

Cvičení 4

Rovnice (příklad 1)

- h) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+5} = 0$

$\sqrt{x-3} = \sqrt{x+5}$ / umocníme obě strany rovnice na druhou

$$x - 3 = x + 5$$

$$0 = 8$$

Rovnice nemá řešení.

- j) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+3}$

Levá strana je výraz $a + b$, takže umocněním na druhou se té odmocniny nezbavíme zcela:

Použijeme vzorec: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Roli a bude hrát $\sqrt{x+2}$, roli b bude hrát $\sqrt{x-1}$:

$$x + 2 + 2 \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1} + x - 1 = 3x + 3$$

$$2 \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1} = 3x + 3 - (x + 2) - (x - 1)$$

$$2 \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1} = x + 2 \text{ / znovu obě strany umocníme na druhou}$$

$$4 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) = (x + 2)^2$$

$$4 \cdot (x^2 + 2x - x - 2) = x^2 + 4x + 4$$

$$4x^2 + 8x - 4x - 8 = x^2 + 4x + 4$$

$$3x^2 - 12 = 0 \text{ / podělíme rovnici trojkou}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Použijeme vzorec $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

Zkouška pro obě řešení: dosadit do původní rovnice

Pro $x_1 = 2$ zkouška vyšla, takže je řešením. Pro $x_2 = -2$ zkouška nevyšla, takže není řešením rovnice.

$$\underline{K = \{2\}}$$

- 1) $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 2^3 = 0$$

Substituce $y = 2^x$

Protože výraz $2^{2x} = (2^x)^2$, můžeme původní rovnici zapsat takto:

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$y_1 = 4$$

$$y_2 = -2$$

Vrátíme se zpátky k substituci $y = 2^x$

1. $4 = 2^x$, z čehož vyplývá, že $x_1 = 2$
2. $-2 = 2^x$, protože funkce $y = 2^x$ nemůže nabývat záporného výsledku, tak tato rovnice nemá řešení.

Zkouška: $4^2 - 2^{2+1} - 8 = 0$, z čehož $16 - 8 - 8 = 0$.

$K = \{2\}$

- m) $\log_2(2 + \log_3(x - 1)) = 2$

$$\log_2(2 + \log_3(x - 1)) = \log_2 4$$

Na pravé straně jsme číslo 2 vyjádřili podle vzorce

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

$$2 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$$

Odlogaritmuje obě dvě strany rovnice:

$$2 + \log_3(x - 1) = 4$$

$$\log_3(x - 1) = 2$$

$$\log_3(x - 1) = \log_3 9$$

Odlogaritmuje obě strany rovnice:

$$x - 1 = 9$$

$$x = 10$$

Zkouška: $\log_2(2 + \log_3(10 - 1)) = \log_2(2 + \log_3 9) = \log_2(2 + 2) = \log_2 4 = 2$

$K = \{10\}$

- n) $|x - 1| + |2x - 3| - |x + 2| = 3$

Nulové body, tj. Body, v nichž jsou absolutní hodnoty nulové: $1, \frac{3}{2}, -2$

	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 1 \rangle$	$\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$	$\langle \frac{3}{2}, \infty \rangle$
$x - 1$	–	–	+	+
$2x - 3$	–	–	–	+
$x + 2$	–	+	+	+

1. $I_1 = (-\infty, -2)$

$$-(x - 1) - (2x - 3) - [-(x + 2)] = 3$$

$$-x + 1 - 2x + 3 + x + 2 = 3$$

$$-2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2} \notin I_1, \text{ takže to není řešení nerovnice}$$

2. $I_2 = \langle -2, 1 \rangle$

$$-(x - 1) - (2x - 3) - [(x + 2)] = 3$$

$$-x + 1 - 2x + 3 - x - 2 = 3$$

$$-4x = 1$$

$$x = -\frac{1}{4} \in I_2, \text{ z čehož vyplývá, že } -\frac{1}{4} \text{ je řešením rovnice.}$$

3. $I_3 = \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$

$$(x - 1) - (2x - 3) - [(x + 2)] = 3$$

$$x - 1 - 2x + 3 - x - 2 = 3$$

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2} \notin I_3, \text{ takže není řešením rovnice.}$$

4. $I_4 = \langle \frac{3}{2}, \infty \rangle$

$$(x - 1) + (2x - 3) - [(x + 2)] = 3$$

$$x - 1 + 2x - 3 - x - 2 = 3$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2} \in I_4, \text{ tím pádem je řešením rovnice}$$

$$K = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{9}{2} \right\}$$

Nerovnice (příklad 2)

