Nerovnice

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Nerovnice

Zavedení **pojmů nerovnice**:
Jsou dány dva výrazy $L(x)$ a $P(x)$ s proměnnou x. Mají se určit hodnoty této proměnné z oboru M, pro něž platí

$$L(x) < P(x), \ \ resp. L(x) > P(x)$$

nebo

$$L(x) \leq P(x), \ \ resp. L(x) \geq P(x).$$

Zápis úlohy v některém z uvedených tvarů se nazývá nerovnice. Zavádí se obdobná terminologie jako u rovnic.

Rozdíly oproti rovnicím - úpravy

- násobení konstantou c
  - když $c > 0$

$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$

  - když $c < 0$

$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$

- Příklad

$$x - 3 \quad \geq \quad 2x - 5$$

Rozdíly oproti rovnicím - úpravy

- násobení konstantou c
  - když $c > 0$

$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$

  - když $c < 0$

$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$

- Příklad

$$\begin{aligned} x - 3 &\geq 2x - 5 \\ -x &\geq -2 \qquad / \cdot (-1) \end{aligned}$$

Rozdíly oproti rovnicím - úpravy

- násobení konstantou c
  - když $c > 0$
$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$
  - když $c < 0$
$$L(x) \geq P(x) \quad \Rightarrow \quad c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$
- Příklad
$$\begin{aligned} x - 3 &\geq 2x - 5 \\ -x &\geq -2 \qquad / \cdot (-1) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$x^2 - 25 \quad \geq \quad 3x + 15$$

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\ x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$
\begin{aligned}
x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\
x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\
(x+2) \cdot (x-5) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\ x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\ (x+2)\cdot(x-5) &\geq 0 \end{aligned}$$

- Vlastní řešení

		-2		5	
$x+2$	-	|	$+$	|	$+$
$x-5$	-	|	-	|	$+$
	$+$	|	-	|	$+$

Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\ x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\ (x+2)\cdot(x-5) &\geq 0 \end{aligned}$$

- Vlastní řešení

		-2		5	
$x+2$	-		+		+
$x-5$	-		-		+
	+		-		+

- Řešení $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 5, \infty)$

Kvadratická nerovnice - sami

$$2x^2 + 3x - 2 \quad < \quad x^2 + 2x - 3$$

Kvadratická nerovnice - sami

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

Kvadratická nerovnice - sami

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

- Diskriminant

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

- Diskriminant

$$D = 1 - 4 = -3$$

Kvadratická nerovnice - sami

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0 \end{aligned}$$

- Diskriminant

$$D = 1 - 4 = -3$$

- Řešení

$$x \in \emptyset$$

Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

		-3		2		5	
$x-2$	-	|	-	|	$+$	|	$+$

Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

		-3	2	5
$x-2$	-	-	$+$	$+$
$x+3$	-	$+$	$+$	$+$

Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

		-3		2		5	
$x-2$	-		-		$+$		$+$
$x+3$	-		$+$		$+$		$+$
$x-5$	-		-		-		$+$

Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

		-3	2	5
$x-2$	-	-	+	+
$x+3$	-	+	+	+
$x-5$	-	-	-	+
	-	+	-	+

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

	-3		2		5	
$x-2$	-		-		+	+
$x+3$	-		+		+	+
$x-5$	-		-		-	+
	-		+		-	+

- Řešení $x \in \langle -3, 2\rangle \cup \langle 5, \infty)$

Příklad:

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

Příklad:

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

Řešení:

Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

Příklad:
V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

Řešení:
Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

Najdeme kořeny čitatele: $-2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -3,5$.

Příklad:

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

Řešení:

Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

Najdeme kořeny čitatele: $-2x-7=0 \Leftrightarrow x=-3,5$.

Najdeme kořeny jmenovatele:

$(x+2)(1-x)=0 \Leftrightarrow x_1=-2$ a $x_2=1$.

Nerovnice

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

		-3,5	-2	1
$-2x-7$	$+$	-	-	-

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

	-3,5		-2		1	
$-2x-7$	$+$		-		-	-
$x+2$	-		-		$+$	$+$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

	-3,5		-2		1	
$-2x-7$	$+$		-		-	-
$x+2$	-		-		$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$		$+$	-

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

	-3,5	-2	1	
$-2x-7$	$+$	-	-	-
$x+2$	-	-	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	-
	-	$+$	-	$+$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

	-3,5	-2	1	
$-2x-7$	$+$	-	-	-
$x+2$	-	-	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	-
	-	$+$	-	$+$

Z tabulky je zřejmé, že řešením jsou intervaly $(-\infty, -3,5\rangle \cup (-2, 1)$

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

-1 4

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

	-1	4	
$4-x$	$+$	$+$	-

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

		-1	4
$4-x$	+	+	-
$x+1$	-	+	+

Nerovnice - sami

$$\frac{x+6}{x+1} \le 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \le 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \le 0$$

		-1		4	
$4-x$	+		+		-
$x+1$	-		+		+
	-		+		-

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

	-1		4
$4-x$	$+$	$+$	-
$x+1$	-	$+$	$+$
	-	$+$	-

Z tabulky je zřejmé, že řešením jsou intervaly $(-\infty, -1) \cup \langle -2, 1)$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$.

