Derivace 2

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Derivační vzorce

$$(C)' = 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{cotg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Derivační pravidla

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

$$(f^g)' = \left(e^{g \cdot \ln(f)}\right)'$$

Interpretace významu první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.

Interpretace významu první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.
- Zkráceně monotonnost funkce v bodě a:
  - $f'(a) > 0$, funkce je v bodě a rostoucí
  - $f'(a) < 0$, funkce je v bodě a klesající
  - $f'(a) = 0$, bod a je stacionárním bodem funkce

Interpretace významu první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.
- Zkráceně monotonnost funkce v bodě a:
  - $f'(a) > 0$, funkce je v bodě a rostoucí
  - $f'(a) < 0$, funkce je v bodě a klesající
  - $f'(a) = 0$, bod a je stacionárním bodem funkce
- $f'(a)$ je směrnicí tečny funkce v bodě a

Interpretace významu první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.
- Zkráceně monotonnost funkce v bodě a:
  - $f'(a) > 0$, funkce je v bodě a rostoucí
  - $f'(a) < 0$, funkce je v bodě a klesající
  - $f'(a) = 0$, bod a je stacionárním bodem funkce
- $f'(a)$ je směrnicí tečny funkce v bodě a
- Monotonnost funkce určíme řešením nerovnic:
  - $f'(x) > 0$, určíme množinu na které je funkce rostoucí
  - $f'(x) < 0$, určíme množinu na které je funkce klesající
  - $f'(x) = 0$, určíme množinu na které je funkce stacionární

Interpretace významu první derivace

- Hodnota derivace funkce v bodě reprezentuje rychlost změny hodnoty v bodě.
- Zkráceně monotonnost funkce v bodě a:
  - $f'(a) > 0$, funkce je v bodě a rostoucí
  - $f'(a) < 0$, funkce je v bodě a klesající
  - $f'(a) = 0$, bod a je stacionárním bodem funkce
- $f'(a)$ je směrnicí tečny funkce v bodě a
- Monotonnost funkce určíme řešením nerovnic:
  - $f'(x) > 0$, určíme množinu na které je funkce rostoucí
  - $f'(x) < 0$, určíme množinu na které je funkce klesající
  - $f'(x) = 0$, určíme množinu na které je funkce stacionární
- Z předchozích nerovnic nejčastěji řešíme jen jednu z variant, zbylé případy vyplynou automaticky.

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$

Postup:

- I. určit $f'(x)$

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

- I. určit $f'(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

- I. určit $f'(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- II. řešit jednu z nerovností (např. $f'(x) > 0$)

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

- I. určit $f'(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- II. řešit jednu z nerovností (např. $f'(x) > 0$)

$$e^{-x^2} \cdot (-2x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 0)$.

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

- I. určit $f'(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- II. řešit jednu z nerovností (např. $f'(x) > 0$)

$$e^{-x^2} \cdot (-2x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

  Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 0)$.

- III. Dořešit zbylé případy

Řešený příklad

Rozhodněte o monotonnosti funkce $f(x) = e^{-x^2}$
Postup:

- I. určit $f'(x)$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

- II. řešit jednu z nerovností (např. $f'(x) > 0$)

$$e^{-x^2} \cdot (-2x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

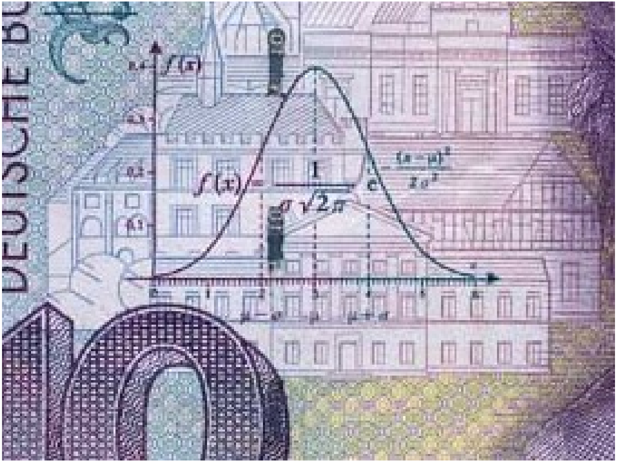
  Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty; 0)$.

