Reálná funkce reálné proměnné

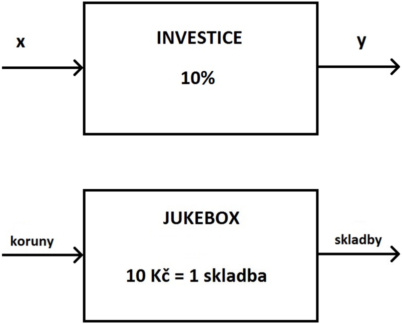
Štěpán Křehlík

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2018

Reálná funkce

Reálná funkce reálné proměnné



Zobrazení

- intuitivně
  - $x \dots$ vstup
  - $y \dots$ výstup
  - funkce mechanizmu
- formálně
  - $x \dots$ nezávislá proměnná
  - $y \dots$ závislá proměnná
  - definiční obor
  - uspořádaná dvojice (x, y)

Zobrazení

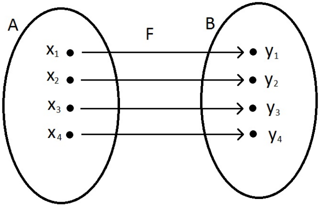
Definice

Nechť A, B *jsou neprázdné množiny. Pravidlo* F, *jimž ke každému prvku* $x \in A$ *je přiřazen* **právě jeden prvek** $y \in B$, *nazýváme* zobrazením množiny A do množiny B. *Píšeme* $F : A \to B$. *Označíme-li* x *proměnnou s oborem* A *a* y *proměnnou s oborem* B, *píšeme též*

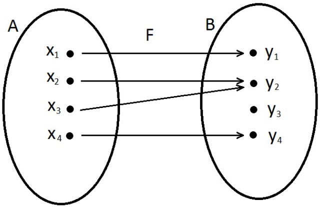
$$y = F(x).$$

- x je vzorem pro prvek y
- y je obrazem prvku x
- množina A... neodvislý obor nebo též definiční obor $D(F)$
- množina B... obor hodnot $H(F)$

Zobrazení množiny A na množinu B.



Zobrazení množiny A do množiny B.



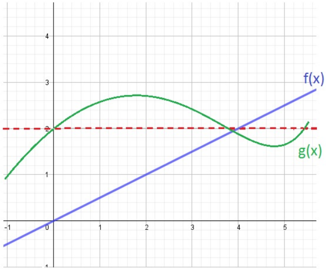
Reálná funkce reálné proměnné vs. zobrazení

Pokračování přednášky

- inverzní funkce
- graf funkce
- spojitost funkce
- další vlastnosti funkcí
- některé speciální funkce

Prostá funkce
Funkce f je prostá, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí, že

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$



Uvažujme následující tabulku:

$f(x) = 2x$	$f^{-1}(y) =?$
$f(2) = 4$	$f^{-1}(2) = 1$
$f(3) = 6$	$f^{-1}(4) = 2$
$f(4) = 8$	$f^{-1}(6) = 3$
$\vdots$	$\vdots$

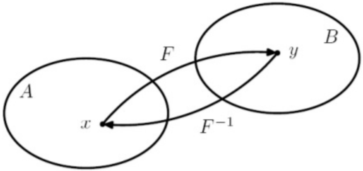
Inverzní funkce

Mějme tedy prostou funkci f s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot $H(f)$. Z definice funkce platí, že pro všechny prvky x z definičního oboru $D(f)$ máme nějaký prvek y z oboru hodnot $H(f)$, pro který platí $f(x) = y$. Inverzní funkce f^{-1} je pak funkce, pro kterou platí:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Inverzní zobrazení

Jestliže zobecníme pojem inverzní funkce dostaneme pojem inverzní zobrazení.

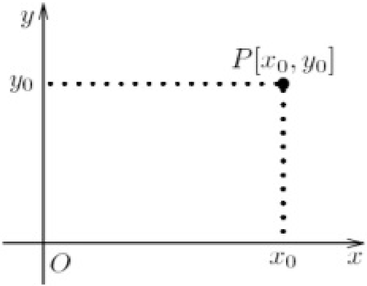


Příklad

Lidé pracující či studující na MU přiřazené univerzitní číslo osoby. Je zřejmé, že žádná osoba na MU nemá dvě UČA, zobrazení je tedy prosté. Jestliže chceme osobu v ISu vyhledat a známe UČO, můžeme dohledat jméno osoby. Jestliže chceme osobu v ISu vyhledat a známe jméno, jsme schopni dohledat jméno osoby.

