

# **Reálný úrok v procesu diskrétního a spojitého úročení.**

# Efektivní úroková míra

- Jak velká roční nominální míra při ročním skládání odpovídá roční nominální míře při denním, měsíčním nebo jiném skládání.

$$i_{\text{efekt}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

kde  $i_{\text{efekt}}$ ... roční efektivní úroková míra,  
 $i$ ... roční nominální úroková míra,  
 $m$  ... četnost skládání úroků.

## Frekvence úročení:

**p.a.** = roční (*per annum*)

**p.s.** = pololetní (*per semestre*)

**p.q.** = čtvrtletní (*per quartale*)

**p.m.** = měsíční (*per mensem*)

**p.sept.** = týdně (*per septimanam*)

**p.d.** = denně (*per diem*)

**Lze i častěji?**

# Jak to funguje?

## EFEKTIVNÍ ÚROKOVÁ MÍRA

$$\text{NEG. POZITĚ} \\ EUM = \left(1 + \frac{MUR}{n}\right)^n - 1$$

$$\text{S. POZITĚ} \\ EUM = e^{\frac{MUR}{n}} - 1 \\ \rightarrow 2,718$$

10%

$$a) \text{ roční } = \left(1 + \frac{0,1}{1}\right)^1 - 1 = 0,1 = \boxed{10\%}$$

$$b) \text{ pololetí } = \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^2 - 1 = (1 + 0,05)^2 - 1 = (1,05)^2 - 1 = 0,1025 = \boxed{10,25\%}$$

$$c) \text{ měs. } = \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 1,10471 - 1 = 0,10471 = 10,471\%$$

$$d) \text{ stejně } =$$

# Spojité úročení

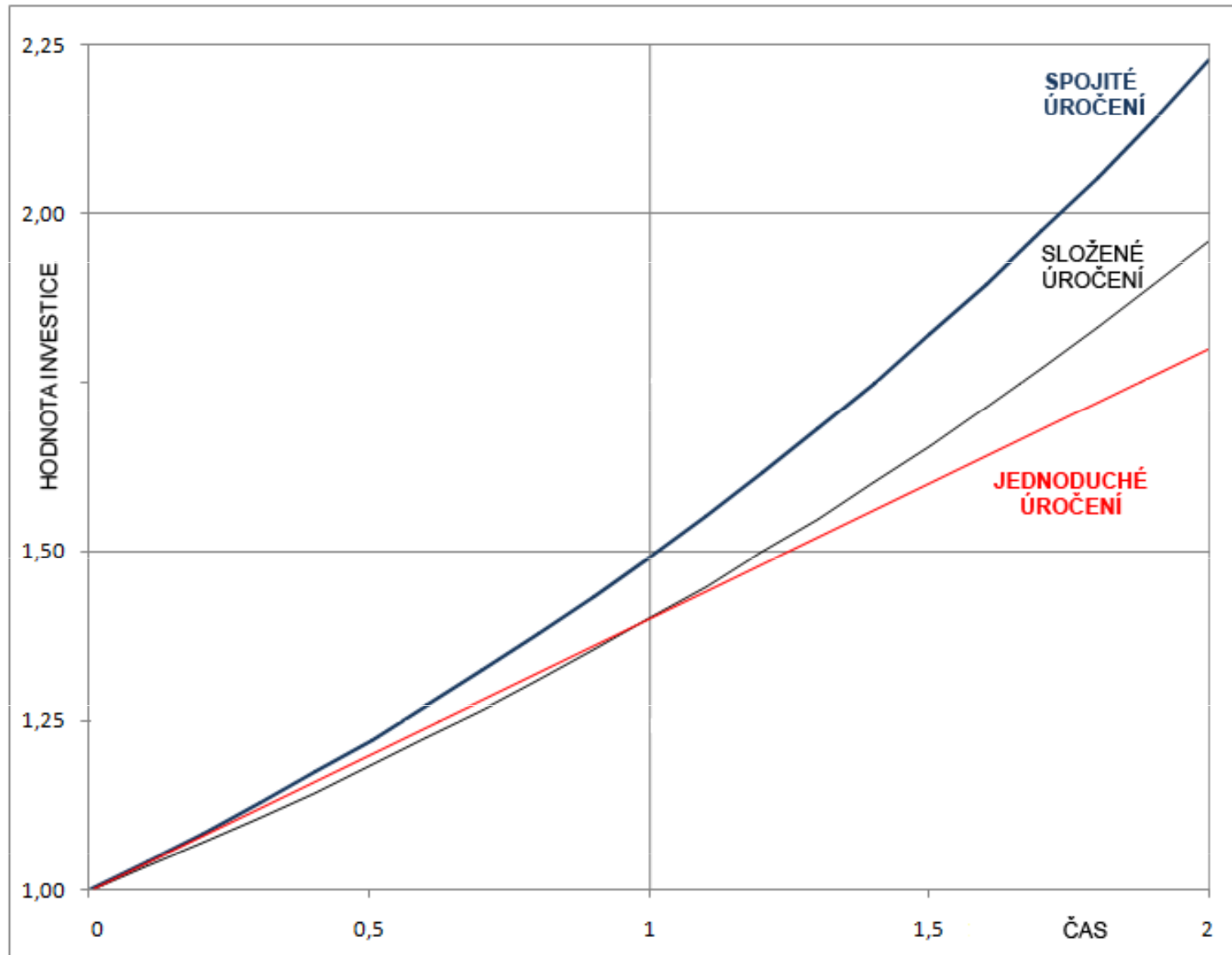
## Vysvětlení:

