Soustavy lineárních rovnic a matice

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Obsah

- Soustavy lineárních rovnic
  - Typy soustav
  - Metody řešení
- Matice
  - Základní pojmy (zápis, vektor, speciální typy matic, symetrická matice)
  - Operace s maticemi (rovnost, sčítání, násobení, transponování)
  - Determinant matice
  - Řešení soustav rovnic pomocí matic

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů."

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.
- Omezíme se pouze na lineární rovnice.

Motivace

- Jaký je geometrický význam rovnice?
  „Najít průsečík dvou grafů."

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.
- Omezíme se pouze na lineární rovnice.
  - (Pomocí numerických metod lze každá rovnice převést na opakované řešení lineárních rovnic.)

Základní značení

Soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ koeficienty
- x_i, $i = 1, \dots, n$ neznámé (pro malá n, x, y a z)
- $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ koeficienty pravých stran
- $n \in \mathbb{N}$ počet neznámých
- $m \in \mathbb{N}$ počet rovnic

Základní poznatky

- Počet řešení:
  - Žádné řešení
  - Jedno řešení
  - Nekonečně mnoho řešení („určitého tvaru“)
- Bohužel toto nejde na první pohled jednoznačně určit.

Základní poznatky

- Počet řešení:
  - Žádné řešení
  - Jedno řešení
  - Nekonečně mnoho řešení („určitého tvaru“)
- Bohužel toto nejde na první pohled jednoznačně určit.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2y_1 & + & z_1 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2y_1 & + & 3z_1 & = & 4 \\ x_1 & + & & & z_1 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4y_1 & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_2 & + & y_2 & - & z_2 & = & 1 \\ 2x_2 & + & 2y_2 & - & 4z_2 & = & 2 \\ x_2 & + & y_2 & + & z_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_3 & + & y_3 & - & z_3 & = & 1 \\ 2x_3 & + & 2y_3 & - & 4z_3 & = & 2 \\ & & & & z_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [x_1; y_1; z_1] & = & \left[3; \frac{1}{2}; -1\right] \\ [x_2; y_2; z_2] & = & [t; 1-t; 0]\,,\ t \in \mathbb{R} \\ [x_3; y_3; z_3] & = & \text{Nemá klasické řešení.} \end{array}$$

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní$\times$Nehomogenní soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní$\times$Nehomogenní soustava
- Přeurčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní$\times$Nehomogenní soustava
- Přeurčená soustava
- Nedourčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní×Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
- Přeurčená soustava
- Nedourčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní×Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
- Nedourčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní×Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
- Nedourčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní$\times$Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní×Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava
  - Má méně rovnic než proměnných

Klasifikace soustav lineárních rovnic

- Homogenní$\times$Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava
  - Má méně rovnic než proměnných
  - „Mívá nekonečně mnoho řešení, která se zapisují pomocí volitelných parametrů.“

Klasifikace lineárních rovnic

- a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- b)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- c)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- b) Nehomogenní soustava (tří rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- c)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- b) Nehomogenní soustava (tří rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

- c) Přeurčená homogenní soustava (čtyř rovnic o třech neznámých)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda

- Dosazovací metoda

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda

- Dosazovací metoda

- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:

- Dosazovací metoda

- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
- Dosazovací metoda
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)
  - Gaussova eliminační metoda

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnou x_1 pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)
  - Gaussova eliminační metoda
  - Cramerovo pravidlo

Sčítací metoda

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & 2y & + & z & = & 3 \\
2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\
x & + & & & z & = & 2 \\
2x & + & 4y & & & = & 8
\end{array}
$$

Sčítací metoda

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & - & 2y & & & = & -1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

Sčítací metoda

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & - & 2y & & & = & -1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

Sčítací metoda

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & - & 2y & & & = & -1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Sčítací metoda

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & - & 2y & & & = & -1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & z & = & -1 & \\ & - & 2y & & = & -2-z & \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \\ x & & & & = & 3-2y-z & \Rightarrow \quad x = 3 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \Rightarrow \quad x = 3 - 2y - z$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 2y - z$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & \\ x & + & & & z & = & 2 & & \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2(3 - 2y - z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3 - 2y - z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3 - 2y - z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{-} & 2y & + & z & = & \text{-}2 \\ \text{-} & 2y & + & & = & \text{-}1 \\ & & \text{-} & 2z & = & 2 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & \\ x & + & & & z & = & 2 & & \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} - & 2y & + & z & = & -2 & & \\ - & 2y & + & & = & -1 & \Rightarrow y = \frac{1}{2} & \\ & & - & 2z & = & 2 & & \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & \\ x & + & & & z & = & 2 & & \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccll} \text{-} & 2y & + & z & = & \text{-}2 & \\ \text{-} & 2y & + & & = & \text{-}1 & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ & & \text{-} & 2z & = & 2 & \Rightarrow z = -1 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & \\ x & + & & & z & = & 2 & & \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} - & 2y & + & z & = & -2 & & \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\ - & 2y & + & & = & -1 & & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ & & - & 2z & = & 2 & & \Rightarrow z = -1 \end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow \quad x = 3 - 2y - z \\
2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & \qquad x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) \\
x & + & & & z & = & 2 & \\
2x & + & 4y & & & = & 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\
3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\
2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrl}
- & 2y & + & z & = & -2 & \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\
- & 2y & + & & = & -1 & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\
 & & - & 2z & = & 2 & \Rightarrow z = -1
\end{array}$$