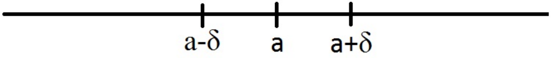
Graf funkce

- vizualizace funkce
- obrázek víc než tisíc slov
- pravoúhlý souřadný systém *Oxy*
- kartézský součin (není nutné vždy volit stejné měřítko)
- každému bodu v rovině odpovídá uspořádaná dvojice reálných čísel
- průsečíky s osami



Spojitost funkce

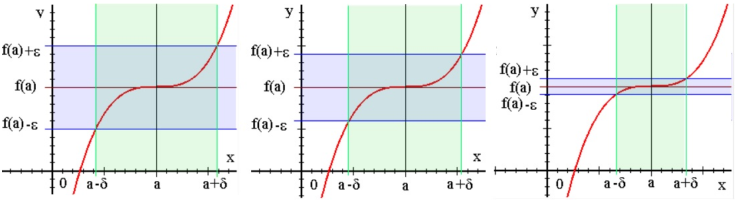
Okolí bodu (ryzí okolí bodu)



https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/limita_a_spojitost/p

Spojitost funkce

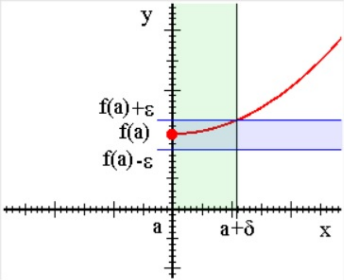
Spojitost fce intuitivně: funkce jejíž graf se dá nakreslit jedním tahem, tak aby se tužka nezvedla nad úroveň papírů.



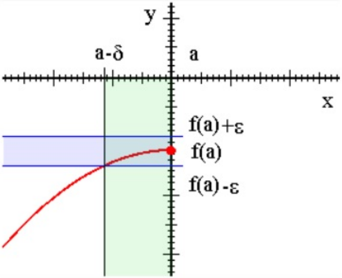
Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I. Nechť bod a je vnitřním bodem intervalu I. Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že

1. $U_\delta(a) \subset I$,
2. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad$ pro $x \in U_\delta(a)$ (ryzí okolí bodu a).

Spojitost zprava/zleva



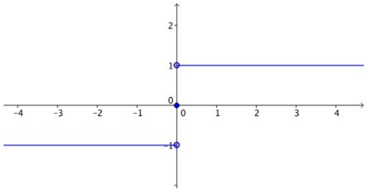
Funkce spojitá zprava



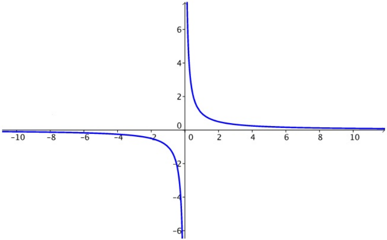
Funkce spojitá zleva

Druhy nespojitosti

Nespojitost prvního druhu



Nespojitost druhého druhu



Monotónnost

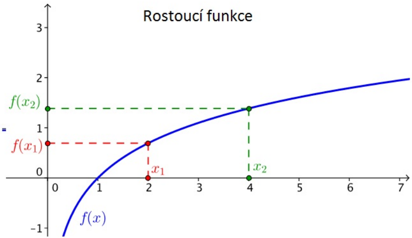
Máme funkci f a uvažujme $x_1, x_2 \in D(f)$. Potom řekneme, že:

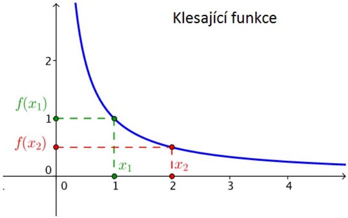
- funkce f je **rostoucí**, pokud pro všechna $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- funkce f je **klesající**, pokud pro všechna $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- funkce f je **nerostoucí**, pokud pro všechna $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- funkce f je **neklesající**, pokud pro všechna $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,

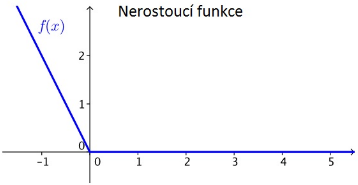
Poznámka

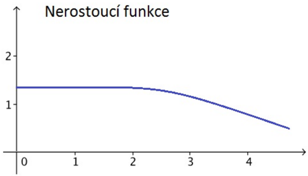
Monotónnost můžeme chápat jen na nějaké oblasti, tj. na části definičního oboru může funkce klesat a na části může ta samá funkce růst.

Monotónnost





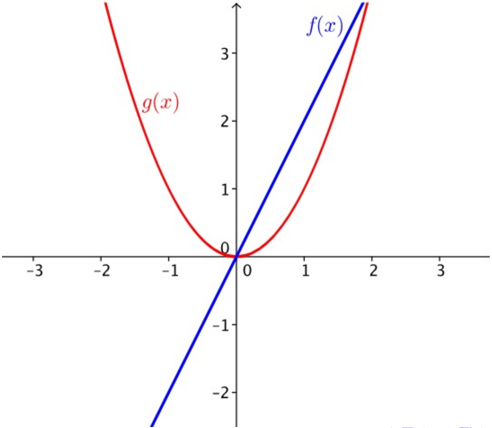




Sudost/ lichost

Řekneme, že *funkce* $y = f(x)$ je *sudá (resp. lichá)*, má-li tuto vlastnost: Je-li definovaná v bodě x, je definovaná i v bodě $(-x)$ a platí

$$f(-x) = f(x), \qquad (f(-x) = -f(x))\,.$$



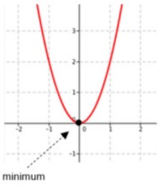
Maximum/ minimum funkce

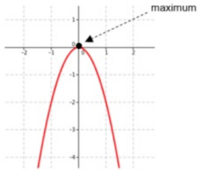
Funkce f má **maximum** na množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí:

- $f(a) \geq f(x)$.

