MAMO
podzim 2015
Přednáška 4
Lit: W-MT, ch3
McC-ABC, ch4

1 Jednoduchý růstový model

Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965) – optimalizační chování v čase, vs. Solow (konstantní míra úspor).

Původně deterministický model ⇒ zavedení stochastiky ⇒ stochastický růstový model ⇒ model reálného hospodářského cyklu (RBC).

Vyřešíme v diskrétním čase, pomocí nástrojů dynamického programování.

Model

Spotřebitelé (domácnosti) žijí nekonečně dlouho. Užitková funkce

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

má obvyklé vlastnosti.

Produkční funkce

$$y_t = F(k_t, n_t)$$

má opět obvyklé vlastnosti.

Výstup je buď investován nebo spotřebován.

$$y_t = c_t + i_t$$

Kapitál se vyvíjí dle rovnice

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

Míra depreciace δ je konstantní v čase, počáteční zásoba kapitálu k_0 je dána, $c_t > 0$ a $k_{t+1} \geq 0$. (Mohou být investice záporné?)

Domácnosti vlastní kapitál a pronajímají ho firmám.[1] Firmy najímají vstupy a maximalizují zisk, v každém období. Domácnosti maximalizují užitek ze spotřeby. Trhy se čistí. Výsledkem je konkurenční rovnováha (ukážeme později). Platí 1. teorém blahobytu. Konkurenční rovnováha je Pareto efektivní (stejná jako řešení SP). Řešíme jako problém sociálního plánovače.

V naší specifikaci se užitek z volného času neobjevuje ve spotřební funkci, domácnosti dodávají na trh všechen svůj čas $n_t = 1$.

$$y_t = F(k_t, 1) = f(k_t)$$

Sociální plánovač řeší

$$v(k_0) = \max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

vyhledem k

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t$$

pro $t = 0, 1, 2 \ldots$ a při daném k_0. $v(k_0)$ je diskontovaný celoživostní užitek reprezetnativní domácnosti, pokud sociální plánovač vybere optimálně $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ při počáteční zásobě kapitálu k_0.

[1] Organizace trhu ⇒ hodně způsobů, všechny vedou na stejnou konkurenční rovnováhu.

Nekonečný plánovací horizont. Dá se řešit pomocí Lagrangiánu (ale! může být nekonečně mnoho řešení, potřebujeme koncovou podmínku - podmínku transversality (transversality condition, TVC). Podíváme se později.

Nebo přejdeme na dynamické programování.

1.1 Rekurzivní formulace

Terminologie

Stavová proměnná – proměnná jejíž hodnota je určena již dříve

- nějakým jednáním, tj. *endogenní* stavová proměnná, např. kapitál k_t
- nějakým procesem, tj. *exogenní* stavová proměnná, např. technologie z_t

Příklad se spotřebou.

Řídící proměnná – proměnná jejíž hodnotu si jednotlivec (soc. plánovač) vybírá, aby maximalizoval cílovou funkci.

Často máme na výběr, která proměnná bude stavová a která řídící. Výběr řídící proměnné může hodně zjednodušit řešení problému.

Dosadíme do užitkové funkce za c_t

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}]$$

Stavová proměnná? řídící proměnná?

Předpokládejme, že můžeme hodnotu diskontovaného užitku v nekonečném horizontu spočítat.

$$\begin{aligned}
v(k_0) &= \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] \\
&= \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_0 \text{ dáno}}} \left\{ u[f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] \right\} \\
&= \max_{\substack{k_1 \\ k_0 \text{ dáno}}} \left\{ u[f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \beta \left[\max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty} \\ k_1 \text{ dáno}}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] \right] \right\} \\
&= \max_{\substack{k_1 \\ k_0 \text{ dáno}}} \left\{ u[f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \beta \left[\max_{\substack{\{k_{t+2}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_1 \text{ dáno}}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t} u[f(k_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}] \right] \right\}
\end{aligned}$$

kde výraz v hranatých závorkách je podobný původnímu maximalizačnímu problému SP. Ten začínal s daným k_0, teď začíná s daným k_1 a maximalizuje od dalšího období. Nic jiného se nezměnilo (technologie, užitkové funkce, ani SP), proto můžeme optimální hodnotu problému v [ ] označit jako $v(k_1)$ a dostaneme

$$v(k_0) = \max_{\{k_1,\, k_0 \text{dáno}\}} \{u[f(k_0) + (1-\delta)k_0 - k_1] + \beta v(k_1)\}$$

Dostali jsme jednodušší maximalizační problém (maximalizujeme jen přes jednu proměnnou k_1). Ale jelikož je funkce $v(.)$ i na pravé straně a my ji neznáme, tak to není až tak jednoduchý.

