Vybraná rozdělení pravděpodobnosti

Alternativní rozdělení $\mathcal{A}(\vartheta)$

Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je rovna ϑ. *Příklad: X říká, zda při jednom hodu kostkou padla ⚅. Pak $X \sim \mathcal{A}(\frac{1}{6})$.*

Binomické rozdělení $\mathcal{B}i(n;\vartheta)$

Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n opakovaných nezávislých pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je ϑ. *Příklad: Házíme $10\times$ kostkou, X říká, kolik padlo ⚅. Pak $X \sim \mathcal{B}i(10;\frac{1}{6})$.*

Geometrické rozdělení $\mathcal{G}e(\vartheta)$

Náhodná veličina X udává počet neúspěchů v posloupnosti opakovaných nezávislých pokusů předcházející prvnímu úspěchu, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je ϑ. *Příklad: Házíme kostkou, dokud nepadne ⚅. X říká, kolik čísel nám padlo před tím, než nám ⚅ padla. Pak $X \sim \mathcal{G}e(\frac{1}{6})$.*

Poissonovo rozdělení $\mathcal{P}o(\lambda)$

Náhodná veličina X udává počet událostí za jednotku času, když víme, že průměrně nastává λ událostí za jednotku času. *Příklad: Do obchodu přijde průměrně 5 zákazníků za hodinu. X označuje počet zákazníků, kteří do obchodu za hodinu přijdou. Pak $X \sim \mathcal{P}o(5)$.*

Rovnoměrné diskrétní rozdělení $\mathcal{R}d(G)$

G je konečná množina o n prvcích. Náhodná veličina X nabývá se stejnou pravděpodobností každé hodnoty z množiny G. *Příklad: Házíme kostkou. X označuje, co nám padlo. Pak $X \sim \mathcal{R}d(\{$⚀; ⚁; ⚂; ⚃; ⚄; ⚅$\})$.*

Rovnoměrné spojité rozdělení $\mathcal{R}s(a,b)$

Náhodná veličina X nabývá hodnot z intervalu (a,b), přičemž všechny realizace jsou stejně možné. *Příklad: X popisuje hmotnost pytlíku quinoy, přičemž všechny hodnoty z intervalu $\langle 480; 510$ [g] jsou stejně možné. Pak $X \sim \mathcal{R}s(480;510)$.*

Exponenciální rozdělení $\mathcal{E}x(\lambda)$

Náhodná veličina X udává dobu čekání na příchod nějaké události, která se může dostavit každým okamžikem se stejnou šancí, přičemž $\frac{1}{\lambda}$ udává střední hodnotu doby čekání. *Příklad: X popisuje dobu v letech, za kterou se porouchá nově koupený telefon, přičemž v průměru se tento typ telefonu porouchá za 3 roky. Pak $X \sim \mathcal{E}x(\frac{1}{3})$.*

Normální rozdělení $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Náhodná veličina X vzniká tak, že ke konstantě μ se přičítá velké množství drobných nezávislých náhodných vlivů kolísajících okolo nuly. *Příklad: Výška mužů X je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou 180 [cm] a směrodatnou odchylkou 6 [cm]. Pak $X \sim \mathcal{N}(180;6^2)$.*

Rozdělení	$\mathbb{E}X$	$\mathbb{D}X$	Pravděpodobnostní funkce (hustota)
$\mathcal{A}(\vartheta)$	ϑ	$\vartheta(1-\vartheta)$	$p(x) = \begin{cases} 1-\vartheta & \text{pro } x=0 \\ \vartheta & \text{pro } x=1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{B}i(n,\vartheta)$	$n\vartheta$	$n\vartheta(1-\vartheta)$	$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} & \text{pro } x=0,1\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{G}e(\vartheta)$	$\frac{1-\vartheta}{\vartheta}$	$\frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$	$p(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x\vartheta & \text{pro } x=0,1,2\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{P}o(\lambda)$	λ	λ	$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pro } x=0,1,2\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{R}d(G)$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x\in G=\{1,2,\dots,n\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{R}s(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x\in(a,b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{E}x(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$f(x) = \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{pro } x>0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pro $x\in\mathbb{R}$

Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi

A a B jsou jevy.

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$ a $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$
- Jevy A a B jsou stochasticky nezávislé právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Jevy A a B jsou neslučitelné právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$
- Jevy A a má za důsledek jev B právě tehdy, když $P(A \cap B) = P(A)$
- Definice podmíněné pravděpodobnosti: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Bayesův vzorec: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Číselné charakteristiky náhodných veličin

V následujících vztazích jsou a, a_i, b, b_i reálná čísla; X, X_i, Y, Y_i náhodné veličiny a m, n přirozená čísla.

- $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_{X n}) = a_1 \mathbb{E} X_1 + a_2 \mathbb{E} X_2 + \cdots + a_n \mathbb{E} X_n$
- Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, pak $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

- $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$
- $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
- $\mathbb{D}(a + bX) = b^2 \mathbb{D}(X)$
- $\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{D}(X) \pm 2\mathrm{C}(X, Y) + \mathbb{D}(Y)$
- $\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{D} X_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{C}(X_i, X_j)$

- $\mathrm{C}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\mathrm{C}(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = b_1 b_2 \mathrm{C}(X_1, X_2)$
- $\mathrm{C}(\sum_{i=1}^{b} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{C}(X_i, Y_j)$
- $\mathrm{R}(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{C}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{D}(X_1)\mathbb{D}(X_2)}}$
- $\mathrm{R}(X_1, X_2) = \mathrm{R}(X_2, X_1)$
- Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, pak $\mathrm{C}(X, Y) = \mathrm{R}(X, Y) = 0$. Opačná implikace neplatí.
- $\mathrm{R}(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = \mathrm{sign}(b_1 b_2)\mathrm{R}(X_1, X_2)$, kde $\mathrm{sign}(b_1 b_2)$ vrací znaménko (+1 nebo -1) součinu $b_1 b_2$.

Náhodné vektory

U náhodných vektorů $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ pracujeme s vektorem středních hodnot $\mathbb{E}\boldsymbol{X} = (\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_2)$ a variační matici $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}X_1 & \mathrm{C}(X_1; X_2) \\ \mathrm{C}(X_1; X_2) & \mathbb{D}X_2 \end{pmatrix}$.

Dvourozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_2 \sim \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$ se skládá ze dvou jednorozměrných normálních $\mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1^2)$ a $\mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2^2)$, která jsou korelována koeficientem korelace ρ.