- Počet úrokovacích období se blíží nekonečnu
- Délka úrokovacích období se blíží nule
- Efektivní úroková sazba = úroková intenzita

$$f = \ln(1 + r_{ef}) \longleftrightarrow r_{ef} = e^f - 1$$

$$FV = PV \times e^{f \times t}$$

f = úroková intenzita  
r<sub>ef</sub> = efektivní úroková sazba  
t = čas v letech



## Vzorový příklad – spojité úročení

Jaká bude reálná hodnota kapitálu z vkladu 500 000 Kč, který necháte po dobu 3 let úročit měsíčním připisováním úroků? Úroková sazba, kterou finanční ústav poskytuje je 3,8 % p. a. Dále víte, že měsíční odhad inflace je 0,2 %.

Řešte předchozí příklad, se stejným dopadem na kapitál, pokud úročení i inflace budou spojité. Řešte taky za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, jenom **proces je spojitý**.

# Vzorový příklad – řešení 1. polovina

$$FV_r = ?$$

$$PV = 500\,000 \text{ Kč}$$

$$t = 3 \text{ roky}$$

$$\text{ú.o.} = 1 \text{ měsíc} = 12/\text{rok}$$

$$r = 3,8 \% \text{ p. a.}$$

$$\text{inlace}_m = 0,2 \% = \pi_m$$

Nominální zhodnocení:

$$FV = (500\,000 \times (1 + 0,00317)^{12 \times 3}) \\ = 560275,1367$$

1. Jaká je reálná měsíční úroková míra?

a) diskontuji úrokovou míru inflací:

$$r_{r\_m} = \left( \frac{1 + r_m}{1 + \pi_m} \right) - 1 = \frac{1 + \frac{0,038}{12}}{1 + 0,002} - 1 = 0,1164\%$$

b) Fisherova rovnice

$$r_{r\_m} = \left( \frac{r_m - \pi_m}{1 + \pi_m} \right) = \frac{\frac{0,038}{12} - 0,002}{1 + 0,002} = 0,1164\%$$

2. Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

## Vzorový příklad – 2. polovina

Řešte předchozí příklad, se stejným dopadem na kapitál, pokud úročení i inflace budou spojité = **s jakou úrokovou intenzitou dosáhnu stejného zhodnocení?**

Řešte za předpokladu, že sazby zůstávají stejné, jenom proces je spojité = **zadané hodnoty pro inflaci a úrokovou sazbu pouze dosadím do spojitého procesu.**



# Vzorový příklad – řešení 2. polovina, a)

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

inlace<sub>m</sub> = 0,2 %; r = 3,8 % p. a. (12 ú.o.)