Rekurzivní formulace problému – Bellmanova rovnice

Označíme dnešní stav k a zítřejší k'. (Pozor, není to značení derivace).

$$v(k) = \max_{k'} \{u[f(k) + (1-\delta)k - k'] + \beta v(k')\}$$

Hodnotová funkce $v(k)$: diskontovaný celoživotní užitek agenta, ode dneška dále, při daném kapitálu k na začátku dnešního období, když SP alokuje spotřebu optimálně. Bellmanova rovnice je funkční rovnice. Vyjadřuje trade-off mezi obdobími. Buď zvýším spotřebu dnes (vyšší užitek dnes), nebo uspořím a budu více kapitálu zítra (tudíž větší budoucí užitek).

Stacionární problém – objevuje se ve stejné podobě nezávisle na čase (mění se pouze počáteční podmínky).

Chceme problém vyřešit (pro jakékoliv dané k). Chceme najít hodnotovou funkci $v(.)$, která jřeší Bellmanovu rovnici. Ale hlavně chceme najít **optimální rozhodovací pravidlo** (decision rule), což funkce, která nám říká jak se máme rozhodnout na základě daného stavu. Rozhodovací pravidlo pro kapitál

$$k_{t+1} = g(k_t) \quad \text{nebo-li} \quad k' = g(k)$$

optimální volba k' jako funkce k.

Případně rozhodovací pravidlo pro spotřebu

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - g(k_t) \quad \text{nebo-li} \quad c = f(k) + (1-\delta)k - g(k)$$

Někdy se tomu říká *policy function*, ale my tomu budeme říkat decision rule (pře neděláme politiku, ale ekonomii).

Pomocí Bellmanovy rovnice můžeme najít $v(.)$ a pak i $g(.)$, protože Bellmanova rovnice splňuje *contraction mapping theorem*, který říká

1. Existuje jediná funkce $v(.)$, která splňuje BE
2. když začneme s počáteční funkcí $v_0(k)$ a zadefinujeme $v_{i+1}(k)$

   $$v_{i+1}(k) = \max_{k'} [u(k, k') + \beta v_i(k')]$$

   tak pro $i = 0, 1, 2 \dots$

   $$\lim_{t\to\infty} v_{i+1}(k) = v(k)$$

Z toho vyplývá, že máme dvě alternativy, jak najít hodnotovou funkci.

1.1.1 Uhádni a ověř (guess & verify)

Když máme štěstí a správně uhádneme $v(k_t)$ můžeme ji dosadit za $v(k_{t+1})$ na pravé straně BE a ověřit, že je jejím řešením. Bohužel to funguje jen v několika málo případech. (výhoda - máme analytické řešení)

Příklad Guess & Verify

Máme produkční funkci $F(k, n) = k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$, kde $\alpha \in (0, 1)$, $u(c_t) = \ln(c_t)$ a stoprocentní depreciace kapitálu $\delta = 1$. Produkční fci můžeme přepsat jako $f(k) = k^\alpha$, protože domácnosti neocení užitek z volného času a dodávají celou jednotku práce $n = 1$. Bellmanova ronvice

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{\ln(k_t^\alpha - k_{t+1}) + \beta v(k_{t+1})\}$$

Řešením je hodnotová funkce $v(k_t) = a + b\ln(k_t)$, kde a a b jsou koeficienty (funkce parametrů α a β) a rozhodovací pravidlo je: $k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha$ a pro $c_t = (1-\alpha\beta)k_t^\alpha$. Steady-state kapitálu $k^* = (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ Obrázek. Pro nalezené rozhodovací pravidlo můžeme vypočítat celkou sekvenci $\{k_{t+1}\}_{t=0}^\infty$. (máme kroky, každý krok je jedna časová jednotka)

Odhad platí jen pro C-D produkční funkci, log užitkovou funkci a 100 % depreciaci. Pro jiné případy neplatí, ať budete hádat sebevíc.

