# Analytická geometrie v prostoru

Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

# Parametrické vyjádření přímky

**Rovnice**

$$X = A + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R},$$

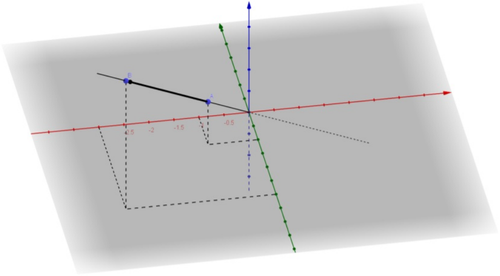
se nazývá **parametrická rovnice přímky** nebo také **parametrické vyjádření přímky** určené bodem $A$ a vektorem $\mathbf{u}$. Proměnná $t$ se nazývá **parametr**.
Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic můžeme $Oxyz$ body a vektory zapsat pomocí souřadnic:

$$X[x; y; z], A[a_1; a_2; a_3], \mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$$

# Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky $p$ v prostoru pak můžeme zapsat v souřadnicích

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + u_1 t \\
y &= a_2 + u_2 t \\
z &= a_3 + u_3 t
\end{aligned}
$$

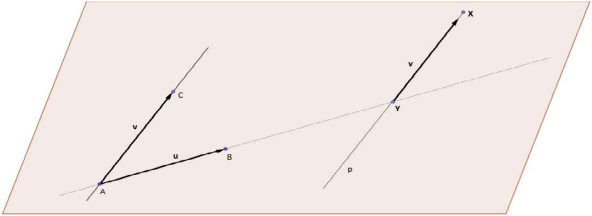


Obrázek: Přímka v prostoru.

# Přímka v prostoru

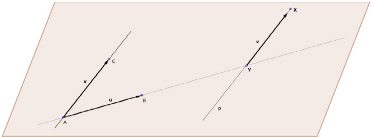
Z roviny jednoduše přeneseme do prostoru:

- téměř veškerou práci s přímkou.
- vyjádřit skutečnost, že $A \in p$.
- daným bodem vést přímku rovnoběžnou s danou přímkou.




Obrázek: Rovnoběžka vedená daným bodem.

# Zavedení roviny v prostoru




Obrázek: Rovnoběžka vedená daným bodem.

Každý bod $X$ na přímce $p$ můžeme vyjádřit jako:

$$X = Y + v \cdot ss \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{v} = C - A$$

Každý bod $Y$ na přímce $AB$ můžeme vyjádřit jako:

$$Y = A + \mathbf{u}t, t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{u} = B - A$$

Dosadíme z druhé rovnice do první a dostaneme:

$$X = A + \mathbf{u}t + \mathbf{v}s, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

# Zavedení roviny v prostoru

**Rovnice:**

$$X = A + \mathbf{u}t + \mathbf{v}s, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

se nazývá parametrická rovnice roviny nebo také parametrické vyjádření roviny $ABC$, kde $B = A + \mathbf{u}$ a $C = A + \mathbf{v}$.

# Zavedení roviny v prostoru

Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic můžeme $Oxyz$ body a vektory zapsat pomocí souřadnic:

$$X[x;y;z], A[a_1;a_2;a_3], \mathbf{u} = (u_1;u_2;u_3), \mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$$

Parametrické vyjádření roviny v prostoru pak můžeme zapsat v souřadnicích

$$x = a_1 + u_1 t + v_1 s$$
$$y = a_2 + u_2 t + v_2 s$$
$$z = a_3 + u_3 t + v_3 s$$

# Zavedení roviny v prostoru

Ve zvolené kartézské soustavě souřadnic můžeme $Oxyz$ body a vektory zapsat pomocí souřadnic:

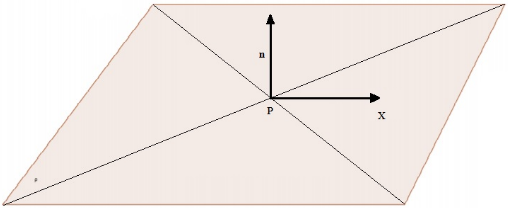
$$X[x;y;z], A[a_1;a_2;a_3], \mathbf{u} = (u_1;u_2;u_3), \mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$$

