500000 \cdot \frac{\frac{0{,}08}{12}}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12\cdot 25}}} = 27013,57.$$

Následně spočítáme výši placeného úroku za první období:

$$I_1 = 3500000 \cdot \frac{0,08}{12} = 27013,57 \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{300}}\right] = 23333,33.$$

První úmor bude:

$$M_1 = 27013,57 - 23333,33 = \frac{27013,57}{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{300}} = 3680,234.$$

Příklad 66. Uvažujme zadání minulého příkladu. Stanovte jakou částku zaplatíme na úrocích za úvěr během jednoho roku? Kolik bude činit dlužná částka za 20 let? Jak budou vypadat položky v umořovací tabulce u 291. splátky?

Řešení. *Víme, že úmor tvoří geometrickou řadu. Pak odpočtem vyplacených anuit od amortizace dluhu zjistíme platbu připadající na úroky.*

$$\sum_{i=1}^{12} a_i = 12 \cdot 27013,57 = 324162,8,$$

$$\sum_{i=1}^{12} M_i = 3680,234 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12} - 1}{\frac{0{,}08}{12}} = 45818,65,$$

$$\sum_{i=1}^{12} I_i = 324162,8 - 45818,65 = 278344,2.$$

Na úrocích během prvního roku zaplatíme 278 344,2 Kč. Zmíněná skutečnost stojí za úvahu, neboť si člověk může uvědomit kolik z celkového dluhu se mu povedlo splatit a kolik za relativně krátkou dobu zaplatí pouze na úrocích.

Dlužná částka za 20 let bude činit:

$$D = 27013,57 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{300-12\cdot 20}}}{\frac{0,08}{12}} = 1332267.$$

Víme, že anuita bude konstantní tedy u 291. splátky bude činit stále 27 013,57 Kč. Musíme však vypočítat, kolik bude činit $I_{291}, M_{291}, D_{291}$.

$$I_{291} = 27013,57 \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{300-290}}\right] = 1736,595,$$

$$M_{291} = \frac{27013,57}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{300-290}} = 25276,98,$$

$$D_{291} = 27013,57 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{300-291}}}{\frac{0,08}{12}} = 235212,3.$$

splátka	**anuita**	**úrok**	**úmor**	**dluh**
0				3500000
1	27013,57	23333,33	3680,234	3496320
2	27013,57	23308,80	3704,769	3492615
3	27013,57	23284,10	3729,468	3488886
4	27013,57	23259,24	3754,331	3485131
5	27013,57	23234,21	3779,360	3481352
6	27013,57	23209,01	3804,555	3477547
7	27013,57	23183,65	3829,919	3473717
8	27013,57	23158,12	3855,452	3469862
9	27013,57	23132,41	3881,155	3465981
10	27013,57	23106,54	3907,029	3462074
11	27013,57	23080,49	3933,076	3458141
12	27013,57	23054,27	3959,297	3454181
13	27013,57	23027,88	3985,692	3450196
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
290	27013,57	1903,992	25109,58	260489,2
291	**27013,57**	**1736,595**	**25276,97**	**235212,2**
292	27013,57	1568,082	25445,49	209766,8
293	27013,57	1398,445	25615,12	184151,6
294	27013,57	1227,678	25785,89	158365,7
295	27013,57	1055,772	25957,8	132407,9
296	27013,57	882,7197	26130,85	106277,1
297	27013,57	708,514	26305,05	79972,05
298	27013,57	533,147	26480,42	53491,63
299	27013,57	356,6108	26656,96	26834,67
300	27013,57	178,8978	26834,67	**0,00**

Uveďme příklad, kdy budeme uvažovat častější připisování úroků oproti prodlevě ve splátkách ($UO < PO$).

Příklad 67. Sestavte umořovací plán na dluh ve výši 156 000 Kč splatný za tři roky. Banka si účtuje úrokovou sazbu ve výši 9,5 % a úrok počítá na měsíční bázi. Úvěr splácíte ve tříměsíčních periodách.

