Komplexní příklady zaměřené na PV

Opakování - současná hodnota anuity (důchod)

= pravidelné výplaty (anuity) v pravidelných intervalech po určitou dobu za daných podmínek

= analogické k úvěru (důchod pro věřitele)

1. **Polhůtní důchod,** nechávám si vyplácet důchod na konci každého období, tzn. úročí se o období víc, a tedy pokud chci stanovit, kolik prostředků musím mít na účtu v čase 0, abych mohl vyplácet po počet období n důchod ve výši a, je současná hodnota nižší, než u předlhůtního důchodu (potřebuji méně):

$$PVA = \boxed{a \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}} = \boxed{a \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}} = \boxed{a \times \frac{1-v^n}{r}}, \text{ kde } v = \frac{1}{1+r}, \text{ přičemž } \frac{1-v^n}{r} \text{ nazýváme zásobitel polhůtní.}$$

2. **Předlhůtní důchod**, nechávám si vyplácet důchod na začátku každého období, o to vyšší je PVA (potřebuji více):

$$PVA = \boxed{a \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}} = \boxed{a \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \times (1+r)} = \boxed{a \times \frac{1-v^n}{1-v}}, \text{ přičemž } \frac{1-v^n}{1-v} \text{ nazýváme zásobitel předlhůtní}$$

Kde ***PVA*** je současná hodnota anuity, ***a*** je výše anuitní platby, ***r*** je úroková míra, ***n*** je počet období.

Opakování: co a jak lze řešit?

- Co hledám?
  - Současnou hodnotu = kolik musím mít naspořeno na začátku důchodu = PVA
  - Výši anuity = výši pravidelného důchodu = a
  - Délku důchodu = n
- Pozor na úrokové období, zadanou úrokovou míru a typ úročení
  - Vybíráme častěji během jednoho úrokového období?
  - Je třeba upravit nominální úrokovou míru na úrokové období?
  - Úročí banka standardně (složeně), nebo jinak (spojitě, jednoduše?)
- zohledňuji daň, inflaci, poplatky
  - Daň se platí vždy ze zisku!!!
  - Pozor na období: rozdíl mezi ÚO a DO, roční poplatky za správu apod.
  - Diskontuji FV na reálnou hodnotu = totožný postup co dříve
- Dynamický vývoj: změny v úrokové sazbě, inflaci apod.

MUNI ECON

Prezentace příkladů

- Tým 3
- Tým 4

MUNI
ECON

Příklad Socrative: komplexní příklad

Po dobu 20 let kumulujete prostředky na spořicím účtu. Na účet své prostředky ukládáte v pravidelných 20 denních intervalech a jedná se o předlhůtní spoření. Ukládaná částka je 2 000 Kč. Banka garantuje roční úrokovou sazbu 5 % a úrok připisuje 6krát za rok. Bezprostředně po ukončení spoření začnete vyplácet měsíční předlhůtní věčný důchod a finanční instituce spravující Vaše prostředky Vám po celou dobu bude garantovat sazbu 2,2% p. s.. Prostředky jsou úročeny půlletně. Po 14 letech se rozhodnete, že věčný důchod vyčerpáte a proto si necháte zvýšit vyplácenou rentu o 220 %. Jak dlouho budete rentu dostávat a kolik bude činit mimořádná anuita? Jak se situace změní, jestli budete platit z úroků daň 15% na konci roku? Poslední rok se daň odvede ke dni vyplacení poslední anuity?

Budeme počítat po částech: spoření, prvních 14 let důchodu, zbytek důchodu, daň na konci roku

Příklad Socrative 1 – část 1/8

Po dobu 20 let kumulujete prostředky na spořicím účtu. Na účet své prostředky ukládáte v pravidelných 20 denních intervalech a jedná se o předlhůtní spoření. Ukládaná částka je 2 000 Kč. Banka garantuje roční úrokovou sazbu 5 % a úrok připisuje 6krát za rok. Kolik naspoříte peněz?

MUNI ECON

Příklad Socrative 1 – řešení 1/8

Předlhůtní spoření:
t = 20 let
PO = 20 dní
ÚO = 60 dní
a = 2 000 Kč
r = 5 % p.a.

