

Cvičení 5

Příklad 3: Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\bullet \text{ a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

Přepis do rovnic:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = -6$$

$$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = -1$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

pivot $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1 \\ +r_1 \\ +3r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 & 4 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 & 4 \end{array} \right) \sim$$

mulovat

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 11 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+2r_2 \\ +14r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -15 & 12 & -28 \end{array} \right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -15 & 4 & -36 \end{array} \right) \sim$$

mulovat

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{-7r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array} \right)$$

zpětný chod:

$$2x_4 = 12 \Rightarrow x_4 = 6$$

$$-x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = 4$$

$$-x_2 - 4x_3 + x_4 = -8$$

$$-x_2 - 4 \cdot 4 + 6 = -8$$

$$-x_2 = 10 - 8 = 2 \quad / \cdot (-1)$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 - 6 = 1$$

$$x_1 = 1 + 2$$

$$x_1 = 3$$

$$K = \{(3, -2, 4, 6)\}$$

$$\bullet f) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 5 & -14 \end{array} \right) =$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 5 & -14 \end{array} \xrightarrow{-2r_1 \sim +2r_1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 5 & 5 & -10 \end{array} \xrightarrow{-2r_2} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

zpětný chod: $x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4$
 $x_2 + 3x_3 + 2 \cdot (-2) = -4$
 $x_2 + 3x_3 = 0$ volba parametru
 $x_3 = t$
 $x_2 = -3t$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 2 \cdot (-3t) - t = 2$$

$$x_1 = 2 + 7t$$

$$x_1 = 2 + 7t$$

Nekonečně mnoho
 řešení závislých
 na parametru $t \in \mathbb{R}$

$$K = \{(2+7t, -3t, t, -2), t \in \mathbb{R}\}$$

Gaussova eliminační metoda – jak to může dopadnout:

Po převodu matice na schodovitý tvar:

1. bude stejný počet nenulových řádků jako je počet proměnných: 1 řešení
2. počet nenulových řádků n bude menší než počet proměnných k : nekonečně mnoho řešení závislých na $k - n$ parametrech.
3. jeden z řádků bude mít nalevo od svislé čáry samé nuly, ale napravo od svislé čáry nenulové číslo: systém nemá řešení

Cramerovo pravidlo

$$\bullet c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array} \right) =$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 9 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -31$$

Použijeme Cramerovo pravidlo, které lze použít pro systémy, kde počet řádků je stejný jako počet proměnných.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -62$$

$$|A| \neq 0$$

další podmínka pro Cramerovo pr.

$$-31 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-31}{-31} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-62}{-31} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-31}{-31} = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -31$$

$$21 - 36 + 1 - (-6 + 14 + 9) = -14 - 17 = -31$$

$$K = \{(1, 2, 1)\}$$

Cvičení 6

Příklad 1: Určete vzdálenost bodů/velikost vektoru:

- a) $A = [1, 2], B = [3, 4]$

$$v(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} \doteq 2,82$$

Používáme euklidovskou metriku a vzorec pro vzdálenost dvou bodů $A[x_1, y_1], B[x_2, y_2]$

$$v(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- g) $\vec{u} = (4, 2)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \doteq 2 \cdot 2,24 \doteq 4,48$$

Příklad 2: Zapište obecnou rovnici přímky určenou:

- b) Body $A = [3, 1]$, $B = [-2, -5]$

$$\vec{AB} = B - A = (-2 - 3, -5 - 1) = (-5, -6) \dots \text{směrový vektor}$$

Parametrické rovnice přímky:

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 - 5 \cdot t \\ y &= 1 - 6 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \text{ Je jedno, který z bodů přímky vybereme}$$

Převod na obecnou rovnici $\rightarrow$ směrový $\rightarrow$ normálový
skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$$(-5, -6) \cdot (n_1, n_2) = 0$$

$$-5 \cdot n_1 + (-6) \cdot n_2 = 0$$

$$\vec{n} = (6, -5) \dots \text{normálový vektor}$$

obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 0$

$(a, b) \dots$ normálový vektor

$$6x - 5y + c = 0$$

Dosadíme buď bod A, nebo B:

$$6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + c = 0$$

$$c = -13$$

$$6x - 5y - 13 = 0 \dots \text{obě rovnice přímky dané body } A[3, 1], B[-2, -5]$$