

# PRÁCE OPRAVOVANÁ TUTOREM

## Matematika 2, kombinované studium, 2020

JMÉNO (hůlkovým písmem): .....  
UČO: .....  
Datum odevzdání: .....  
Podpis: .....

POT musí být vypracován RUCNĚ (prosím o slušnou úpravu, nečitelné řešení nebude hodnoceno). U úloh se hodnotí nejen výsledné řešení, ale též POSTUP! Pro ověření správnosti výsledků lze použít výpočetní program Wolfram Alpha. Práci je nutné odevzdat v papírové podobě na posledním tutoriálu nebo vložit naskenovanou jako **1 soubor formátu pdf** do odevzdávací skřínky nejpozději do 31.12.2020.

### Zadání úloh

**Příklad 1:** Pro následující matice najděte vlastní čísla a také vektory, které odpovídají reálným vlastním číslům.

a)  $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

**Příklad 2:** Pomocí Sylvestrova kritéria rozhodněte o definitnosti kvadratické formy:

a)  $24x^2 + 3y^2 - 2yz + 2z^2 - 12xy + 4xz$     b)  $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6yz + 3z^2$   
c)  $-x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_2^2 + 6x_3^2$     d)  $-x^2 + 2xy - 5y^2 - 4yz - z^2$

**Příklad 3:** Najděte lineární aproximaci (Taylorův polynom prvního řádu) v bodě  $[1, 1]$  pro funkce

a)  $f(x, y) = e^{-xy}$   
b)  $f(x, y) = 2e^{x^2-y^2}$   
c)  $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$   
d)  $f(x, y) = 1 + \ln(2x - y)$

**Příklad 4:** Načrtněte uvedené množiny a rozhodněte, zda jsou konvexní:

- a)  $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 16\}$
- b)  $\{(x, y) : xy \leq 1\}$
- c)  $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1\}$
- d)  $\{(x, y) : x + y \leq 2\}$

**Příklad 5:** Rozhodněte o konvexitě/konkávnosti uvedených funkcí na množině  $M = \{(x, y), x > 0, \text{ a } y > 0\}$ . Zdůvodněte!

- a)  $z = x + y^2 - e^x$
- b)  $z = e^{x+y} - \frac{y}{2}$
- c)  $z = \ln(x + 2y)^2$
- d)  $z = e^{2x \cdot y}$

**Příklad 6:** Použitím grafické metody řešte problémy lineárního programování a určete, která omezení jsou v bodě optima aktivní (mají nenulovou stínovou cenu). Zapište též duální problém.

- a)  $\max 3x_1 + 4x_2$  s podmínkami  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 4 \end{cases}$   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- b)  $\max 2x + 7y$  s podmínkami  $\begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ 3x + 7y \leq 21 \end{cases}$   $x \geq 0, y \geq 0$
- c)  $\max x + y$  s podmínkami  $\begin{cases} -x + 2y \geq 6 \\ x + 2y \geq 10 \\ 3x + y \leq 15 \end{cases}$
- d)  $\min y - x$  s podmínkami  $\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ -2x + y \leq -1 \end{cases}$   $x \geq 0, y \geq 2$

