Úprava výrazů a rovnice

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2022

Úprava výrazů - opakování

- V matematice se často setkáváme se „zápisy“, které je třeba zjednodušit
- Takovým to zápisům říkáme výrazy
- K jejich úpravám nám slouží zejména tři zákony (v $\mathbb{R}$)
    - **Komutativní zákon**

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

    - **Asociativní zákon**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

    - **Distributivní zákon**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vzorový příklad

- Zadání

$$(a+b)\cdot(b-c)-b\cdot(a-c)$$

- Asociativní zákon

$$a\cdot b-a\cdot c+b\cdot b-b\cdot c-b\cdot a+b\cdot c$$

- Komutativní zákon

$$a\cdot b-a\cdot b-a\cdot c+b\cdot b-b\cdot c+b\cdot c$$

- Výsledek

$$-a\cdot c+b\cdot b$$

Zlomky

- Základní operace se zlomky
  - Sčítání/Odčítání zlomků

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

  - Násobení zlomků

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

  - Dělení zlomků

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

    - Alternativně

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Mocnina reálného čísla

Uvažujme libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ pak je zřejmé, že platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \tag{1}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{Pozor! } a \neq 0 \tag{2}$$

Pravidla pro počítání s mocninami:

- $a^0 = 1; \quad$ Pozor! $a \neq 0$
- $0^n = 0$
- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r : a^s = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Vzorový příklad

- Zadání
$$\frac{(a^2b^3c^{-2})^{-2}}{(a^{-2}b^{-1}c^2)^3}$$
- Umocnění
$$\frac{a^{2\cdot(-2)}b^{3\cdot(-2)}c^{-2\cdot(-2)}}{a^{-2\cdot3}b^{-1\cdot3}c^{2\cdot3}}$$
- Roznásobení
$$\frac{a^{-4}b^{-6}c^{4}}{a^{-6}b^{-3}c^{6}}$$
- Na jeden základ
$$a^{-4-(-6)}b^{-6-(-3)}c^{4-6}$$
- Výsledek
$$a^2b^{-3}c^{-2}$$

Pravidla pro úpravu mnohočlenů

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Vsuvka: Pascalův trojúhelník

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Odmocnina

Zavedení pojmu odmocniny:

- odmocnina je „částečně“ inverzní operací s mocnině,
- zavádí se pro libovolné nezáporné reálné číslo a jako

$$b^n = a,$$

  b pak nazýváme n-tou odmocninou a zapisujeme $b = \sqrt[n]{a}$,
- **POZOR!** Pro $a \in \mathbb{R}_0^+$ platí:

$$b^2 = a$$
$$b = \pm\sqrt{a}$$

- pro lichá n lze odmocňovat i záporná čísla.

Odmocnina

Pravidla pro počítání s odmocninami Pro výrazy $a, b > 0$ a $m, n \in \mathbb{N}$:

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

Definiční podmínky výrazů

- Na co ale nesmíme zapomínat jsou definiční podmínky!
- Co musíme ověřit:
  - dělení 0
  - Sudé odmocniny ze záporných čísel
  - logaritmování nekladných čísel

Dělení polynomů/mnohočlenů

- Potřebujeme najít „mnohočlen“ $p(x)$ pro který platí:

$$p(x) \cdot a(x) = b(x),$$

- kde známe pouze $a(x)$ a $b(x)$
- Jinak zapsáno

$$b(x) : a(x) = p(x)$$

Vzorový příklad - jak na to

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & +5x^2 & +2x & -8) & : (x-1) = x^2 + 6x^2 + 8 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
 & 6x^2 & +2x & -8 & \\
 & -(6x^2 & -6x) & & \\
 & & 8x & -8 & \\
 & & -(8x & -8) & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Rovnice

$$f(x) = g(x)$$

- Najít rovnovážný stav
    - Častější značení $L(x) = P(x)$
- Úpravy rovnic
    - Ekvivalentní
    - Neekvivalentní
- Typy rovnic
    - Polynomiální
    - Mocninné
    - Exponenciální
    - Logaritmické

Úpravy rovnic

Dvě rovnice, které mají stejné množiny všech řešení se nazývají **ekvivalentní rovnice**.

Postup řešení rovnic spočívá v úpravách výrazů na levé i pravé straně, tak abychom obdrželi rovnici v jednodušším tvaru.

