Číselné množiny a úvod do algebry

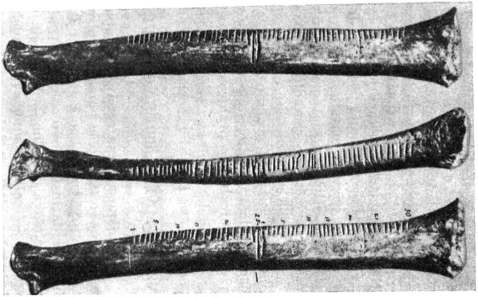
Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Profesor Karel Absolon objevil v Dolních Věstonicích vlčí kost s 55 zářezy.

Věstonická vrubovka



Přirozená čísla

- Pravěký člověk počítal:
  - Jeden a mnoho $\longrightarrow$ Měl jeden oštěp a nebo mnoho oštěpů.
  - Jeden, dva a mnoho

    $\vdots$
  - Jeden, dva, tři, čtyři, pět a mnoho
- Pětková vs. desítková soustava
- „Nepotřebnost“ nuly
- Značíme symbolem: $\mathbb{N}$

  Značením $\mathbb{N}_0$ budeme rozumět množinu $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Celá čísla

- Záporná čísla vznikly v Číně kolem r. 300 p.n.l (červené a černé tyčinky na počítacích tabulkách)
- První „opravdová“ záporná čísla pravděpodobně využívali v Indii kolem r. 630 n.l.,
- Formální zavedení:
  - „$\leq$“ přirozené uspořádání na množině $\mathbb{N}$,
  - operace „$+$“ „$\cdot$“,
  - pro dvě lib. čísla $a, b \in \mathbb{N}$ existuje $c : a = b + c$,
  - označíme-li $c = a - b$, pak v množině přirozených čísel nemusí existovat řešení,
  - zavádíme čísla opačná a 0, aby operace „$-$“ byla vždy proveditelná.
- Označením $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$

Racionální čísla

- Slovo „**ratio**“ znamení poměr či podíl.
- Vznik ve starověkém Egyptě kolem roku 1000 př.n.l - kmenové zlomky $\frac{1}{n}$,kde $n \in \mathbb{N}$.
- Využití v geometrii při zeměměřičství.
- Formální zavedení:
  - pro dvě lib. čísla $a, b \in \mathbb{Z}$, kde $b \neq 0$, existuje $c \in \mathbb{Z} : a = b \cdot c$,
  - označíme-li $c = \frac{a}{b}$, pak v množině celých čísel nemusí existovat řešení,
  - zavádíme zlomky, aby operace „:“ (resp.„/“) byla vždy proveditelná.
- Značíme symbolem: $\mathbb{Q}$.

Racionální čísla

Vlastnosti racionálních čísel:

- každé číslo tvaru $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$,
- $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$; $ac = bd$, potom $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,
- každé celé číslo lze vyjádřit zlomkem,
- operace „$+, -, \cdot$“ jsou přípustné na celé množině $\mathbb{Q}$,
- operace „:“ číslem b je definována pro všechna racionální čísla mimo nulu,
- $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$; $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ac \leq bd$
- každé racionální číslo lze zapsat ve formě:
  - desetinného konečného rozvoje

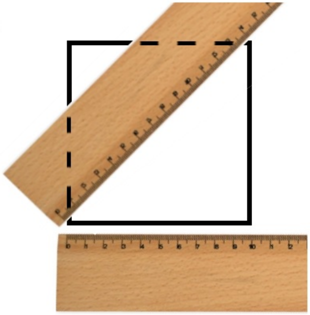
$$\frac{1}{8} = 0,125 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}$$

  - nekonečného periodického rozvoje

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3}$$

Iracionální čísla

- Pythagorejská představa ekvivalence čísla a tvarů.
- Čtverec - jeden z nejjednodušších geometrických útvarů a přece skrývá cosi iracionálního (Hippasos).

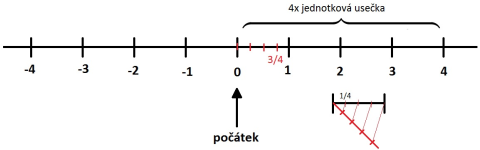


- první nesouměřitelné číslo $\sqrt{2}$; další π, e
- Značení $\mathbb{IQ}$

Reálná čísla

- Reálná čísla jsou sjednocením množiny racionálních a množiny iracionálních čísel.
- Označení $\mathbb{R}$
- V matematice je můžeme chápat jako čísla, kterým lze jednoznačně přiřadit body nekonečné přímky (reálné osy).