PO < ÚO → nejprve aritmetická řada, poté dosadit jako první člen geometrické řady

$$S_0 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1}$$

$$S_0 = 2000 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{0{,}05}{6}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}05}{6}\right)^{6 \cdot 20} - 1}{\frac{0{,}05}{6}}$$

$$S_0 = 1\,235\,898{,}04 \text{ Kč}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 2 – část 2/8

Bezprostředně po ukončení spoření máte na účtu 1 235 898,04 Kč a začnete vyplácet měsíční předlhůtní věčný důchod a finanční instituce spravující Vaše prostředky Vám po celou dobu bude garantovat sazbu 2,2% p. s.. Prostředky jsou úročeny půlletně. Kolik činí věčně vyplácená anuita?

Příklad Socrative 2 – řešení 2/8

Předlhůtní věčný důchod:
t = ∞
PO = 1 měsíc
ÚO = 6 měsíců
a = ?
r = 2,2 % p.s.

PO < ÚO → nejprve aritmetická řada, poté dosadit jako první člen geometrické řady

$$D_0 = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$D_0 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

$$1235898{,}04 = a \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}022\right) \cdot \frac{1}{1+0{,}022} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+0{,}022}}$$

$$a_{věčný} = 4\ 474{,}207\ \text{Kč}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 3 – část 3/8

Po 14 letech se rozhodnete, že věčný důchod vyčerpáte, a proto si necháte zvýšit vyplácenou rentu o 220 %. Na účtu nyní máte 1 235 898,04 Kč. Jak dlouho budete rentu dostávat?

Příklad Socrative 3 – řešení 3/8

<u>Předlhůtní důchod:</u>
po 14 letech
t = ?
PO = 1 měsíc
ÚO = 6 měsíců
$a_b = a_{věčný} * (1+2,2)$
r = 2,2 % p.s.

$$a_b = a_v \cdot (1 + 2{,}2)$$

$$a_b = 14\,317{,}46 \text{ Kč}$$

Stejná suma i po 14 letech
= věčný důchod

$$D_0 = a \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot r\right) \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^t}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

$$1235898{,}04 = 14317{,}46 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}022\right) \cdot \frac{1}{1+0{,}022} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}022}\right)^t}{1 - \frac{1}{1+0{,}022}}$$

t = 17,22 = 17 pololetí a 1,31 měsíce = 17 pololetí a 2 měsíce

MUNI ECON

Příklad Socrative 4 – část 4/8

Kolik bude činit mimořádná (poslední) anuita?

Příklad Socrative 4 – řešení 4/8

<u>Předlhůtní důchod:</u>
po 14 letech
t = ?
PO = 1 měsíc
ÚO = 6 měsíců
ab = avěčný * (1+2,2)
r = 2,2 % p.s.

Pro dopočet mimořádné anuity nejprve spočteme počáteční kapitál pro t = 17 pololetí.

$$D_{0;17} = 14317{,}46 \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}022\right) \cdot \frac{1}{1+0{,}022} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}022}\right)^{17}}{1-\frac{1}{1+0{,}022}}$$

$$D_{0;17} = 1\ 222\ 975{,}16\ Kč$$

Rozdíl hodnot D_0 a $D_{0;17}$ vyjadřuje PV zůstatku (Z) na bankovním účtu po 17 pololetích. Pokud tedy zúročíme do času t = 17, dostáváme samotný zůstatek po 17 pololetí.

$$Z_0 = D_0 - D_{0,17} = 12940{,}88 \text{ Kč}$$

$$Z_{17} = 12940{,}88 \cdot (1 + 0{,}022)^{17} = 18\ 733{,}94\ Kč$$

Dříve jsme dopočetli, že důchod bude vyplácen 17 pololetí a 2 měsíce. Jedná se o předlhůtní důchod, proto tedy od Z_{17} odečteme anuitu, zúročíme jeden měsíc a zůstatek bude tvořit necelou „mimořádnou" anuitu a_m.

$$a_m = (18733{,}94 - 14317{,}46) \cdot (1 + 0{,}022/6)$$

$$a_m = 4\ 432{,}68\ Kč$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 5 – část 5/8

Jak se situace změní, jestli budete platit z úroků daň 15% na konci roku?