FV<sub>r</sub> = ? = FV<sub>r(1)</sub>

spojité úročení = ∞ ú.o./ rok

f<sub>r</sub> = ?

2. Jaká bude reálná hodnota kapitálu?

$$FV_r = PV \times e^{f \times m \times t}$$



1. Jaká je reálná úroková intenzita?

$$r_{r\_m} = \left( \frac{1 + r_m}{1 + \pi_m} \right) - 1 = \frac{1 + 0,038/12}{1 + 0,002} - 1 = 0,116434\%$$

a) přes měsíční reálnou úrokovou sazbu

$$f_r(m) = \ln(1 + r_{r\_m}) = 0,116366\%$$

b) Přes efektivní reálnou úrokovou sazbu

$$f_r(\text{rok}) = \ln(1 + r_{ef}) = \ln(1 + r_{r\_m})^{12} = 1,396\%$$

$$FV_r = PV \times e^{f \times t}$$

$$FV_r = (500\,000 \times e^{0,01396 \times 3})$$

$$FV_r = 521390,81 \text{ Kč}$$

# Vzorový příklad – řešení 2. polovina, b)

b) Pouze spojitý proces

PV = 500 000 Kč

t = 3 roky

$FV_r = ?$

spojité úročení =  $\infty$  ú.o./ rok

r = 3,8 % p. a. = f

inflace<sub>m</sub> = 0,2 % = f( $\pi$ )

$$FVr = PV \left( \frac{r_{ef} + 1}{\pi_{ef} + 1} \right)^t = PV \left( \frac{e^{f(rok) \times t}}{e^{\pi(rok) \times t}} \right)$$
$$FVr = PV \left( \frac{e^{r \times t}}{e^{\pi \times m \times t}} \right) = 500\,000 \times \left( \frac{e^{0,038 \times 3}}{e^{0,002 \times 12 \times 3}} \right)$$

$$FV_r = 521447,2394$$

# Příklad Socratic 1

Zjistěte nominální úrokovou sazbu s počtem konverzí 4, pokud víte, že kapitál vzrostl z 500 000 Kč na 768 000 Kč během 8 let při spojitém úročení = sazbu, kterou by banka inzerovala jako p. a. s kvartálním úrokovým obdobím při stejném zhodnocení. Ve výpočtu využijte úrokovou intenzitu.

# Příklad Socrative 1 - řešení

- PV = 500 000
- FV = 768 000
- t = 8
- Úročení spojitě
- $r_{nom} = ?$  p. a.
- m = 4 = „kvartální úročení“

$$1. f = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{t} = 0,053647704 = 5,36 \%$$

$$2. r_{ef} = e^f - 1 = 0,05511 = 5,511 \%$$

$$3. r_{nom} = \left( (1 + r_{ef})^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \times 4 = 0,054009$$

$$r_{nom} = 5,4009 \%$$

# Prezentace příkladů

- Tým 5
- Tým 6
- Tým 7

## Příklad Socratic 2

Která úroková sazba je nejvýhodnější?