1.1.2 Iterace hodnotové funkce (value function iteration)

Najdeme aproximaci hodnotové funkce. Vytvoříme *grid* $k \in \{k_1, k_2 \dots k_m\}$, kde $k_j < k_{j+1}$ uděláme počáteční odhad hodnotové funkce pro každou hodnotu kapitálu $v_0 = v_0(k_j)$ (vektor 0) a pak iterujeme podle výše uvedeného schématu, až nám to zkonverguje.

Přesnost záleží na hustotě gridu (diskretizaci), čím hustější tím lepší výsledek. V tomto případě je to celkem o.k., máme jen jednu stavovou proměnnou. Ale může být výpočetně náročné. Pro grid o délce m a n stavových proměnných tak hledáme maximum přes m^n bodů. Jak roste n tak ohromě roste výpočetní náročnost (*kletba dimenzionality*).

(Výhoda: máme zakřivené rozhodovací pravidlo, platí, i když jsme dále od steady-statu)

Nalezení řešení derivováním

Řešení problému sociálního plánovače pomocí podmínek prvního řádu (Eulerova rovnice). Předpoklad, že hodnotová funkce je diferencovatelná a konkávní (Benveniste and Sheinkman, 1979)

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{u[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] + \beta v(k_{t+1})\}$$

Stavová proměnná k_t, řídící k_{t+1}. Podmínka prvního řádu (FOC):

$$\frac{\partial v(k_t)}{\partial k_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial u(\dots)}{\partial k_{t+1}} + \beta \frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} \frac{\partial c_t}{\partial k_{t+1}} + \beta \frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t}(-1) + \beta \frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} = \beta \frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}$$

Ale neznáme $v(.)$ a tím pádem ani její derivaci $\frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}$. Naštěstí existuje teorém obálky (envelope theorem). Derivací Bellmanovy rovnice (obou stran) podle endogenní stavové promenné (k_t) a použitím envelope theoremu dostaneme:

$$\frac{\partial v(k_t)}{\partial k_t} = \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} \frac{\partial c_t}{\partial k_t}$$

$$\frac{\partial v(k_t)}{\partial k_t} = \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} \left[\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t} + (1-\delta) \right]$$

Máme stacionární problém. Můžeme výraz posunout o jedno období dopředu

$$\frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}} \left[\frac{\partial f(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} + (1-\delta) \right]$$

a dosadit do FOC za $\frac{\partial v(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}$ a dostaneme mezičasovou podmínku optimality – Eulerovu rovnici.

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} = \beta \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}} \left[\frac{\partial f(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} + (1-\delta) \right]$$

$$\frac{\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t}}{\beta \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}}} = 1 + \frac{\partial f(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} - \delta$$

LHS = mezní míra substituce ve spotřebě, RHS 1 + čistá nájemní cena kapitálu.

Nebo hezčí zápis

$$\frac{u_c(c_t)}{\beta u_c(c_{t+1})} = 1 + f_k(k) - \delta$$

Případně

$$u_c(c_t) = \beta u_c(c_{t+1})[1 + f_k(k) - \delta]$$

LHS = ztráta užitku v t z konzumace o jednu jednotku méně, RHS = nárůst užitku v $t+1$, diskontovaného do času t, z investování do kapitálu. V optimu se přínos a ztráta musí rovnat.

Jak to vypadá ve steady-statu? Platí $k = k_{t+1} = k^*$ a $c = c' = c^*$.

$$1 + f_k(k) - \delta = \frac{1}{\beta}$$

LHS = 1 + nájemní cena kapitálu (mezní produkt kapitálu) - míra depreciace, RHS = úroková míra (implicitně vyjádřená v diskontním faktoru).

Pro nájemní cenu kapitálu budu používat velké R, tedy $\frac{\partial f(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = f_k(k) = R$, pro úrokovou míru malé r.

1.2 Konkurenční rovnováha

Vratíme se zpět k původnímu problému, jak ho řeší spotřebitelé a firmy.

1.2.1 Domácnosti

Akumulují kapitál a investují – pronajímají kapitál firmám a nabízejí práci. Nabídka práce = 1, protože nemají disutilitu z práce.

Řeší mezičasový problém

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{1}$$

vzhledem k rozpočtovému omezení

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t + R_t k_t$$

kde k_0 je dané, $c_t > 0$, $k_t > 0$.

Ale potřebujeme koncovou podmínku, podmínku transverzality (TVC).