- III. Dořešit zbylé případy
  Funkce je klesající na intervalu $(0; \infty)$.
  Funkce má stacionární bod v bodě 0.

Vsuvka


GN3982872Z8
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
ZEHN DEUTSCHE MARK
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. September 1999
GN3982872Z8
LeftoverCurrency.com

Vsuvka



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Určování lokálních extrémů funkcí

- „Charakter“ extrému
  - lokální
  - globální

Určování lokálních extrémů funkcí

- „Charakter“ extrému
  - lokální
  - globální
- Globální extrémy nelze elegantně nalézt!

Určování lokálních extrémů funkcí

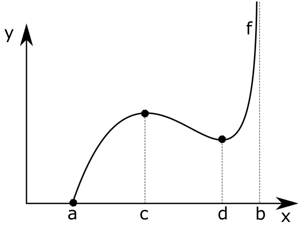
- „Charakter“ extrému
  - lokální
  - globální
- Globální extrémy nelze elegantně nalézt!
- Lokální extrém, podezřelý bod $f'(x) = 0$

Určování lokálních extrémů funkcí

- „Charakter“ extrému
  - lokální
  - globální
- Globální extrémy nelze elegantně nalézt!
- Lokální extrém, podezřelý bod $f'(x) = 0$
- Typ extrému
  - minimum
  - maximum

Určování lokálních extrémů funkcí

- „Charakter“ extrému
  - lokální
  - globální
- Globální extrémy nelze elegantně nalézt!
- Lokální extrém, podezřelý bod $f'(x) = 0$
- Typ extrému
  - minimum
  - maximum
- Určení typu lokálního extrému
  - minimum $f''(x) > 0$
  - maximum $f''(x) < 0$
  - není jednoznačné
  - existuje lepší způsob určení



- a - glob. min.
- b - neex. glob. max.
- c - lok. max.
- d - lok. max.

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- II. Nalézt $f'(x) = 0$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- II. Nalézt $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$

$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- II. Nalézt $f'(x) = 0$

$$3x^2-6x-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$

$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

- III. Nalézt $f''(x)$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- II. Nalézt $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$

$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

- III. Nalézt $f''(x)$

$$f''(x) = 6x - 6$$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
- II. Nalézt $f'(x) = 0$
$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- III. Nalézt $f''(x)$
$$f''(x) = 6x - 6$$
- IV. Určit hodnotu $f''(x_1)$ a $f''(x_2)$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
- II. Nalézt $f'(x) = 0$
$$3x^2-6x-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$
- III. Nalézt $f''(x)$
$$f''(x) = 6x - 6$$
- IV. Určit hodnotu $f''(x_1)$ a $f''(x_2)$
$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12, \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$$

Řešený příklad 1.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- II. Nalézt $f'(x) = 0$

$$3x^2-6x-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 3$

- III. Nalézt $f''(x)$

$$f''(x) = 6x - 6$$

- IV. Určit hodnotu $f''(x_1)$ a $f''(x_2)$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12, \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$$

x_1 lokální maximum, x_2 lokální minimum

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 60x^2$$

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 60x^2$$

- II. Určit monotonii funkce

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 60x^2$$

- II. Určit monotonii funkce

$5x^4 - 20x^3 - 60x^2 > 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x - 12) = 0 \Rightarrow 5x^2(x-6)(x+2) > 0$

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 60x^2$$

- II. Určit monotonii funkce

$5x^4 - 20x^3 - 60x^2 > 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x - 12) = 0 \Rightarrow 5x^2(x-6)(x+2) > 0$

Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$
Funkce je klesající na intervalu $(-2, 0) \cup (0, 6)$

Řešený příklad 2.