Funkce f má **minimum** na množině M pro $a \in M$ právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí:

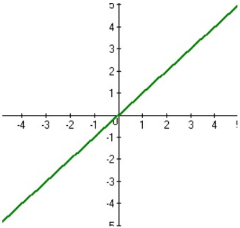
- $f(a) \leq f(x)$.



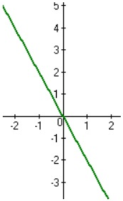


Základní typy funkcí (první část)

- lineární funkce - obecný předpis $y = a \cdot x + b$
    - konkrétně $y = x$ (resp. $y = -2x$)
    - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$
    - spojitá, **je** prostá, rostoucí pro $a \in \mathbb{R}^+$



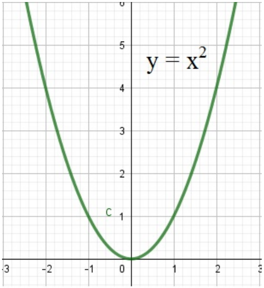
graf funkce $y = x$

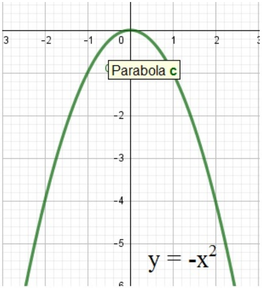


Graf klesající funkce y = -2x

Základní typy funkcí (první část)

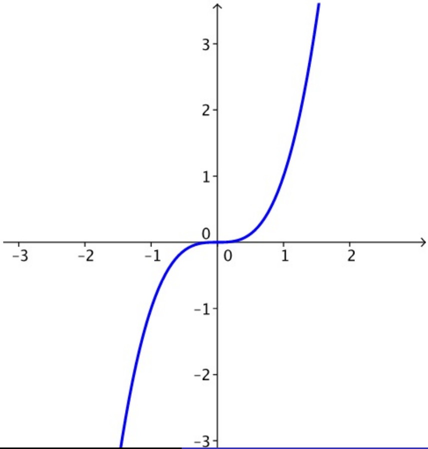
- kvadratická funkce - obecný předpis $y = ax^2 + bx + c$
  - uvažujme konkrétněji funkci $y = x^2$
  - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}_0^+$
  - spojitá, **není** prostá, pro $a \in \mathbb{R}^+$ klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $(0, \infty)$





Základní typy funkcí (první část)

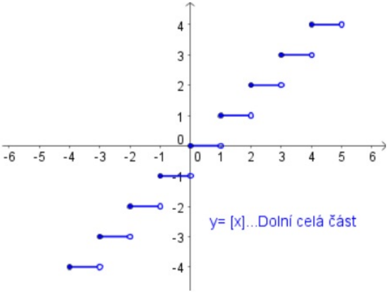
- kubická funkce - obecný předpis $y = ax^3 + bx^2 + xc + d$
  - uvažujme konkrétněji funkci $y = x^3$
  - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$
  - spojitá, **je** prostá, pro $a \in \mathbb{R}^+$ rostoucí, lichá

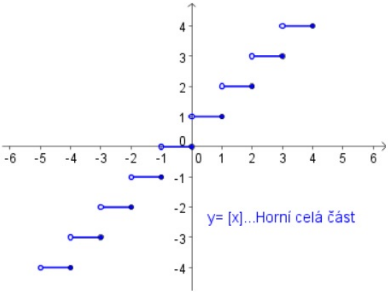


Reálná funkce

Základní typy funkcí (první část)

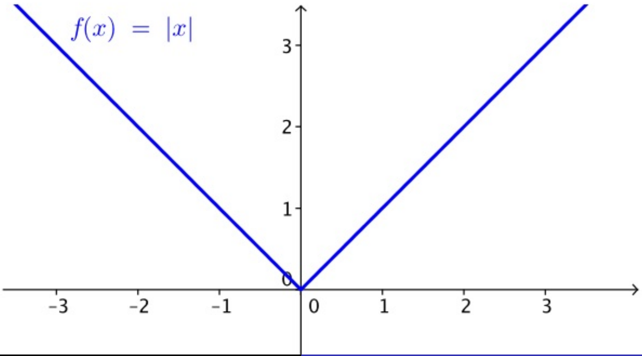
- Dolní (horní) celá část reálného čísla
  - předpis $y = \lfloor x \rfloor$
  - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$
  - spojitá zprava (spojitá zleva), **není** prostá, neklesající, lichá





Základní typy funkcí (první část)

- Funkce absolutní hodnoty
  - předpis $y = |x|$
  - $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}_0^+$
  - spojitá, **není** prostá, neklesající, klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $(0, \infty)$,sudá



Rovnost funkcí

O dvou funkcích říkáme, že jsou si rovny (psáno $f = g$), právě když mají týž definiční obor $D(f) = D(g)$ a v každém bodě x tohoto definičního oboru je

$$f(x) = g(x).$$