Parametrické vyjádření roviny v prostoru pak můžeme zapsat v souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t + v_1 s \\ y &= a_2 + u_2 t + v_2 s \\ z &= a_3 + u_3 t + v_3 s \end{aligned}$$

# Zavedení roviny v prostoru

Analogickým postupem stejně jako u přímky v rovině dostaneme obecnou rovnici roviny v prostoru. Rovinu určíme bodem a normálovým vektorem, který kolmý na rovinu, tj. na každý vektor v rovině.



# Obecná rovnice roviny

Bod $X$ leží v rovině právě tehdy, když vektor $P?X$ jek kolmý k vektoru $\mathbf{n}$, tj.

$$n(X - P) = 0$$

Body $X, P$ a vektor $\mathbf{n}$ v dané soustavě souřadnic můžeme určit souřadnicemi

$$X[x; y; z], P[p_1; p_2; p_3], \mathbf{n} = (a; b; c).$$

Rovnici $n(X - P) = 0$ můžeme rozepsat v souřadnicích

$$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0,$$

Jestliže závorky roznásobíme a označíme

$$d = -ap_1 - bp_2 - cp_3$$

dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0.$$

# Obecná rovnice roviny

**Rovnice:**

$$ax + by + cz + d = 0$$

se nazývá **obecná rovnice roviny**.

## Dvě přímky

Dvě přímky v prostoru mohou být:

- Totožné - Nekonečně mnoho společných bodů.
- Rovnoběžné - Žádný společný bod. Přímky leží v jedné rovině.
- Různoběžné - Jeden společný bod. Přímky opět leží v jedné rovině.
- Mimoběžné - Žádný společný bod - Přímky neleží v jedné rovině.

## Přímka a rovina

Přímka a rovina v prostoru mohou nabývat těchto polohy:

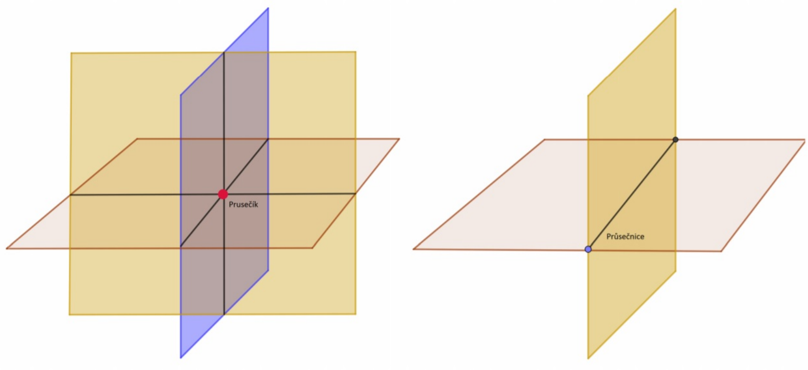
- Přímka a rovina jsou rovnoběžné - Žádný společný bod.
- Přímka a rovina nejsou rovnoběžné - Jeden společný bod.
- Přímka leží v rovině - Nekonečně mnoho společných bodů.

## Dvě roviny

Dvě roviny v prostoru mohou nabývat tyto polohy:

- Totožné - Nekonečně mnoho společných bodů.
- Rovnoběžné - Žádný společný bod.
- Různoběžné - Nekonečně mnoho společných bodů. Tyto body tvoří průsečnici rovin.