Pro opakování aplikujeme na celý příklad od počátku. Nejprve tedy na spoření. Původní zadání: Po dobu 20 let kumulujete prostředky na spořicím účtu. Na účet své prostředky ukládáte v pravidelných 20 denních intervalech a jedná se o předlhůtní spoření. Ukládaná částka je 2 000 Kč. Banka garantuje roční úrokovou sazbu 5 % a úrok připisuje 6krát za rok. Kolik naspoříte peněz?

Příklad Socrative 5 – řešení 5/8 – spoření s daní

Předlhůtní spoření:
t = 20 let
PO = 20 dní
ÚO = 60 dní
a = 2 000 Kč
r = 5 % p.a.
tax = 15 %
DO = 1 rok

$$S_0 = 2000 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{0{,}05}{6}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}05}{6}\right)^{6\cdot 20} - 1}{\frac{0{,}05}{6}}$$

takhle bylo bez daně

Nejprve aritmetická řada do 1 ÚO, poté vyřešit přes 6 ÚO do 1 DO geometrickou řadou a poté vyřešit přes všechna DO opět geometrickou řadou

$$S_{0;1rok} = \underbrace{2000 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{0{,}05}{6}\right)}_{\text{ÚO}} \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{\left(1+\frac{0{,}05}{6}\right)^{6} - 1}{\left(1+\frac{0{,}05}{6}\right) - 1} - 6\right) \cdot 0{,}85 + 6\right)}_{\text{DO}}$$

$$S_{0,tax} = S_{0,1rok} \cdot \underbrace{\frac{\left[\left(\left(1+\frac{0{,}05}{6}\right)^{6} - 1\right) \cdot 0{,}85 + 1\right]^{20} - 1}{\left(\left(1+\frac{0{,}05}{6}\right)^{6} - 1\right) \cdot 0{,}85 + 1 - 1}}_{\text{vše}}$$

$$S_{0,tax} = 1\,136\,742{,}97\ Kč$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 6 – část 6/8

Jak se situace změní, jestli budete platit z úroků daň 15% na konci roku?

Nyní počítejme pro věčný důchod. Původní zadání: Bezprostředně po ukončení spoření máte na účtu ~~1 235 898,04 Kč~~ 1 136 742, 97 Kč (aktualizováno z předchozího příkladu) a začnete vyplácet měsíční předlhůtní věčný důchod a finanční instituce spravující Vaše prostředky Vám po celou dobu bude garantovat sazbu 2,2% p. s.. Prostředky jsou úročeny půlletně. Kolik činí věčně vyplácená anuita?

MUNI ECON

Příklad Socrative 6 – řešení 6/8 – věčný důchod s daní

Předlhůtní věčný důchod:
t = ∞
PO = 1 měsíc
ÚO = 6 měsíců
a = ?
r = 2,2 % p.s.
tax = 15 %
DO = 1 rok

$$1235898{,}04 = a \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}022\right) \cdot \frac{1}{1+0{,}022} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+0{,}022}}$$ bylo bez daně

Nejprve aritmetická řada do 1 ÚO, poté vyřešit přes 6 ÚO do 1 DO geometrickou řadou a poté vyřešit v nekonečné geometrické řadě.

$$1136742{,}97 = \underbrace{a \cdot 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}022\right) \cdot \frac{1}{1+0{,}022}}_{\text{ÚO}} \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}022)^2}}{1-\frac{1}{1+0{,}022}} - 2\right) \cdot 0{,}85 + 2\right]}_{\text{DO}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{\left((1+0{,}022)^2-1\right)\cdot 0{,}85+1}}}_{\text{věčný}}$$

$$a_{věčný,tax} = 3\,514{,}71 \text{ Kč}$$

MUNI ECON

Příklad 7– část 7/8

– Dobrovolně dopočítat „t“ při zvýšené vyplácené anuitě s daní

Příklad 8 – část 8/8

– Dobrovolně dopočítat mimořádnou anuitu při zvýšené vyplácené anuitě s daní

Poslední rok se daň odvede ke dni vyplacení poslední anuity?