Řešení.

$$\begin{aligned} 156000 &= a \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^3} \cdot \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{3\cdot 4\cdot 3}}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^3}} \\ a &= 15110{,}42 \end{aligned}$$

splátka	anuita	úrok	úmor	dluh
0				156000
1	15110,42	3734,409	11376,01	144624
2	15110,42	3462,084	11648,33	132975,7
3	15110,42	3183,24	11927,18	121048,5
4	15110,42	2897,721	12212,69	108835,8
5	15110,42	2605,367	12505,05	96330,74
6	15110,42	2306,015	12804,4	83526,34
7	15110,42	1999,497	13110,92	70415,42
8	15110,42	1685,641	13424,77	56990,65
9	15110,42	1364,272	13746,14	43244,5
10	15110,42	1035,209	14075,21	29169,3
11	15110,42	698,2697	14412,15	14757,15
12	15110,42	353,2643	14757,15	0,00

Příklady k procvičení

Cvičení 96. U lichváře jsme si půjčili jistou sumu. On chce, abychom ji splatili v 10 ročních splátkách po 20 000 Kč splatných na konci roku. Lichvář požaduje roční úrokovou sazbu 23 % p.a. (roční úročení). My však chceme zaplatit v jediné splátce na konci 3. roku. Kolik mu musíme zaplatit, aby byl spokojen? Jaká by musela být výška roční splátky, aby dluh splatil za prvních 5 let?
[141 398,72 Kč; 27 104,02 Kč]

Cvičení 97. Měli jsme splácet dluh ještě 9 let v měsíčních předlhůtních splátkách po 2 000 Kč. Tento dluh byl úročen sazbou 1 % p.m. při měsíčním

úročení. Televizní vědma nám v silvestrovském vysílání poradila, že by bylo vysoce vhodné přestat splácet hypotéku a raději kupovat losy v loterii. Banka však náš nově nabytý entuziazmus nesdílela a za každý měsíc, kdy jsme nezaplatili splátku, nám zvýšila úrokovou sazbu o 0,001 procentuálního bodu, počínaje od února. V červnu jsme se dohodli s bankou, že budeme poctivě splácet svůj dluh od července a plánujeme skončit splácení v původním termínu. Banka nám ponechala úrokovou sazbu, kterou jsme měli v prosinci. Jaká byla nová výše splátky?
[2 225,73 Kč]

2.3.2 Konstantní úmor

Pokud by se úvěr splácel pravidelnými platbami ve stanoveném časovém horizontu a každou splátkou by se umořila stejná část dluhu, tj. úmor by byl konstantní, pak při konstrukci umořovacího plánu budeme využívat vlastností aritmetické řady. Jelikož dochází ke snižování dlužné částky o stejnou výši, bude také úrok klesat o konstantní částku - diferenci.

Příklad 68. Uvažujme sjednaný úvěr na částku 1 460 000 Kč. Zavážete se, že dluh splatíte za 10 let. Banka si cení poskytnutého úvěru na 8 % p. a. a úrok počítá měsíčně. Splátky budou probíhat také v měsíčních intervalech a každou splátkou bude umořena stejná část dluhu. Vytvořte umořovací plán pro první tři splátky. Jak bude vypadat řádek v umořovací tabulce ve 25. splátce? Kolik bude zaplaceno za celou dobu na úrocích?

Řešení.

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1460000}{12\cdot 10} = 12166,6667 \\
I_1 &= 1460000\cdot\frac{0,08}{12} = 9733,3333 \\
a_1 &= 12166,6667 + 9733,3333 = 21900 \\
I_2 &= 1447833\cdot\frac{0,08}{12} = 9652,222 \\
a_2 &= 12166,6667 + 9652,222 = 21818,89 \\
I_3 &= 1423500\cdot\frac{0,08}{12} = 9571,111 \\
a_3 &= 12166,6667 + 9571,111 = 21737,78
\end{aligned}
$$

Výpočet 25 řádku bude opět triviální, neboť se nejedná o nic jiného než o nalezení n-tého členu aritmetické řady. Diferenci snadno vypočítáme odečtením sousedních členů, resp. vynásobením úmoru úrokovou sazbou. Musíme mít pouze na paměti, že s klesajícím dluhem bude úrok klesat.

$$d = 9652,222 - 9733,333 = -81,1111,$$

$$I_{25} = 9733,333 + (25-1) \cdot (-81,1111) = 7786,667$$

$$a_{25} = 21900 + (25-1) \cdot (-81,1111) = 19953,33$$

$$D_{25} = 1460000 - 25 \cdot 12166,67 = 1155833$$

$$\sum_{i=1}^{120} I_i = \frac{120}{2} \cdot [9733,333 + 9733,333 + 119 \cdot (-81,1111)] = 588866,67$$