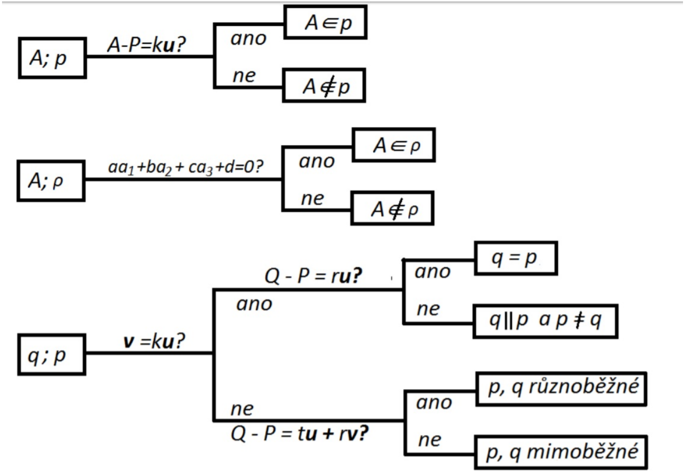
# Průsečík vs. průsečnice




Obrázek: Průsečík vs. průsečnice.

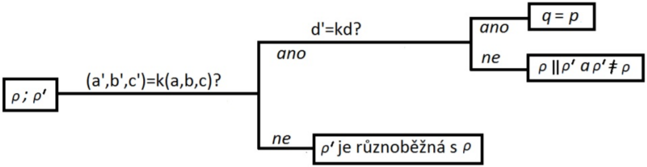
# Vyšetřování vzájemné polohy dvou objektu

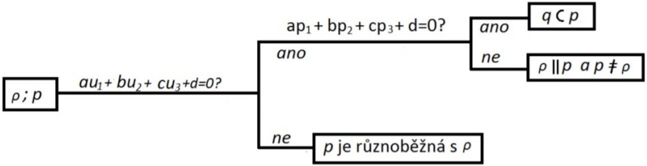
Bod $A[a_1, a_2, a_3]$; přímky $p(P, u), q(Q, v)$; roviny $ax + by + cz + d = 0, a'x + b'0 + c'z + d = 0.$



# Vyšetřování vzájemné polohy dvou objektu

Bod $A[a_1, a_2, a_3]$; přímky $p(P, u), q(Q, v)$; roviny $ax + by + cz + d = 0, a'x + b'0 + c'z + d = 0$.



DOPNIT OBRÁZEK +PŘÍKLAD

**Vzdálenost bodu od přímky**

Postup řešení:

- Určíme parametrické vyjádření přímky $p : X = P + t\mathbf{u}$.
- Z podmínky $(X?Q)\Delta u = 0$ určíme hodnotu parametru $t$ pro kterou plat $X = R$.
- Určíme vzdálenost $|QR|$.

DOPNIT OBRÁZEK + PŘÍKLAD

**Vzdálenost bodu od roviny**

Postup řešení:

- Vedeme bodem $P$ přímku $p$ kolmou na $\rho$.
- Určíme průsečík $R$ přímky $p$ a roviny $\rho$.
- Určíme vzdálenost $|PR|$.

DOPNIT OBRÁZEK

## Odchylka dvou přímek v prostoru

Na přímce p zvolíme libovolný bod $P$ a vedeme jím přímku $q'$ rovnoběžnou s přímkou $q$. Potom odchylka přímek $p$ a $q$ je rovna $p$ a $q'$, ty už leží v jedné rovině.

**Vzorec**

*Odchylka dvou přímek $p, q$ se směrnicovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je číslo $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí:*

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

**Odchylka přímky $p$ a roviny $\rho$.**

Nevýhodnější je najít průnik $P$ přímky $p$ a roviny $\rho$. Dále určíme přímku $q$, která je kolmá na $\rho$ a prochází $P$. Označíme-li $\psi$ jako odchylku přímek $p$ a $q$. Potom odchylku $\phi$ přímky $p$ a roviny $\rho$ vypočítáme jako

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

## Odchylka dvou rovin v prostoru

Dvě roviny v prostoru $\rho$ a $\phi$ protneme třetí rovinou $\tau$, která je kolmá na průsečnici dvou původních rovin. Průsečíkem všech tří rovin vedeme přímku *p* která je kolmá na $\rho$ a přímku *q*, která je kolmá na $\phi$. Tedy směrnicové vektory přímek *p* a *q* procházející bodem *A* jsou normálovými vektory rovin $\rho$ a $\phi$. Tedy odchylku dvou rovin určíme snadno pomocí odchylku normálových vektorů.