• b) $\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2x+2} \leq 1$

$$\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2x+2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{(5-x) \cdot (2x+2) + (1+4x) \cdot (x-1) - 1 \cdot (x-1) \cdot (2x+2)}{(x-1) \cdot (2x+2)} \leq 0$$

$$\frac{10x - 2x - 2x^2 + 10 + x + 4x^2 - 1 - 4x - 2x^2 + 2x - 2x + 2}{(x-1) \cdot (2x+2)} \leq 0$$

$$\frac{5x + 11}{(x-1) \cdot (2x+2)} \leq 0$$

Body, v nichž se může měnit znaménko zlomku: $-\frac{11}{5}, 1, -1$

Tyto body rozdělí číselnou osu na 4 intervaly:

1. $I_1 = \left(-\infty, -\frac{11}{5}\right)$, vybereme jeden bod z tohoto intervalu a zjistíme znaménko zlomku: např.
Pro $x = -3 \in I_1$ dostáváme tato znaménka ve zlomku: $\frac{-}{(-) \cdot (-)} = \frac{-}{+} = - \leq 0$, takže interval I_1 bude součástí řešení celý.
2. $I_2 = \left(-\frac{11}{5}, -1\right)$, vybereme jeden bod z tohoto intervalu a zjistíme znaménko zlomku: např.
 $x = -2 \in I_2$, dostáváme tato znaménka ve zlomku: $\frac{+}{(-) \cdot (-)} = \frac{+}{+} = +$ není ≤ 0 , a tudíž I_2 nepatří do řešení.
3. $I_3 = (-1, 1)$, vybereme jeden bod z tohoto intervalu a zjistíme znaménko zlomku: např.
 $x = 0 \in I_3$, dostáváme tato znaménka ve zlomku: $\frac{+}{(-) \cdot (+)} = \frac{+}{-} = - \leq 0$, a tudíž I_3 patří do řešení.
4. $I_4 = (1, \infty)$, vybereme jeden bod z tohoto intervalu a zjistíme znaménko zlomku: např.
 $x = 2 \in I_4$, dostáváme tato znaménka ve zlomku: $\frac{+}{(+) \cdot (+)} = \frac{+}{+} = +$ není ≤ 0 , a tudíž I_4 nepatří do řešení.

$$K = I_1 \cup I_3 = \left(-\infty, -\frac{11}{5}\right) \cup (-1, 1)$$

• e) $|x+2| < |x^2+3x+2|$

$$|x+2| < |(x+1) \cdot (x+2)|$$

Nulové body: $-1, -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, \infty)$
$x+2$	-	+	+
$x+1$	-	-	+

1. $I_1 = (-\infty, -2)$:

$$-(x+2) < -(x+1) \cdot [-(x+2)]$$

$$-x-2 < (x+1) \cdot (x+2)$$

$$-x-2 < x^2 + 3x + 2$$

$$0 < x^2 + 4x + 4$$

$0 < (x+2)^2$... kromě $x = -2$ vždy pravdivé, takže I_1 patří do řešení.

2. $I_2 = (-2, -1)$:

$$(x+2) < -(x+1) \cdot (x+2)$$

$$x+2 < -x^2 - 3x - 2$$

$$x^2 + 4x + 4 < 0$$

$(x+2)^2 < 0$... nikdy nemůže platit, tudíž interval I_2 není v řešení.

3. $I_3 = (-1, \infty)$: dle znamének můžeme obě absolutní hodnoty odstranit:

$$(x+2) < x^2 + 3x + 2$$

$$0 < x^2 + 2x$$

$0 < x \cdot (x+2)$... nulové body: 0, -2, z nichž jsou tři intervaly:

1. $(-\infty, -2)$: tento interval není podmnožinou I_3 , takže nás nezajímá.
2. $(-2, 0)$: vybereme $x = -1$ a dosadíme: $0 < (-) \cdot (+) = -$, a tím pádem pro interval nerovnice neplatí
3. $(0, \infty)$: vybereme $x = 1$ a dosadíme: $0 < (+) \cdot (+) = +$, a tím pádem pro interval nerovnice platí

$$(0, \infty) \cap I_3 = (0, \infty)$$

$$K = I_1 \cup I_3 = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$$