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce
$f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 5$

- I. Nalézt $f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 60x^2$$

- II. Určit monotonii funkce

$5x^4 - 20x^3 - 60x^2 > 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x - 12) = 0 \Rightarrow 5x^2(x-6)(x+2) > 0$

Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$
Funkce je klesající na intervalu $(-2, 0) \cup (0, 6)$

Bod -2 je lokálním maximem (funkce do -2 roste, za -2 klesá)
Bod 6 je lokálním minimem (funkce do 6 klesá, za 6 roste)
Bod 0 není extrém (funkce do 0 klesá, za 0 klesá)

Aproximace funkcí

- Historicky byla poptávka po zjednodušení výpočtu hodnot složitých funkcí v okolí známých hodnot
- Za tímto účelem vznikly aproximační polynomy
  - Například tečna funkce v bodě a (alternativně x_0)

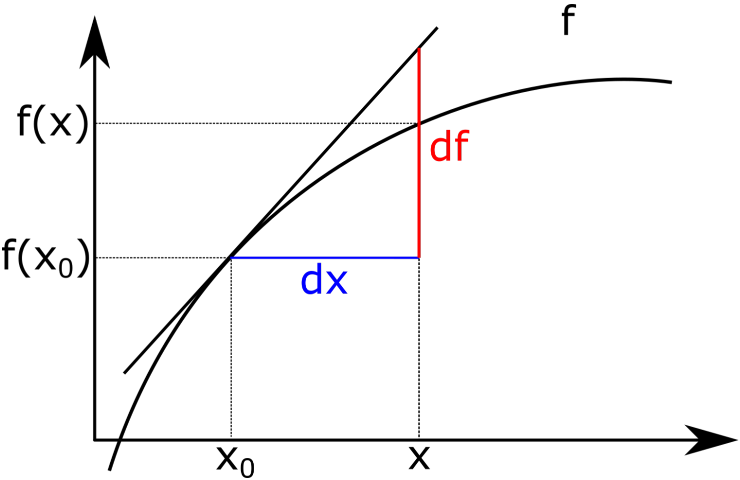
$$f(x) \approx f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

  - Vyšší aproximační polynomy se určují Taylorovým polynomem
- Pokud by nás zajímal jen přírůstek na tečně, pak mluvíme o diferenciálu