**Příklad 7:** Pro každou z úloh formulujte matematický model a výsledný problém lineárního programování řešte graficky.

- a) Zákazník se rozhoduje o nákupu ovoce, přitom má na výběr pomeranče a jablka. Cena pomerančů je 40 Kč za kg a cena jablek je 25 Kč za kg. Je známo, že 1 kg pomerančů obsahuje 4 mg vitamínu C a 1 kg jablek obsahuje 5 mg vitamínu C. Maximalizujte celkový obsah vitamínu C v zakoupeném ovoci, máte-li k dispozici rozpočet 200 Kč a tašku o nosnosti 20 kg.
- b) Kandidát na starostu v okresním městě plánuje poslední etapu předvolební kampaně, na kterou si vyhradil rozpočet 40 000Kč. Agentura mu nabízí zajistit vyvěšení reklamních banerů po 500Kč s odhadovým dosahem 3000 lidí za baner. Dále je možné objednat odvysílání předvolebních spotů v kabelové televizi s cenou 800 Kč a dosahem 7000 lidí za jedno odvysílání. Kandidát rozhodl, že by chtěl objednat alespoň 16 reklam každého druhu, s podmínkou, že zveřejněných banerů nebude více než odvysílaných spotů. Pomožte navrhnout kampaň v rámci stanoveného rozpočtu, tak aby oslovila co nejvíce lidí a přitom splňovala všechny stanovené podmínky.
- c) V keramické dílně vyrábějí designové misky a hrnky. K výrobě je potřeba pouze speciální keramická hlína a kvalifikovaná pracovní síla. Tabulka uvádí náročnost jednotlivých produktů na výrobní zdroje společně s jejich prodejní cenou.

Výrobek	Práce (hodin/ks)	Hlína (kg/ks)	Příjem (Kč/ks)
Miska	1	0,4	40
Hrnek	2	0,3	50

Dílna má na týden k dispozici 1 pracovníka s 40-hodinovým pracovním týdnem a 12 kg hlíny, odbyt je zajištěn prostřednictvím partnerské firmy. Rozvrhněte výrobu mezi jednotlivé výrobky tak, aby byl maximalizován zisk.

- d) Specializovaný zemědělský obchod prodává směsi hnojiv s obchodními názvy Gro-Plus a Crop-Fast. Směsi mají různý obsah účinných látek, viz tabulka:

Značka	Dusík (kg/balení)	Fosfor (kg/balení)
Gro-Plus	2	4
Crop-Fast	4	3

Zemědělské družstvo potřebuje pro svá pole minimálně 16 kg dusíku a 24 kg fosforu. Jedno balení Gro-Plus stojí 60 Kč, zatímco balení Crop-Fast je jen za 30 Kč. Navrhněte družstvu, nejlevnější kombinaci hnojiv, tak aby byly splněny požadavky na obsah účinných látek.

**Příklad 8:** Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém a pomocí zjištěné hodnoty multiplikátoru **odhadněte**, o kolik se zvýší optimum při změně omezení o 0, 1.

a)  $\max 2\ln(x) + \ln(y)$  za podmínky  $x + y = 1$ .

b)  $\min 2x + 3y - 4$  za podmínky  $x \cdot y = 6$ .

c)  $\min e^{x/2} + e^y$  za podmínky  $x + 2y = 4$ .

d)  $\min x + 4y^2$  za podmínky  $x \cdot y = 1$ .

**Příklad 9:** Pro daný optimalizační problém sestavte Lagrangeovu funkci a vyjádřete Kuhn-Tuckerovy podmínky pro optimální řešení.

a)  $\max 2 - x^2 - y^2$  s podmínkami  $x \geq 1$  a  $y \geq 2$

b)  $\min x^2 + x + y^2$  za podmínky  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

c)  $\min (x + 1)^2 + \frac{1}{4}y^2$  za podmínky  $2x + y \geq 4$ .

d)  $\min (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2$  za podmínky  $x - y \geq 0$ .

**Příklad 10:** Spotřebitel má užitkovou funkci  $F(x, y)$ , kde  $x$  je množství výrobku A a  $y$  množství výrobku B. Vyjádřete pro něj mezní míru substituce mezi A a B (tj.  $-y'(x)$ ) a elasticitu (tj.  $\frac{-y'(x)}{y/x}$ ) a vyčíslete je pro  $x = 1, y = 1$ .

a)  $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{4y}$

b)  $F(x, y) = 2 - e^x - e^y$

c)  $F(x, y) = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{y + 1}$

d)  $F(x, y) = \ln(1 + 2x) + \ln(y + 1)$