Reálná osa



Vlastnosti počítání s reálnými čísly

Pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ a operace „$+$“, „$\cdot$“ platí:

- komutativní zákon

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

- asociativní zákon

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- existuje neutrální prvek

$$a + 0 = a, \quad \text{pro každé} a \in \mathbb{R}$$
$$a \cdot 1 = a, \quad \text{pro každé} a \in \mathbb{R}$$

- existuje inverzní prvek

$$\exists (-a) \in \mathbb{R}; a + (-a) = 0$$
$$\exists a^{-1} \in \mathbb{R}; a \cdot a^{-1} = 1$$

Vlastnosti počítání s reálnými čísly

Pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ a operace „$+$“, „$\cdot$“ platí:

- distributivní zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- lineární uspořádání

$$a \neq b : a < b \vee a > b$$

- ani jedna operace „nerozhází“ uspořádání

$$a < b, \text{pak } a + c < b + c$$

$$a < b, \text{pak } a \cdot c < b \cdot c$$

Uvědomme si, že existují i další číselné obory (nad rámec kurzu MAT0).

a) Komplexní čísla
b) Kardinální čísla
c) Ordinální čísla

Mocnina reálného čísla

Uvažujme libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ pak je zřejmé, že platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \tag{1}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{Pozor! } a \neq 0 \tag{2}$$

Pravidla pro počítání s mocninami:

- $a^0 = 1; \quad \text{Pozor! } a \neq 0$
- $0^n = 0$
- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r : a^s = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^s$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Odmocnina

Zavedení pojmu odmocniny:

- odmocnina je „částečně“ inverzní operací s mocnině,
- zavádí se pro libovolné nezáporné reálné číslo a jako

$$b^n = a,$$

  b pak nazýváme n-tou odmocninou a zapisujeme $b = \sqrt[n]{a}$,
- **POZOR!** Pro $a \in \mathbb{R}_0^+$ platí:

$$a = \pm\sqrt{a}$$

  ,
- pro lichá n lze odmocňovat i záporná čísla.

Pravidla pro počítání s odmocninami Pro výrazy $a, b > 0$ a $m, n \in \mathbb{N}$:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

Absolutní hodnota

Absolutní hodnota reálného čísla

- je číslo, které je vždy nezáporné,
- z kladného čísla je vždy kladné číslo,
- ze záporného čísla je to vždy číslo opačné
- $\sqrt{a^2} = |a|$

Formální zavedení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, položme

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Číslo $|x|$ nazveme absolutní hodnotou.

Absolutní hodnota

Pravidla pro absolutní hodnota Pro výrazy $a, b, c, \epsilon \in \mathbb{R}$ a $\epsilon > 0$:

- $|a| \geq 0$
- $a \leq |a|, -a \leq |a|$
- $|a| = |-a|$
- $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$

Úprava algebraických výrazů

Algebraickým výrazem myslíme zápis složený s čísel a neznámých spojených symboly matematických operací.

Příklad výrazu

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{10x-5} \tag{3}$$

Obvyklé pořadí prováděných operací

1. krok umocnění a odmocnění (výcenásobné exponenty se vyhodnocují zprava doleva)
2. krok násobení a dělení
3. krok sčítání a odečítání

Riziko omylu eliminujeme použitím závorek.

Typy algebraických výrazů

- Racionální celistvé výrazy - mnohočleny

$$5x^2 - 4x + 12$$

- Racionální lomené výrazy

$$\frac{2x-1}{2x+1}$$

- Iracionální výrazy

$$1 + \sqrt[3]{a^2}$$

Pravidla pro úpravu mnohočlenů

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Pravidla pro úpravu lomených výrazů

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$
$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

Pravidla pro úpravu lomených výrazů

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \text{ rozšíříme výrazem } \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} \text{ a dostaneme } \frac{ab^{n-m}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} \text{ rozšíříme výrazem } \frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} \text{ a dostaneme } \frac{a(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})}{b - c}$$

Speciální podmnožiny množiny reálných čísel

- Ohraničení číselné množiny
  - shora
  - zdola
- Maximum číselné množiny M
  - značení: $\max M = x_{\max}$
  - $x_{\max} \in M$
  - $\forall x \in M : x \leq x_{\max}$
  - horní ohraničení M
- Minimum číselné množiny M
  - $\min M = x_{\min}$
  - $x_{\min} \in M$
  - $\forall x \in M : x \geq x_{\min}$
  - dolní ohraničení M

Speciální podmnožiny množiny reálných čísel

- Supremum číselné množiny
  - značíme $G = \sup M$, nebo $G = \sup\limits_{x \in M} x$
  - Je-li $x \in M$ pak : $x \geq G$
  - nejmenší horní ohraničení M
  - POZOR G nemusí nutně patřit do M
- Infimum číselné množiny
  - značíme $g = \inf M$, nebo $g = \inf\limits_{x \in M} x$
  - Je-li $x \in M$ pak : $x \leq g$
  - největší dolní ohraničení M
  - POZOR g nemusí nutně patřit do M

Speciální podmnožiny množiny reálných čísel

Zkuste ve skupince rozmyslet příklady!

Speciální podmnožiny množiny reálných čísel

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x \geq 0\}$$

Interval

Uvažujme čísla $a, b \in \mathbb{R}$ kde $a < b$ množinu všech $x \in \mathbb{R}$ pro něž platí $a < x < b$.
Zapisujemme (a, b).

Typy intervalu

- uzavřený
- jednostraně otevřený
- oboustraně otevřený