Derivace

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Značení

První derivace funkce $f(x)$

- $f'(x)$
- $\dot{f}(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$

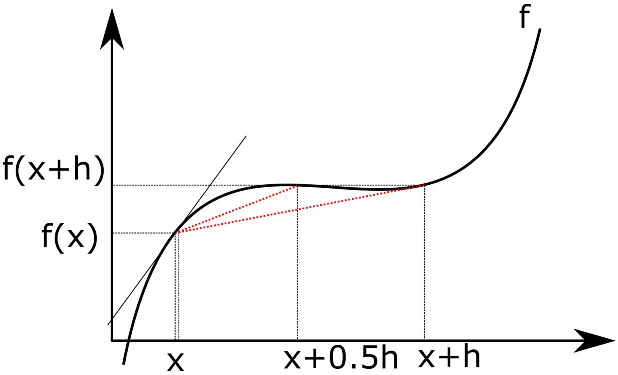
Derivace vyšších řádů

- $f''(x)$, $f^{IV}(x)$
- $\dddot{f}(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5}(x)$
- $f^{(10)}(x)$

Neplést s $a \in \mathbb{R}$, např $a = 3$

- $f'(a)$
- $\dot{f}(a)$
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

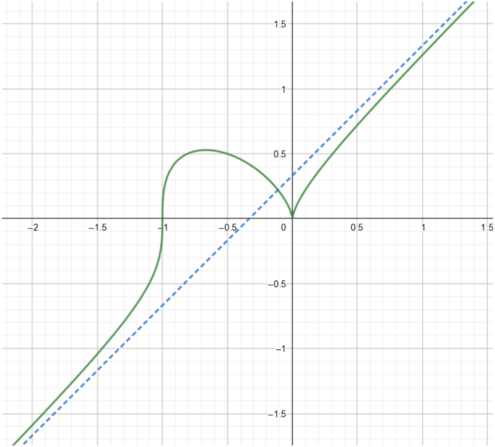
Definice derivace



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{pokud limita existuje} = f'(x),$$

Kdy derivace není definovaná

- Ve „hrotech“ funkce



Význam první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.
- Zkráceně monotonost funkce:
  - $f'(a) > 0$, funkce je v bodě a rostoucí
  - $f'(a) < 0$, funkce je v bodě a klesající
  - $f'(a) = 0$, bod a je stacionárním bodem funkce
- $f'(a)$ je směrnicí tečny funkce v bodě a

Směrnicový zápis přímky

$$y = kx + q$$

Zápis tečny k funkci f

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Derivační vzorce

$$(C)' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{cotg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Derivační pravidla

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Řešené příklady - součet a součin

Součet

$$(\sin(x) + 5x^6)' =$$

Součin

$$(\log_3(x) \cdot \sin(x))' =$$

Řešené příklady - součet a součin

Součet

$$\left(\sin(x) + 5x^6\right)' = (\sin(x))' + \left(5x^6\right)' =$$

Součin

$$(\log_3(x) \cdot \sin(x))' =$$

Řešené příklady - součet a součin

Součet

$$\left(\sin(x) + 5x^6\right)' = (\sin(x))' + \left(5x^6\right)' = \cos(x) + 5 \cdot 6x^5$$

Součin

$$(\log_3(x) \cdot \sin(x))' =$$

Řešené příklady - součet a součin

Součet

$$\left(\sin(x) + 5x^6\right)' = (\sin(x))' + \left(5x^6\right)' = \cos(x) + 5 \cdot 6x^5$$

Součin

$$(\log_3(x) \cdot \sin(x))' = (\log_3(x))' \cdot \sin(x) + \log_3(x) \cdot (\sin(x))' =$$

Řešené příklady - součet a součin

Součet

$$\left(\sin(x) + 5x^6\right)' = (\sin(x))' + \left(5x^6\right)' = \cos(x) + 5 \cdot 6x^5$$