Dosazovací metoda

$$\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) \\ x & + & & & z & = & 2 & & x = 3 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2(3-2y-z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3-2y-z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3-2y-z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} - & 2y & + & z & = & \text{-2} & \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\ - & 2y & + & & = & \text{-1} & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ & & - & 2z & = & 2 & \Rightarrow z = -1 \end{array}$$

Matice - základní pojmy

- Maticí řádu $m \times n$ nazýváme obdélníkové schéma reálných čísel o m řádcích a n sloupcích.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Matice značíme většinou velkými tučnými písmeny
- Řádky matice číslujeme shora
- Sloupce matice číslujeme zleva
- Čísla v matici nazýváme prvky matice
- Prvky matice označujeme odpovídajícími malými písmeny s řádkovým a sloupcovým indexem

Matice - základní pojmy

- Matice o jednom řádku/sloupci nazýváme **vektory**
- Vektory většinou značíme malými tučnými písmeny

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Matici o n řádcích a n sloupcích nazveme **čtvercovou** maticí řádu n
- Prvky a_{ii} matice $\mathbf{A}$ (prvky jejichž řádkový a sloupcový index se rovná) nazýváme diagonálními prvky
- Všechny diagonální prvky matice $\mathbf{A}$ nazýváme hlavní diagonálou

Speciální typy matic

- **Jednotková matice** - čtvercová matice, která má na hlavní diagonále 1 a ostatní prvky jsou 0. Značení $\mathbf{E}$, nebo $\mathbf{I}$, pokud chceme zdůraznit řád matice pak $\mathbf{E}_n$, nebo $\mathbf{I}_n$

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matice ve **schodovitém tvaru**, je matice jejíž každý řádek začíná větším počtem 0 než řádek předcházející.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Speciální typy matic

- **Symetrická matice** je matice jejíž prvky splňují podmínku

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_{ij} = a_{ji}$$

- Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Protipříklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

- Rovnost matic
  - Matice se rovnají pokud jsou stejného řádu a odpovídající prvky se rovnají

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$

- Sčítání matic
  - Matice lze sčítat, pokud jsou stejného řádu a výsledné prvky matice jsou součty odpovídajících si prvků původních matic.

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-3) \\ -3+2 & 0+1 \\ 0+6 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

  - Odčítání analogicky

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 4\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) \\ 4\cdot(-1) & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) \\ 4\cdot(-1) & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) \\ 4\cdot(-1) & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) \\ 3\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení konstantou $c \in \mathbb{R}$
  - každý prvek se vynásobí konstantou c

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 4{\cdot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu $m \times n$ lze zprava vynásobit maticí řádu $n \times o$, výsledná matice je řádu $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Násobení matic není komutativní $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) = 2$$

- Jednoprvková matice je „číslo“

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ -2\cdot 0 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 & -2\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & -2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$

Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ -2\cdot 0 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 & -2\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & -2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Proveďte $B \cdot A$ Nelze

Transponování matic

- Transponování matic
  - „Prohození indexů u prvků matic.“
  - $\mathbf{A} = (a_{ij})$, transponovaná matice $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$
  - Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Vztahy pro transponování matic
  - $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

Determinant

- **Determinant** je číslo přiřazené matici, které je definované jen pro čtvercové matice
  - značení $|\mathbf{A}|$, $det(\mathbf{A})$
  - podle hodnoty determinantu rozděluje na **singulární** ($|\mathbf{A}| = 0$) a **regulární** ($|\mathbf{A}| \neq 0$)
  - ukazuje zda jsou řádky/sloupce matice nezávislé (kombinací ostatních řádků/sloupců)
  - **singulární** matice má závislé řádky/sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1))$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1))$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{array}{rrr} \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right| \\ \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \end{array}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 \\ \quad - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = \end{array}$$

- Nelze použít na větší matice!

Výpočet determinantu

Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu 2×2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu 3×3

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{rl} = & 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - \\ & -(0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = \\ & = 1 + 0 - 3 - (0 + 6 - 2) = -2 - 4 = -6 \end{array}$$

- Nelze použít na větší matice!

