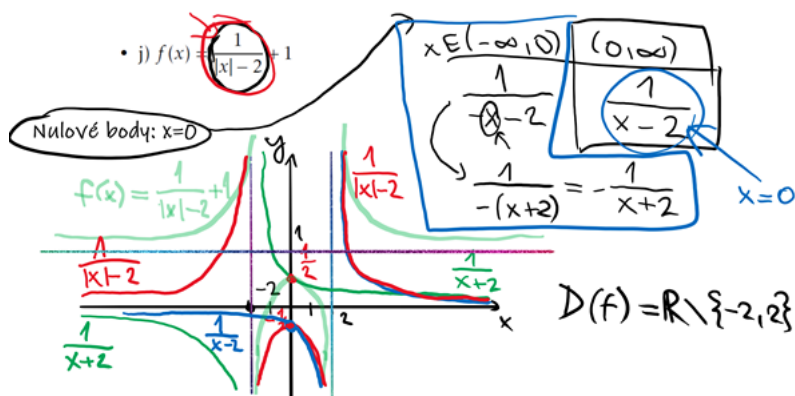


Dokončení cvičení 3



Inverzní funkce

Příklad 3: Určete inverzní funkci

- a) $y = 2x + 3$

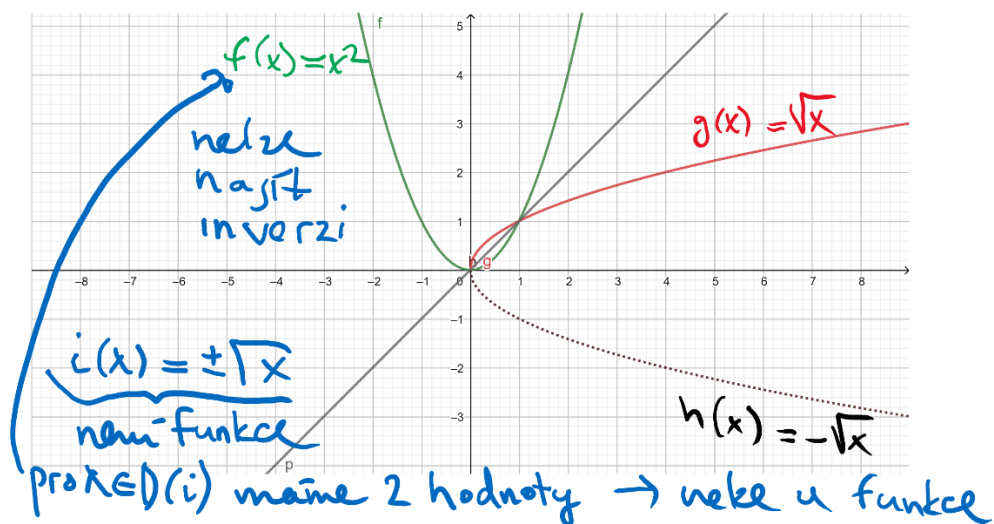
Řešení:

$x = 2y + 3$... záměna x za y a naopak

$x - 3 = 2y$... snažím se osamostatnit y

$$y = \frac{x-3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Příklad funkce $f(x) = x^2$, pro níž nelze nalézt inverzní funkci:



Inverzní funkci nelze nalézt pro funkce, které nejsou prosté.

Funkce f je prostá, když pro každé dva prvky $a, b \in D(f)$ platí, že $f(a) \neq f(b)$.

- e) $y = \frac{2}{x-5} + 1$

$$x = \frac{2}{y-5} + 1$$

...

$$y = \frac{2}{x-1} + 5$$

- g) $y = 2 \cdot \log(3-x) + 2$

Řešení:

$$x = 2 \cdot \log(3-y) + 2$$

$$x-2 = 2 \cdot \log(3-y)$$

$$\frac{x-2}{2} = \log(3-y) \dots \text{obě dvě strany rovnice vložím jako exponenty exponenciální funkce } y = 10^x$$

$10^{\frac{x-2}{2}} = 10^{\log(3-y)}$... Funkce $y = 10^x$ a $y = \log x$ jsou vzájemně inverzní, tudíž jejich vzájemnou aplikací dostaneme pouze $(3-y)$ na pravé straně rovnice

$$10^{\frac{x-2}{2}} = 3-y$$

$$y = 3 - 10^{\frac{x-2}{2}}$$

- j) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^{3x-2} + 2$

Řešení:

$$x = \frac{1}{3} \cdot 2^{3y-2} + 2$$

$$x-2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{3y-2}$$

$3x-6 = 2^{3y-2}$... je potřeba zlogaritmovat obě strany rovnice logaritmem o základu 2

$$\log_2(3x-6) = \log_2 2^{3y-2}$$

$$\log_2(3x-6) = 3y-2$$

$$3y = 2 + \log_2(3x-6)$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_2(3x-6)$$

Cvičení 4

Rovnice (příklad 1)

- d) $3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 5x - 5$

Řešení:

$$x^2 + x + 8 = 0$$

$$d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -31$$

Rovnice nebude mít žádné řešení v reálných číslech, protože je diskriminant záporný.

Pro $d \geq 0$ platí vzorec pro výpočet tzv. kořenů kvadratického polynomu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Řešením jsou čísla x_1, x_2 .

$$\bullet \text{ e) } 3^x + 3^{x+1} - 5^{x-1} = 5^x - 3^{x+3} + 5^{x+2}$$

Řešení:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+3} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x+2}$$

$$3^x + 3 \cdot 3^x + 3^3 3^x = 5^x + 5^x \cdot 5^{-1} + 5^2 5^x$$

$$3^x(1 + 3 + 27) = 5^x \left(1 + \frac{1}{5} + 25\right)$$

$$3^x \cdot 31 = 5^x \left(\frac{130}{5} + \frac{1}{5}\right)$$

$$3^x \cdot 31 = 5^x \cdot \frac{131}{5}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{131}{155} \dots \text{zlogaritmuje rovnici logaritmem o základu } \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\log_{0,6} \left(\frac{3}{5}\right)^x = \log_{0,6} \frac{131}{155}$$

$$x = \log_{0,6} \frac{131}{155}$$

$$\bullet \text{ f) } 5^{1-x} = 7^{x-1}$$

Řešení:

$$\frac{5}{5^x} = \frac{7^x}{7} \dots \text{vynásobíme rovnici oběma jmenovateli } 7 \cdot 5^x$$

$$5 \cdot 7 = 7^x \cdot 5^x$$

$$35 = (7 \cdot 5)^x$$

$$35^1 = 35^x \dots \text{zlogaritmuje obě strany rovnice logaritmem o základu 35}$$

$$1 = x$$

Zkouška:

$$L = 5^{1-x} = 5^{1-1} = 5^0 = 1$$

$$P = 7^{x-1} = 7^{1-1} = 7^0 = 1$$

$$L=P$$