Součin

$$\begin{aligned}(\log_3(x) \cdot \sin(x))' =& (\log_3(x))' \cdot \sin(x) + \log_3(x) \cdot (\sin(x))' = \\ =& \frac{1}{x \cdot \ln(3)} \sin(x) + \log_3(x) \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Neřešené příklady - součet a součin

- Př. 1: $\left(3 \cdot e^x + 5x^3 - 2x \cdot \ln(x)\right)' =$

- Př. 2: $\left(\sin(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2)\right)' =$

- Př. 3: $\left(\sin(x) \cdot x \cdot e^x - 3x^2 \cdot \ln(x)\right)' =$

Neřešené příklady - součet a součin

- Př. 1: $\left(3 \cdot e^x + 5x^3 - 2x \cdot \ln(x)\right)' =$

$$3e^x + 15x^2 - 2\ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x}$$

- Př. 2: $\left(\sin(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2)\right)' =$

- Př. 3: $\left(\sin(x) \cdot x \cdot e^x - 3x^2 \cdot \ln(x)\right)' =$

Neřešené příklady - součet a součin

- Př. 1: $\left(3 \cdot e^x + 5x^3 - 2x \cdot \ln(x)\right)' =$

$$3e^x + 15x^2 - 2\ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x}$$

- Př. 2: $\left(\sin(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2)\right)' =$

$$\cos(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2) + \sin(x) \cdot (-2x^{-3} + 3)$$

- Př. 3: $\left(\sin(x) \cdot x \cdot e^x - 3x^2 \cdot \ln(x)\right)' =$

Neřešené příklady - součet a součin

- Př. 1: $\left(3 \cdot e^x + 5x^3 - 2x \cdot \ln(x)\right)' =$

$$3e^x + 15x^2 - 2\ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x}$$

- Př. 2: $\left(\sin(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2)\right)' =$

$$\cos(x) \cdot (x^{-2} + 3x + 2) + \sin(x) \cdot (-2x^{-3} + 3)$$

- Př. 3: $\left(\sin(x) \cdot x \cdot e^x - 3x^2 \cdot \ln(x)\right)' =$

$$\cos(x) \cdot x \cdot e^x + \sin(x) \cdot (e^x + x \cdot e^x) - 6x \cdot \ln(x) - 3x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

Řešené příklady - podíl

Podíl

$$\frac{2x^3 - 2}{x^4 + 2x + 3} =$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}(3x^2 + 2)\right)' =$$

Řešené příklady - podíl

Podíl

$$\frac{2x^3-2}{x^4+2x+3} = \frac{(2x^3-2)' \cdot (x^4+2x+3) - (2x^3-2) \cdot (x^4+2x+3)'}{(x^4+2x+3)^2}$$

Složená funkce

$$\left(\mathrm{arctg}(3x^2+2)\right)' =$$

Řešené příklady - podíl

Podíl

$$\frac{2x^3-2}{x^4+2x+3} = \frac{(2x^3-2)'\cdot(x^4+2x+3)-(2x^3-2)\cdot(x^4+2x+3)'}{(x^4+2x+3)^2}$$
$$= \frac{(6x^2)\cdot(x^4+2x+3)-(2x^3-2)\cdot(4x^3+2)}{(x^4+2x+3)^2}$$

Složená funkce

$$\left(\mathrm{arctg}(3x^2+2)\right)' =$$

Řešené příklady - podíl

Podíl

$$\frac{2x^3-2}{x^4+2x+3} = \frac{(2x^3-2)'\cdot(x^4+2x+3)-(2x^3-2)\cdot(x^4+2x+3)'}{(x^4+2x+3)^2}$$
$$= \frac{(6x^2)\cdot(x^4+2x+3)-(2x^3-2)\cdot(4x^3+2)}{(x^4+2x+3)^2}$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}(3x^2+2)\right)' = \frac{1}{1+(3x^2+2)^2}\cdot(3x^2+2)' =$$