- a) 15 % p. a. s ročním připsáním úroků
- b) 1,24 % p. m. s půlročním připsáním úroků
- c) 14,8 % p. a. s čtvrtletním připsáním úroků
- d) 3,675 % p. q. s měsíčním připsáním úroků
- e) 7,3 % p. s. ve spojitém úročení

# Příklad Socratic 2 - řešení

Efektivní úroková sazba:

a)  $r_{ef} = r$

b)  $r_{ef} = (1 + r \times 6)^2 - 1$

c)  $r_{ef} = (1 + \frac{r}{4})^4 - 1$

d)  $r_{ef} = (1 + \frac{r}{3})^{12} - 1$

e)  $r_{ef} = e^f - 1$

$\ln((1+r)^2)$

zadání	r(x)	p. a.	r <sub>ef</sub>
15 % p. a. roční připsání úroků	0,15	15,0%	15,00%
1,24 % p. m. půlroční připsání úroků	0,0124	14,9%	15,43%
14,8 % p. a. čtvrtletní připsání úroků	0,148	14,8%	15,64%
3,675 % p. q. měsíční připsání úroků	0,03675	14,7%	<b>15,73%</b>
7,3 % p. s. spojité úročení	0,073	14,6%	15,13%

## Příklad Socratic 3

Vybrali jste si spořicí účet s nabídkou 3,68 % p. q. s měsíčním připsáním úroků a vložili jste na něj 300 000. Po prvním roce jste se ale rozhodli, že využijete konkurenční nabídky, která vám umožnila úročit prostředky sazbou 8 % p. s. ve spojitém úročení. Kolik za další 2 roky získáte prostředků, jestliže víte, že se při výběru platí jednorázová 15 % daň = jaká je  $FV(3 \text{ roky})$  netto?

Zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



# Příklad Socrative 3 - řešení

PV	300 000 Kč
r(1)	3,68% p. q.
m(1)	12
t(1)	1
t(2)	2
r(2)	8% p. s.
m(2)	nekonečno
Tax	15%
FV(1)	347196
FV2()	472356
FV netto	448576

1. Jaká je FV za první rok = na prvním účtu?

$$FV(1) = PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times t} = 300\,000 \left(1 + \frac{0,0368}{3}\right)^{12 \times 1} = 347\,196$$

2. Jaká je FV na konci spoření = po dalších dvou letech za nových podmínek?

$$FV(2) = FV(1) \times e^{f \times 2 \times t} = 347\,196 \times e^{\ln(1+0,08) \times 2 \times 2} = 472\,356,289$$

3. Jak vysoká je daň?

$$Tax = 0,15 \times (FV(2) - PV) = 0,15 \times (472\,356,289 - 300\,000) = 25\,853,44$$

4. Kolik prostředků získáme?

$$FV\ netto = 472\,356,289 - 25\,853,44 = 448\,502,849$$

Vjednomvzorci:

$$FV\ netto = 300\,000 \times \left(1 + \frac{0,0368}{3}\right)^{12} \times e^{\ln(1+0,08) \times 2 \times 2} - 0,15 \times (300\,000 \times \left(1 + \frac{0,0368}{3}\right)^{12 \times 1} \times e^{\ln(1+0,08) \times 2 \times 2} - 300\,000)$$

$$FV\ netto = 300\,000 \times \left(1 + \frac{0,0368}{3}\right)^{12} \times e^{\ln(1+0,08) \times 2 \times 2} \times 0,85 + 0,15 \times 300\,000$$

## Příklad Socratic 4

Pokračujte v předešlém příkladu: kolik reálně získáte, jestliže předpokládáte, že roční inflace (dnes 3 %) každý rok o 10 % skokově vzroste, přičemž inflace působí na prostředky spojitě?

Vybrali jste si spořicí účet s nabídkou 3,68 % p. q. s měsíčním připsáním úroků a vložili jste na něj 300 000. Po prvním roce jste se ale rozhodli, že využijete konkurenční nabídky, která vám umožnila úročit prostředky sazbou 8 % p. s. ve spojitém úročení. Kolik za další 2 roky získáte prostředků, jestliže víte, že se při výběru platí jednorázová 15 % daň?

**Děkuji za aktivní účast  
v případě dotazů piště 😊**