$$\mathrm{d}f = f'(a) \cdot (x - a)$$

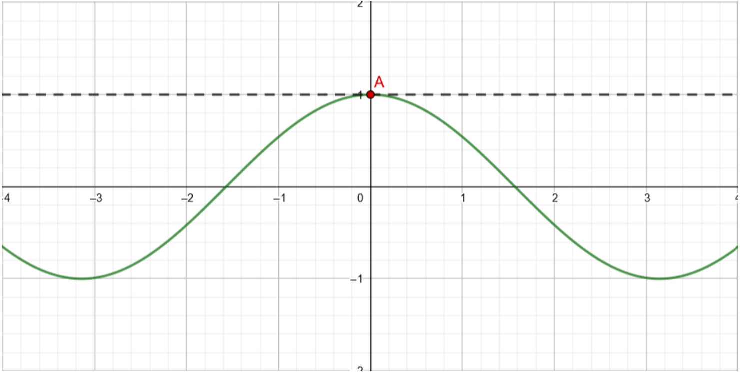
Diferenciál

$$f(x) \approx f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$



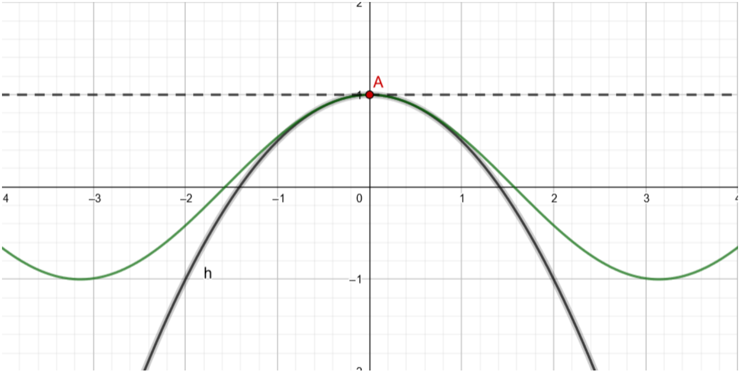
$dx = x - x_0$ $df = f'(x_0)\cdot dx$

Když tečna nestačí - graficky



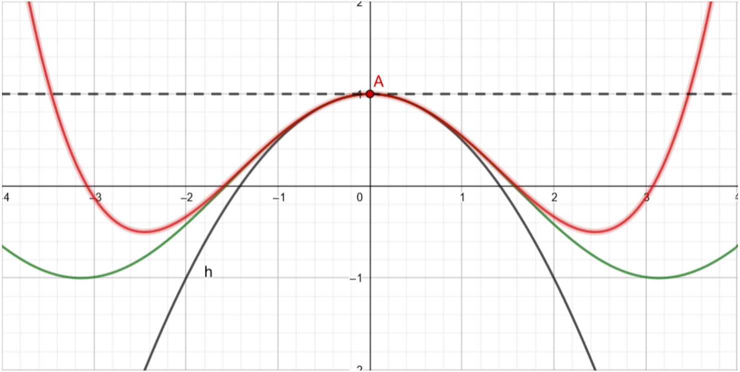
$$T_1(x) = 1$$

Když tečna nestačí - graficky



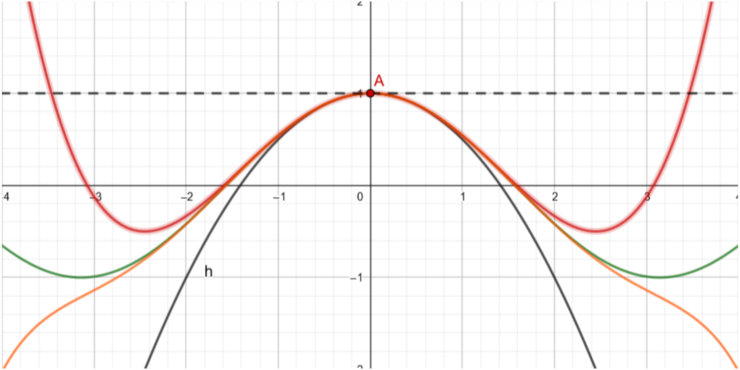
$$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Když tečna nestačí - graficky



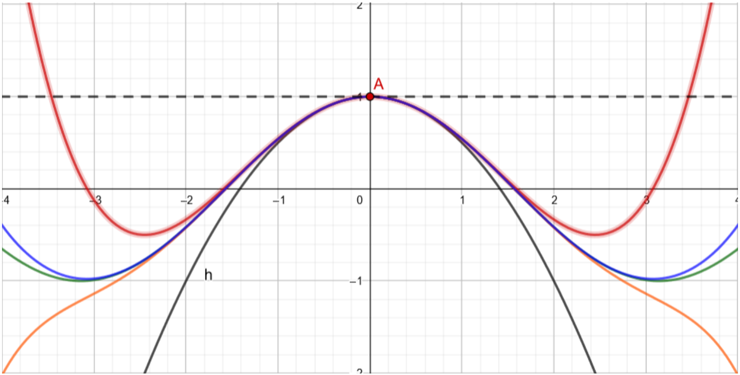
$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Když tečna nestačí - graficky