Řešené příklady - podíl

Podíl

$$\frac{2x^3-2}{x^4+2x+3} = \frac{(2x^3-2)' \cdot (x^4+2x+3) - (2x^3-2) \cdot (x^4+2x+3)'}{(x^4+2x+3)^2}$$
$$= \frac{(6x^2) \cdot (x^4+2x+3) - (2x^3-2) \cdot (4x^3+2)}{(x^4+2x+3)^2}$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}(3x^2+2)\right)' = \frac{1}{1+(3x^2+2)^2} \cdot (3x^2+2)' =$$
$$= \frac{1}{1+(3x^2+2)^2} \cdot 6x$$

Řešené příklady - složená funkce

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^3 e^{3x^3}\right)\right)' =$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^3 e^{3x^3}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(x^3 e^{3x^3}\right)' =$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^3 e^{3x^3}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(x^3 e^{3x^3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(\left(x^3\right)' \cdot e^{3x^3} + x^3 \cdot \left(e^{3x^3}\right)'\right) =$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^3e^{3x^3}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(x^3e^{3x^3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(\left(x^3\right)'\cdot e^{3x^3}+x^3\cdot\left(e^{3x^3}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(3x^2\cdot e^{3x^3}+x^3\cdot e^{3x^3}\cdot\left(3x^3\right)'\right) =$$

Složená funkce

$$\left(\operatorname{arctg}\left(x^3e^{3x^3}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(x^3e^{3x^3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(\left(x^3\right)'\cdot e^{3x^3} + x^3\cdot\left(e^{3x^3}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(3x^2\cdot e^{3x^3} + x^3\cdot e^{3x^3}\cdot\left(3x^3\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3e^{3x^3}\right)^2}\cdot\left(3x^2\cdot e^{3x^3} + x^3\cdot e^{3x^3}\cdot\left(3\cdot 3x^2\right)\right)$$

Neřešené příklady - podíl a složená funkce

- Př. 1: $(e^{-x^2})' =$
- Př. 2: $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$
- Př. 3: $\left(\operatorname{arctg}\left(e^{\pi^5} + \sqrt[7]{\log_{\frac{5}{6}}\left(10e - \pi^{\frac{7}{e}}\right)}\,\pi^{\sqrt[e]{1+\ln 3+\pi^e}+23}\right)\right)' =$

Neřešené příklady - podíl a složená funkce

- Př. 1: $(e^{-x^2})' =$

$$e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- Př. 2: $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$

- Př. 3: $\left(\operatorname{arctg}\left(e^{\pi^5} + \sqrt[7]{\log_{\frac{5}{6}}\left(10e - \pi^{\frac{7}{e}}\right)}\,\pi^{\sqrt[e]{1+\ln 3+\pi^e}+23}\right)\right)' =$

Neřešené příklady - podíl a složená funkce

- Př. 1: $(e^{-x^2})' =$

$$e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- Př. 2: $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$

$$\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

- Př. 3: $\left(\operatorname{arctg}\left(e^{\pi^5} + \sqrt[7]{\log_{\frac{5}{6}}\left(10e - \pi^{\frac{7}{e}}\right)}\pi^{\sqrt[e]{1+\ln 3+\pi^e}+23}\right)\right)' =$

Neřešené příklady - podíl a složená funkce

- Př. 1: $(e^{-x^2})' =$

$$e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- Př. 2: $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$

$$\frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

- Př. 3: $\left(\operatorname{arctg}\left(e^{\pi^5} + \sqrt[7]{\log_{\frac{5}{6}}\left(10e - \pi^{\frac{7}{e}}\right)}\pi^{\sqrt[e]{1+\ln 3+\pi^e}+23}\right)\right)' =$

$$0$$

Derivace vyšších řádů - význam

- Konvexnost a konkávnost funkce
  - $f''(a) > 0$, funkce je v bodě a konvexní
  - $f''(a) < 0$, funkce je v bodě a konkávní
  - $f''(a) = 0$, bod a je inflexním bodem funkce