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)[1 + f'(k_t) - \delta]\ k_t = 0$$

po dosazení

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1})[1 + f'(k_t) - \delta]\ k_t = 0$$

diskontovaný užitek z dodatečné jednotky kapitálu * kapitálová zásoba = 0. Interpretace: hodnota kapitálu – měřena diskontovaným užitkem jde v limitě k 0 (kapitál nemusí jít k 0, stačí, když jeho stínová cena konverguje k 0).

Případně

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t k_t = 0$$

kde λ_t je Lagrangeův multiplikátor k rozpočtovému omezení.

Dosadíme do cílové funkce a řešíme jako neomezenou optimalizaci

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(w_t + R_t k_t + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$$

FOC: $\frac{\partial u(\ldots)}{\partial k_{t+1}} = 0$

$$-\beta^t u'(w_t + R_t k_t + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta^{t+1} u'(c_{t+1})(R_{t+1} + 1 - \delta) = 0$$

Tedy opět dostáváme Eulerovu rovnici, stejnou jako v případě řešení sociálního plánovače

$$\frac{u_c(c_t)}{\beta u_c(c_{t+1})} = 1 + R_{t+1} - \delta$$

MRS = 1 + čistá nájemní cena kapitálu

Steady-state $c_t = c_{t+1} = c^*$

$$1 + R - \delta = \frac{1}{\beta}$$

Pravá strana rovnice je čistá nájemní cena kapitálu, která je rovna reálné úrokové míře.

$$R - \delta = r$$

víme, že pro β platí

$$\beta = \frac{1}{1+\rho} \qquad \text{nebo-li} \qquad \frac{1}{\beta} = 1 + \rho$$

a po dosazení dostaneme

$$R - \delta = r = \rho$$

Reálná úroková míra = míra časových preferencí (diskontní míra).

1.2.2 Firmy

Maximalizují zisk v každém období

$$\max_{k_t, n_t} [F(k_t, n_t) - w_t n_t - R_t k_t] \tag{2}$$

FOC

$$F_k(k_t, n_t) = R_t$$
$$F_n(k_t, n_t) = w_t$$

Definice konkurenční rovnováhy

1. Pro dané ceny $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$, alokace reprezentativní domácnosti $\{c_t, i_t, k_t^s, n_t^s\}_{t=0}^{\infty}$ řeší její optimalizační problém (1)
2. Pro dané ceny $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$, alokace reprezentativní firmy $\{k_t^d, n_t^d, y_t\}_{t=0}^{\infty}$ řeší její optimalizační problém (2)
3. Trhy se čistí
   - trh zboží: $y_t = c_t + i_t$
   - trh práce: $n_t^d = n_t^s$
   - trh kapitálu: $k_t^d = k_t^s$

Poznámka: K čemu je nám tohle řešení? Tohle jsou "jen"podmínky optimality, ne rozhodovací pravidlo. Ale dájí se log-linearizovat kolem steady-statu, nakalibrovat (určit parametry) a nacpat do softwaru (Dynare), který nám najde rozhodovací pravidlo. Aproximace, není zakřivené. Pokud jsme dále od steady-statu, tak je to nepřesné. Změna steady-statu se špatně zkoumá. Přesto se tento postup hodně používá. Poslední dobou ale opět frčí řešení nelineráních modelů, ale to je trochu hard core.

K něčemu je ale řešení konkurenční rovnováhy dobré. My jsme pro sociálního plánovače našli rozhodovací pravidlo, pro k a c (celkou sekvenci k), ale potřebujeme znát rovnovážné ceny. Ty zjistíme právě z řešení konkurenční rovnováhy, např. z podmínky optimality firem, w a R.

Rovnováha vs steady-state.

Envelope theorem

Máme cílovou funkci $f(x,r)$, kde r je parametr.

$$f^*(r) = \max_x f(x,r)$$

je optimální hodnotová funkce, kterou získáme maximalizací funkce $f(.)$ podle x. Potom $x^*(r)$ je (arg max) hodnota proměnné x, která řeší optimalizační problém (a která závisí na parametru r), tedy

$$f^*(r) = f(x^*(r), r)$$

Envelope theorem:

$$\frac{\mathrm{d}f^*(r)}{\mathrm{d}r} = \left.\frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\right|_{x=x^*(r)}$$

Jak se změní optimánlí hodnotová funkce, když se změní r? Envelope theorem nám říká, že stačí spočítat parciální derivaci dle r, přičemž x je fixováno (vyhodnoceno v optimu).