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

Další typy nerovnic

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

a) pro interval $x \in \langle -33, -3)$ platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna $x \in \langle -33, -3)$, tj. $K_1 = \langle -33, -3)$

Příklad:
Řešte nerovnici
$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

a) pro interval $x \in \langle -33, -3)$ platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna $x \in \langle -33, -3)$, tj. $K_1 = \langle -33, -3)$

b) pro interval $x \in \langle -3, \infty)$ jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:
$$(x + 3)^2 \quad < \quad x + 33$$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

a) pro interval $x \in \langle -33, -3)$ platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna $x \in \langle -33, -3)$, tj. $K_1 = \langle -33, -3)$

b) pro interval $x \in \langle -3, \infty)$ jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &< x + 33 \\ x^2 + 6x + 9 &< x + 33 \end{aligned}$$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

a) pro interval $x \in \langle -33, -3)$ platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna $x \in \langle -33, -3)$, tj. $K_1 = \langle -33, -3)$

b) pro interval $x \in \langle -3, \infty)$ jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &< x + 33 \\ x^2 + 6x + 9 &< x + 33 \\ x^2 + 5x - 24 &< 0 \end{aligned}$$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna $x \in \langle -33, \infty)$. Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro $x \geq -3$. Úlohu dělíme na dvě části:

a) pro interval $x \in \langle -33, -3)$ platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna $x \in \langle -33, -3)$, tj. $K_1 = \langle -33, -3)$

b) pro interval $x \in \langle -3, \infty)$ jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &< x + 33 \\ x^2 + 6x + 9 &< x + 33 \\ x^2 + 5x - 24 &< 0 \\ (x+8)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$

Další typy nerovnic

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\; I_2 = (-8, 3)\,,\; I_3 = (3, \infty)$$

-8 3

Další typy nerovnic

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\; I_2 = (-8, 3)\,,\; I_3 = (3, \infty)$$

	-8		3	
$x + 8$	-	$+$		$+$

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\ I_2 = (-8, 3)\,,\ I_3 = (3, \infty)$$

	-8	3	
$x+8$	-	$+$	$+$
$x-3$	-	-	$+$

Další typy nerovnic

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\; I_2 = (-8, 3)\,,\; I_3 = (3, \infty)$$

	-8		3
$x+8$	-	$+$	$+$
$x-3$	-	-	$+$
	$+$	-	$+$

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\ I_2 = (-8, 3)\,,\ I_3 = (3, \infty)$$

	-8		3
$x+8$	-	$+$	$+$
$x-3$	-	-	$+$
	$+$	-	$+$

$(-8, 3)$, tedy $K_2 = \langle -3, \infty) \cap (-8.3) = \langle -3, 3)$

Další typy nerovnic

Kořeny levé strany $x_1 = -8$ a $x_2 = 3$ rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8)\,,\ I_2 = (-8, 3)\,,\ I_3 = (3, \infty)$$

		-8		3	
$x+8$	-		$+$		$+$
$x-3$	-		-		$+$
	$+$		-		$+$

$(-8, 3)$, tedy $K_2 = \langle -3, \infty) \cap (-8.3) = \langle -3, 3)$

Sjednocením výsledků z bodu a) a bodu b) dostáváme závěr:

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -33, 3).$$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Příklad:
Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

Další typy nerovnic

Příklad:
Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3\left(\log_{0,5}(x)\right) > 2^0$$
$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

Další typy nerovnic

Příklad:
Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3\left(\log_{0,5}(x)\right) > 2^0$$
$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

Znaménko nerovnosti jsme neotáčeli, protože základ je větší než 1.
Pokračujeme v odlogaritmování:

Příklad:
Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3\left(\log_{0,5}(x)\right) > 2^0$$
$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

Znaménko nerovnosti jsme neotáčeli, protože základ je větší než 1.
Pokračujeme v odlogaritmování:

$$\log_{0,5} x > 3^1$$
$$\log_{0,5} x > 3$$

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

Další typy nerovnic

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$
$$x < 1/8$$

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$
\begin{aligned}
x &< (0,5)^3 \\
x &< 1/8
\end{aligned}
$$

Zbývá ověřit pro jaká x je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné.

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$
$$x < 1/8$$

Zbývá ověřit pro jaká x je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné. Tedy $x > 0$ navíc $\log_{0,5} x > 0$ a $\log_3 \left(\log_{0,5} x\right) > 0$.

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$
$$x < 1/8$$

Zbývá ověřit pro jaká x je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné. Tedy $x > 0$ navíc $\log_{0,5} x > 0$ a $\log_3 \left(\log_{0,5} x\right) > 0$.

Závěr: všechna x z intervalu $(0, 1/8)$ splňují nerovnici výše.