Vlastnosti determinantu

- Záměna řádku/sloupce
  - Po výměně dvou řádů se změní znaménko determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Vynásobení řádku konstantou
  - Po vynásobení řádku matice **A** konstantou c se determinant nové matice rovná $c \cdot |\mathbf{A}|$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Hodnota determinantu se nezmění pokud k řádku přičteme násobek jiného řádku

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot 3\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot 3-(-1\cdot 1\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+(-1)\cdot 2\cdot 0)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)+0{\cdot}3{\cdot}(-1)+2{\cdot}2{\cdot}3-(-1{\cdot}1{\cdot}2+3{\cdot}3{\cdot}1+(-1){\cdot}2{\cdot}0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-1){+}0{\cdot}3{\cdot}(-1){+}2{\cdot}2{\cdot}3{-}({-}1{\cdot}1{\cdot}2{+}3{\cdot}3{\cdot}1{+}(-1){\cdot}2{\cdot}0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)+0{\cdot}3{\cdot}(-1)+2{\cdot}2{\cdot}3-(-1{\cdot}1{\cdot}2+3{\cdot}3{\cdot}1+(-1){\cdot}2{\cdot}0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}0{\cdot}1+2{\cdot}0{\cdot}2+1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)-(2{\cdot}0{\cdot}1+(-1){\cdot}0{\cdot}3+1{\cdot}(-1){\cdot}2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot3+(-2)\cdot2\cdot2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)+0{\cdot}3{\cdot}(-1)+2{\cdot}2{\cdot}3-(-1{\cdot}1{\cdot}2+3{\cdot}3{\cdot}1+(-1){\cdot}2{\cdot}0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}0{\cdot}1+2{\cdot}0{\cdot}2+1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)-(2{\cdot}0{\cdot}1+(-1){\cdot}0{\cdot}3+1{\cdot}(-1){\cdot}2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot (-1)$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot3+(-2)\cdot2\cdot2+(-1)\cdot1\cdot1-(2\cdot1\cdot(-1)+1\cdot2\cdot1$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)+0{\cdot}3{\cdot}(-1)+2{\cdot}2{\cdot}3-(-1{\cdot}1{\cdot}2+3{\cdot}3{\cdot}1+(-1){\cdot}2{\cdot}0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}0{\cdot}1+2{\cdot}0{\cdot}2+1{\cdot}(-1){\cdot}(-1)-(2{\cdot}0{\cdot}1+(-1){\cdot}0{\cdot}3+1{\cdot}(-1){\cdot}2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3+(-2)\cdot 2\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot 1-(2\cdot 1\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot 1+3\cdot 1\cdot(-2))$$

Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot(-1)+2\cdot2\cdot3-(-1\cdot1\cdot2+3\cdot3\cdot1+(-1)\cdot2\cdot0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot0\cdot1+2\cdot0\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-(2\cdot0\cdot1+(-1)\cdot0\cdot3+1\cdot(-1)\cdot2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot3+(-2)\cdot2\cdot2+(-1)\cdot1\cdot1-(2\cdot1\cdot(-1)+1\cdot2\cdot1+3\cdot1\cdot(-2)) = 0$$

Řešení soustav rovnic pomocí matic

- Soustavy lineárních rovnic je možné zapsat pomocí **rozšířené matice**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  - Zkráceně $\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$
- Metody řešení
  - Gaussova eliminační metoda (univerzální, ekvivalent součtové metody)
  - Cramerovo pravidlo (jen v případech, kdy matice $\mathbf{A}$ je čtvercová)

Frobeniova věta

Soustava má (alespoň jedno) řešení právě tehdy, když se hodnost matice $h(\mathbf{A})$ rovná hodnosti rozšířené matice soustavy $h(\tilde{\mathbf{A}})$, tedy když:

1. Soustava s n neznámými má jediné řešení právě tehdy, když platí
$$h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) = n$$
2. Soustava s n neznámými nemá žádné řešení právě tehdy, když platí
$$h(\mathbf{A}) \neq h(\tilde{\mathbf{A}}) = n$$
3. Soustava s n neznámými má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí
$$h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) < n$$

   Řešení existuje nekonečně mnoho závislých na $(n - h(\tilde{\mathbf{A}}))$ parametrech.

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -2 \cdot [1] \\ \\ \end{array}$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -2 \cdot [1] \\ +1 \cdot [1] \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ -2\cdot[1] \\ +1\cdot[1] \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +1 \cdot [2] \end{array}$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad +1 \cdot [2]$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Zbylý postup jako u sčítací metody.

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)
$$

Zbylý postup jako u sčítací metody.

$$
2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1
$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Zbylý postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow\ x_3 = 1$$
$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow\ 3x_2 = -3 \Rightarrow\ x_2 = -1$$

Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Zbylý postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + (-1) + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Zbylý postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + (-1) + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$[x_1; x_2; x_3] = [2; -1; 1]$$

Cramerovo pravidlo

$$(\mathbf{A}\,|\mathbf{b}\,), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

- Metoda spočívá v postupném počítání determinantů

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|},\ x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|}$$

- Kde matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ vyniknou záměnou pravé strany (vektoru $\mathbf{b}$) za sloupec s odpovídajícím indexem

$$\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) =$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) =$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) = -6$$

Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) = -6$$

$$x_1 = \frac{-12}{-6} = 2;\ x_2 = \frac{6}{-6} = -1; x_3 = \frac{-6}{-6} = 1$$