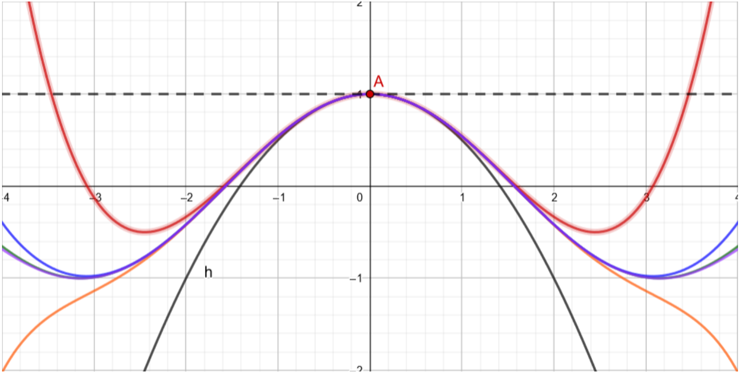
$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

Když tečna nestačí - graficky



$$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!}$$

Když tečna nestačí - graficky



$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

Taylorův polynom - aneb když tečna nestačí

- Nejlepší aproximační metoda
- Potřebujeme znát:
  - Funkci - $f(x)$
  - Střed polynomu - x_0
  - Stupeň aproximačního polynomu - n
- Vzorec:

$$T_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

- $f^{(i)}(x_0)$ - hodnota i-té derivace funkce v bode x_0

$$T_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1$$

$$T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3$$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ se středem v 0.

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \text{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\text{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \text{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\text{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1 + x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1 + x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1 + x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1 + x^2\right)^{-2} \cdot 2x$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x$
- III. Výpočet $f'''(x)$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1 + x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1 + x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1 + x^2\right)^{-2} \cdot 2x$
- III. Výpočet $f'''(x)$
  $f'''(x) = 2\left(1 + x^2\right)^{-3} \cdot 2x \cdot 2x - \left(1 + x^2\right)^{-2} \cdot 2$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x$
- III. Výpočet $f'''(x)$
  $f'''(x) = 2\left(1+x^2\right)^{-3} \cdot 2x \cdot 2x - \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2$
- IV. Dosazení $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$

Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x$
- III. Výpočet $f'''(x)$
  $f'''(x) = 2\left(1+x^2\right)^{-3} \cdot 2x \cdot 2x - \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2$
- IV. Dosazení $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2$
- V. Dosazení do vzorce

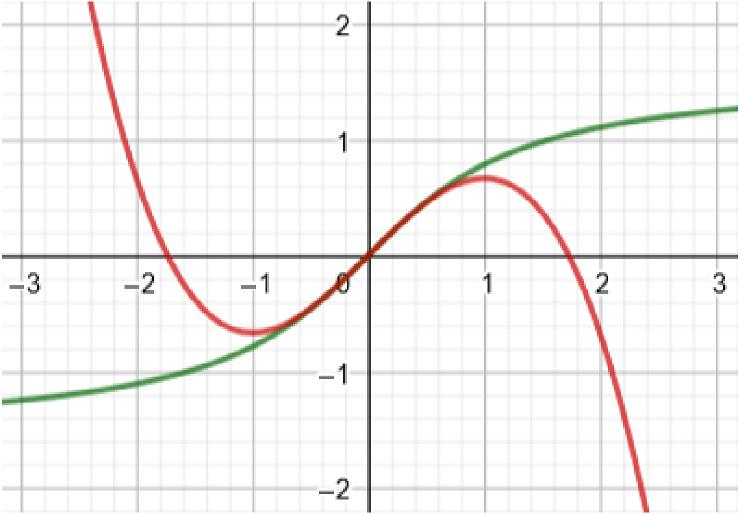
Řešený příklad

Určete T_3 funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ se středem v 0.

- I. Výpočet $f'(x)$
  $f'(x) = (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$
- II. Výpočet $f''(x)$
  $f''(x) = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x$
- III. Výpočet $f'''(x)$
  $f'''(x) = 2\left(1+x^2\right)^{-3} \cdot 2x \cdot 2x - \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2$
- IV. Dosazení $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$
- V. Dosazení do vzorce

$$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot (x-0) + \frac{0}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{-2}{3!} \cdot (x-0)^3$$

Řešený příklad - graficky



$$T_3(x) = x - \frac{1}{3} \cdot x^3$$