Komplexní příklad – přehled řešení

Spoření	1 235 898,04	Kč
Věčný důchod	4 474,207	Kč
Zvýšený důchod	17 pololetí	2 měsíce
Mimořádná a	4 432,68	Kč
S daní		
Spoření	1 136 742,97	Kč
Věčný důchod	3 514,71	Kč
Zvýšený důchod	K dopočtení	
Mimořádná a	K dopočtení	

MUNI ECON

Příklad Socrative rozdělíme na 2 části

Kolik bude reálná a nominální hodnota anuity, kterou budete vyplácet polhůtně po dobu 20 let v pravidelných třiceti denních intervalech? Roční úroková sazba činí 8 % a banka počítá úrok měsíčně. Víte, že budete mít k dispozici částku 2391085,83 Kč. Kupní síla vyplacených, reinvestovaných a akumulovaných anuit za 25 let bude činit 5587445 Kč (stejné podmínky úročení). Uvažujte polhůtní důchod. Roční hladina inflace bude po celou dobu konstantní.

Příklad Socrative 7 – část 1/2

Kolik bude hodnota anuity, kterou budete vyplácet polhůtně po dobu 20 let v pravidelných třiceti denních intervalech? Roční úroková sazba činí 8 % a banka počítá úrok měsíčně. Víte, že budete mít k dispozici částku 2391085,83 Kč. Uvažujte polhůtní důchod.

Příklad Socrative 7 - řešení 1/2

<u>Polhůtní důchod:</u>
t = 20 let
PO = 30 dní
ÚO = 30 dní
r = 8 % p.a.
PV = D = 2 391 085,83 Kč

Začneme s výpočtem nominální anuity

$$D^1 = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$2391085{,}83 = a \cdot \frac{1}{1+\frac{0{,}08}{12}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0{,}08}{12}}\right)^{12\cdot 30}}{1-\frac{1}{1+\frac{0{,}08}{12}}}$$

$$a \doteq 20\ 000\ \text{Kč}$$

MUNI ECON

Příklad Socrative 8 – část 2/2

Kolik bude reálná hodnota anuity, kterou budete vyplácet polhůtně po dobu 20 let v pravidelných třiceti denních intervalech? Roční úroková sazba činí 8 % a banka počítá úrok měsíčně. Víte, že budete mít k dispozici částku 2391085,83 Kč. Kupní síla vyplacených, reinvestovaných a akumulovaných anuit za 25 let bude činit 5587445 Kč (stejné podmínky úročení). Uvažujte polhůtní důchod. Roční hladina inflace bude po celou dobu konstantní.

Příklad Socrative 8 - řešení 2/2

Předlhůtní spoření + 5 let úročení:
t = 20 let + 5 let úročení
PO = 30 dní
ÚO = 30 dní
r = 8 % p.a.
FVr = 5 587 445 Kč

Nyní vycházíme ze vztahu pro spoření, jelikož vyplácené anuity reinvestujeme (stejné podmínky úročení) po dobu 20 let a následně 5 let úročíme. Vypočteme pi, jelikož známe FVr.

$$5587445 = \frac{20000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{12\cdot 30}-1}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)-1} \cdot \left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{5\cdot 12}}{(1+\pi)^{12\cdot 25}}$$

$$\pi = 0{,}38225818\ \%\ \mathrm{p.m.}$$

Dosadíme do původní rovnice pro důchod, kterou jsme počítali nominální anuitu. Dosazením reálné míry dostáváme reálnou anuitu.

$$r_r = \frac{r-\pi}{1+\pi} = \frac{0{,}08/12-0{,}38225818}{1+0{,}38225818} = 0{,}28332545\ \%\ p.m.$$

$$2391085{,}83 = a_r \cdot \frac{1}{1+r_r} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r_r}\right)^{12\cdot 30}}{1-\left(\frac{1}{1+r_r}\right)}$$

$$a_r \doteq 13\,744{,}67\ \text{Kč}$$

MUNI ECON

Děkuji za aktivní účast

v případě dotazů piště ☺