splátka	**anuita**	**úrok**	**úmor**	**dluh**
0				1460000
1	21900	9733,333	12166,67	1447833
2	21818,89	9652,222	12166,67	1435667
3	21737,78	9571,111	12166,67	1423500
4	21656,67	9490	12166,67	1411333
5	21575,56	9408,889	12166,67	1399167
6	21494,44	9327,778	12166,67	1387000
7	21413,33	9246,667	12166,67	1374833
8	21332,22	9165,556	12166,67	1362667
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	20115,56	7948,889	12166,67	1180167
24	20034,44	7867,778	12166,67	1168000
25	**19953,33**	**7786,667**	**12166,67**	**1155833**
26	19872,22	7705,556	12166,67	1143667
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
117	12491,11	324,4444	12166,67	36500
118	12410	243,3333	12166,67	24333,33
119	12328,89	162,2222	12166,67	12166,67
120	12247,78	81,11111	12166,67	**0,00**

Pokud budeme uvažovat situaci, kdy $UO < PO$, jednotlivé splátky úroků a tedy i anuit budou opět tvořit aritmetickou řadu.

Příklad 69. Rozhodnete si spořit na zakoupení nemovitosti. Budete pravidelně předlhůtně spořit v týdenních intervalech částku 1 000 Kč. Čtyřikrát do roka dostáváte pracovní bonusy ve výši 15 000 Kč,vždy na konci kvartálu, které se rozhodnete také ukládat na Váš spořící účet. Banka Vaše prostředky zhodnocuje 2,8 % roční efektivní úrokovou sazbou. Za deset let od započtení spoření se rozhodnete koupit danou nemovitost, jejíž hodnota v tento okamžik bude činit 2 750 000 Kč. Na chybějící částku si sjednáte bankovní úvěr, který se zavážete splatit během 15 let pravidelnými měsíčními splátkami (na konci měsíce). Efektivní roční úroková sazba za úvěr bude činit 7,6 %. Pro výpočty použijte spojité úročení. Sestavte umořovací plán pro 1. a 9. splátku. Kolik zaplatíte celkově na úrocích za poskytnutý úvěr pokud budou splátky ve stejné výši a kolik zaplatíte celkově za úvěr, jestliže každou splátkou bude umořena stejná výše dluhu?

Řešení.

$$f = \ln(1,028) = 0,027615$$

$$S^0 = 1000 \cdot \mathrm{e}^{\frac{0,027615}{48}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{0,027615 \cdot 10} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,027615}{48}} - 1} = 552981,3$$

$$S^1 = 15000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{0,027615 \cdot 10} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,027615}{4}} - 1} = 688645,2$$

$$\sum S = S^0 + S^1 = 552981,3 + 688645,2 = 1241627.$$

Naspoříme tedy 1 241 627 Kč a na zbylou částku si sjednáme úvěr. Výše úvěru bude 1 508 373 Kč.

Umořovací plán - konstantní anuita

$$f = \ln(1,076) = 0,07325,$$

$$a = 1508373 \cdot \mathrm{e}^{\frac{0,07325}{12}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{0,07325}{12}}}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{0,07325 \cdot 15}}} = 13852,37.$$

$$\sum I = 180 \cdot 13852,37 - 4616,788 \cdot \frac{\mathrm{e}^{(0,07325 \cdot 15} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{0,07325}{12}} - 1} = 985052,9$$

Tedy poskytnutý úvěr nás bude stát 985 085,9 Kč.

splátka	anuita	úrok	úmor	dluh
0				1508373
1	13852,37	9235,58	4616,788	1503757
2	13852,37	9207,312	4645,056	1499112
3	13852,37	9178,871	4673,498	1494438
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	13852,37	9034,032	4818,337	1470638
9	13852,37	9004,53	4847,839	1465790
10	13852,37	8974,847	4877,521	1460913
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Umořovací plán - konstantní úmor

splátka	anuita	úrok	úmor	dluh
0				1508373
1	17615,43	9235,58	8379,853	1499994
2	17564,12	9184,272	8379,853	1491614
3	17512,82	9132,963	8379,853	1483234
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	17256,27	8876,419	8379,853	1441335
9	17204,96	8825,11	8379,853	1432955
10	17153,65	8773,801	8379,853	1424575
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned}\sum I &= \frac{180}{2}\cdot\left[9235,6+9235,6+(180-1)(-8379,9)\left(\mathrm{e}^{\frac{0,07325}{12}}-1\right)\right]\\ &= 835820,03.\end{aligned}$$

Při konstantním odepisování dlužné částky tedy zaplatíme za úvěr méně, neboť se od samého počátku rychleji snižuje základna pro výpočet úroků.