Úpravy dělíme na:

- ekvivalentní

$$L(x) = P(x) \Leftrightarrow L'(x) = P'(x)$$

- neekvivalentní

$$L(x) = P(x) \Rightarrow L'(x) = P'(x)$$

Ekvivalentní úpravy

- prohození levé a pravé strany rovnice,
- přičtení(odečtení) libovolného čísla nebo násobku neznámé

$$u = v \Leftrightarrow w + u = w + v$$

- vynásobení levé a pravé strany číslem či výrazem, který je nenulový

$$\text{pro } \forall w \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : u = v \Leftrightarrow w \cdot u = w \cdot v$$

- umocnění(odmocnění) levé a pravé strany přirozeným (od-)mocnitelem jsou-li obě strany nezáporné

$$2 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

$$-2 = 2 \Rightarrow (-2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

- zlogaritmování obou stran rovnice se stejným základem jsou-li obě strany rovnice kladné

Polynomiální rovnice 2. stupeň

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_2 \neq 0.$$

Kořeny tohoto polynomu splňují rovnici

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Řešení kvadratické rovnice:

- diskriminant kvadratické rovnice

$$D = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0$$

- kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a_2}$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Doplněním na čtverec:

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 \quad = \quad 0$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

$$x - 1 = 4 \qquad \wedge \qquad x - 1 = -4$$

Řešený příklad

Řešte rovnici $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Pomocí diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ a } x_2 = -3$$

Doplněním na čtverec:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 - 16 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 1 &=& 4 \\ x &=& 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ \wedge \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x - 1 &=& -4 \\ x &=& -3 \end{array}$$

Příklad k procvičení

$$x^2 - 3x - 9 = -2x^2 + 15x - 36$$

Příklad k procvičení

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 9 &= -2x^2 + 15x - 36 \\ 3x^2 - 18x + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Příklad k procvičení

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 9 &= -2x^2 + 15x - 36 \\ 3x^2 - 18x + 27 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Příklad k procvičení

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x - 9 &= -2x^2 + 15x - 36 \\
3x^2 - 18x + 27 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 &= 0 \\
(x-3)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Příklad k procvičení

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x - 9 &= -2x^2 + 15x - 36 \\
3x^2 - 18x + 27 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 &= 0 \\
(x-3)^2 &= 0 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Vzorový příklad 1:
V oboru reálných čísel řešme rovnici $\sqrt{2x+4}=3$

Umocňování rovnice

Vzorový příklad 1:
V oboru reálných čísel řešme rovnici $\sqrt{2x+4} = 3$
Umocníme obě strany rovnice a dostaneme:

$$2x + 4 = 9$$

Umocňování rovnice

Vzorový příklad 1:
V oboru reálných čísel řešme rovnici $\sqrt{2x+4}=3$
Umocníme obě strany rovnice a dostaneme:

$$2x+4=9$$

$$2x=5$$

Vzorový příklad 1:
V oboru reálných čísel řešme rovnici $\sqrt{2x+4} = 3$
Umocníme obě strany rovnice a dostaneme:

$$2x + 4 = 9$$

$$2x = 5$$

Z této rovnice plyne, že $x = \frac{5}{2}$.

Vzorový příklad 1:
V oboru reálných čísel řešme rovnici $\sqrt{2x+4} = 3$
Umocníme obě strany rovnice a dostaneme:

$$2x + 4 = 9$$

$$2x = 5$$

Z této rovnice plyne, že $x = \frac{5}{2}$.
Zde platí jsou-li u a v stejná, pak jsou stejné i jejich mocniny, tj.

$$u = v \Rightarrow u^2 = v^2$$

Jestliže pro nějaké číslo x platí $\sqrt{2x+4} = 3$ splňuje toto číslo x i rovnici $2x + 4 = 9$.

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

Umocňování rovnice

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$x^2 - 2x + 10 \quad = \quad (x - 10)^2$$

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (x - 10)^2 \\ x^2 - 2x + 10 &= x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (x-10)^2 \\ x^2 - 2x + 10 &= x^2 - 20x + 100 \\ 18x &= 90 \end{aligned}$$

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (x-10)^2 \\ x^2 - 2x + 10 &= x^2 - 20x + 100 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (x-10)^2 \\ x^2 - 2x + 10 &= x^2 - 20x + 100 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Zkouška:
$$L(5) = \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} = 5$$

Vzorový příklad 2:
Pozor na opačnou implikaci! Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 10 &= (x - 10)^2 \\ x^2 - 2x + 10 &= x^2 - 20x + 100 \\ 18x &= 90 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L(5) &= \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} = 5 \\ P(5) &= 5 - 10 = -5 \\ L(5) &\neq P(5) \end{aligned}$$

Poučení: „Když umocňuji rovnici, pak dělám zkoušku!“

Vyřešte rovnici:

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} \quad = \quad \sqrt{x+1}$$

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\ 2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1 \end{aligned}$$

Umocňování rovnice - Samostatně

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\ 2x + 3 - 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} + x - 2 &= x + 1 \\ 2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \end{aligned}$$

Umocňování rovnice - Samostatně

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1 \\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}
\end{aligned}$$

Umocňování rovnice - Samostatně

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1 \\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x^2 &= (2x+3)(x-2)
\end{aligned}$$

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6
\end{aligned}$$

Vyřešte rovnici:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6
\end{aligned}
$$

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1 \\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x^2 &= (2x+3)(x-2) \\
x^2 &= 2x^2-x-6 \\
0 &= x^2-x-6 \\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6\\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Zkouška:

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1 \\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2} \\
x^2 &= (2x+3)(x-2) \\
x^2 &= 2x^2-x-6 \\
0 &= x^2-x-6 \\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L(3) \quad = \sqrt{6+3}-\sqrt{3-2} = 3-1 = 2$$

Umocňování rovnice - Samostatně

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6\\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L(3) &= \sqrt{6+3}-\sqrt{3-2}=3-1=2\\
P(3) &= \sqrt{3+1}=2
\end{aligned}$$

Vyřešte rovnici:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6\\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}
$$

Zkouška:

$$
\begin{aligned}
L(3) &= \sqrt{6+3}-\sqrt{3-2}=3-1=2\\
P(3) &= \sqrt{3+1}=2\\
L(3) &= P(3)
\end{aligned}
$$

Umocňování rovnice - Samostatně

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6\\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L(3) &= \sqrt{6+3}-\sqrt{3-2}=3-1=2\\
P(3) &= \sqrt{3+1}=2\\
L(3) &= P(3)\\
L(-2) &= \sqrt{-4+3}-\sqrt{-2-2}=\text{neexistuje}
\end{aligned}$$

Vyřešte rovnici:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1}\\
2x+3-2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}+x-2 &= x+1\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x &= \sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}\\
x^2 &= (2x+3)(x-2)\\
x^2 &= 2x^2-x-6\\
0 &= x^2-x-6\\
0 &= (x-3)(x+2)
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
L(3) &= \sqrt{6+3}-\sqrt{3-2}=3-1=2\\
P(3) &= \sqrt{3+1}=2\\
L(3) &= P(3)\\
L(-2) &= \sqrt{-4+3}-\sqrt{-2-2}=\text{neexistuje}\\
P(-2) &= \sqrt{-2+1}=\text{neexistuje}
\end{aligned}$$

Řešení rovnic specifického typu

Exponenciální rovnicí nazýváme každou rovnici, ve které je neznámá $x \in \mathbb{R}$ v exponentu mocniny nějakého čísla. Za základní tvar exponenciální rovnice lze považovat

$$a^{f(x)} = b^{g(x)},$$

kde $a > 0,\ b > 0$ a $f(x),\ g(x)$ jsou nějaké výrazy.

Metoda řešení:
Rovnici převedeme logaritmováním na tvar

$$f(x) log(a) = g(x) log(b),$$

ve speciálním případě, kdy $a = b$, dostaneme

$$f(x) = g(x).$$

Příklad:
V reálném oboru řešte:

$$3^{x+1} - 9^{2-x} = 0.$$

Řešení: Převedeme druhý člen na pravou stranu:

$$3^{x+1} = 9^{2-x}$$

Dosadíme $9 = 3^2$

$$3^{x+1} = 3^{2(2-x)}$$

Logaritmováním dostaneme

$$\begin{aligned} x + 1 &= 2(2 - x) \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Řešení exponenciální rovnice - vytknutí

Příklad:

V reálném oboru řešte

$$3^{2x-1} - 3^{2x-4} = 315 - 3^{2x-2}.$$

$$\begin{aligned}
3^{2x} \cdot 3^{-1} - 3^{2x} \cdot 3^{-4} + 3^{2x} \cdot 3^{-2} &= 315 \\
3^{2x}(3^{-1} - 3^{-4} + 3^{-2}) &= 315 \\
3^{2x}(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{9}) &= 315 \\
3^{2x} . \frac{35}{81} &= 315 \\
3^{2x} &= 729 \\
3^{2x} &= 3^6
\end{aligned}$$

Logaritmováním dostaneme

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Řešení exponenciální rovnice - substituce

Příklad:

V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Příklad:

V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Příklad:

V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 5^x$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Řešení exponenciální rovnice - substituce

Příklad:

V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 5^x$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Dostaneme kořeny

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Rightarrow y_1 = 1 \wedge y_2 = 5$$

Příklad:
V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 5^x$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Dostaneme kořeny

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Rightarrow y_1 = 1 \wedge y_2 = 5$$

Tedy po provedení zpětné substituce dostaneme:

Příklad:
V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 5^x$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Dostaneme kořeny

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Rightarrow y_1 = 1 \wedge y_2 = 5$$

Tedy po provedení zpětné substituce dostaneme:

a) pro $y_1 = 5$ získáme první řešení původní rovnice z $5 = 5^x$

Příklad:
V reálném oboru řešte

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Řešení: Upravíme na tvar

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 5^x$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Dostaneme kořeny

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Rightarrow y_1 = 1 \wedge y_2 = 5$$

Tedy po provedení zpětné substituce dostaneme:

a) pro $y_1 = 5$ získáme první řešení původní rovnice z $5 = 5^x$
b) pro $y_2 = 1$ získáme druhé řešení původní rovnice z $1 = 5^x$