

4 Funkce

Nechť jsou dány množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f , který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

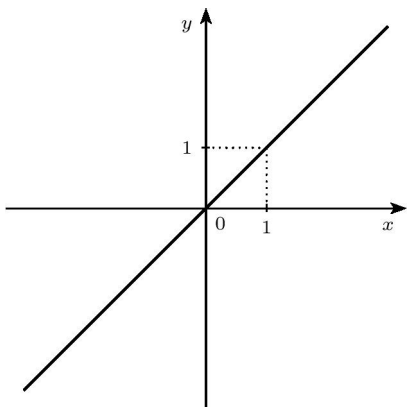
Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Jednoduše řečeno je tedy pro nás funkce pravidlo, které vybraným číslům přiřazuje nějaká čísla, ale nemůže se stát, že by jednomu číslu přiřadilo dva různé výsledky.

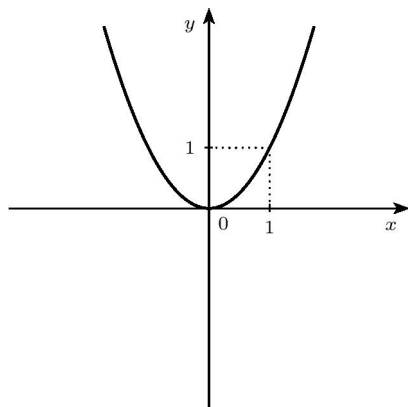
Již na střední škole se probírá mnoho příkladů funkcí:

- lineární funkce $y = ax + b$;
- kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$;
- lineární lomená funkce (nepřímá úměra) $y = \frac{k}{x}$, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- exponenciální funkce $y = a^x$ ($a > 0$), speciálně $y = e^x$, kde e je *Eulerovo číslo* ($e \approx 2,71828$);
- logaritmická funkce $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), speciálně pro $a = e$ máme přirozený logaritmus $y = \ln x$ a pro $a = 10$ dekadický logaritmus $y = \log x$.

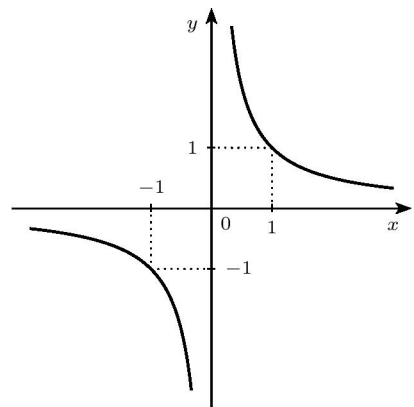
Kromě typického zadání můžeme funkce zadat také tabulkou hodnot nebo jejich grafickou reprezentací – grafem.



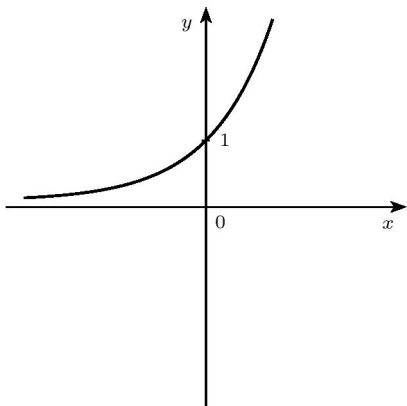
Přímka $y = x$



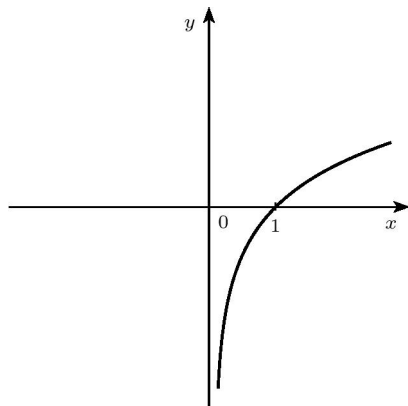
Parabola $y = x^2$



Hyperbola $y = \frac{1}{x}$



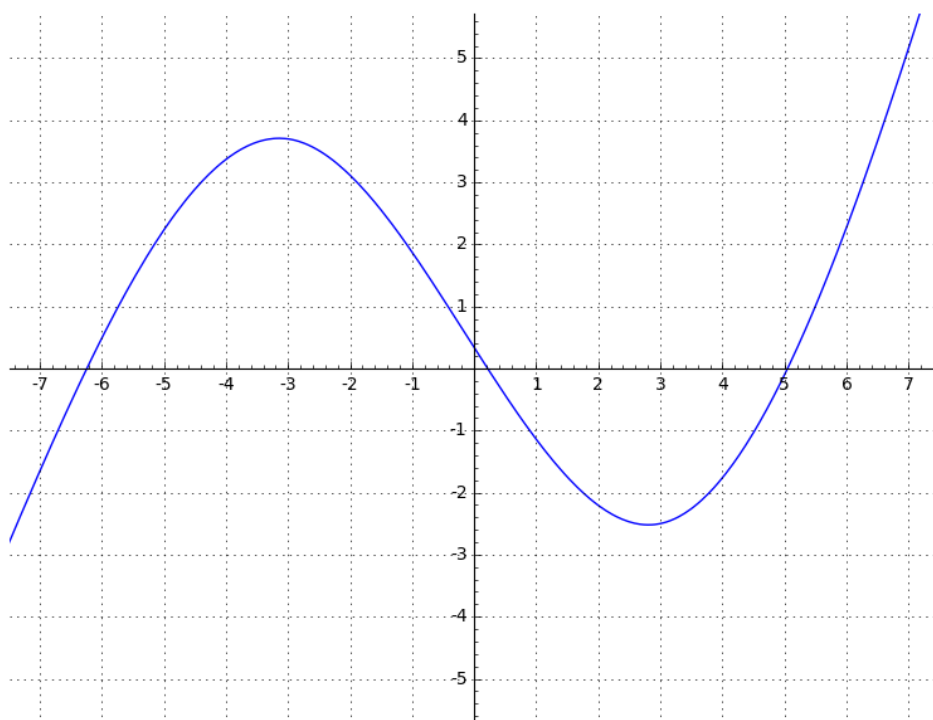
Exponenciála $y = e^x$



Logaritmická funkce $y = \ln x$

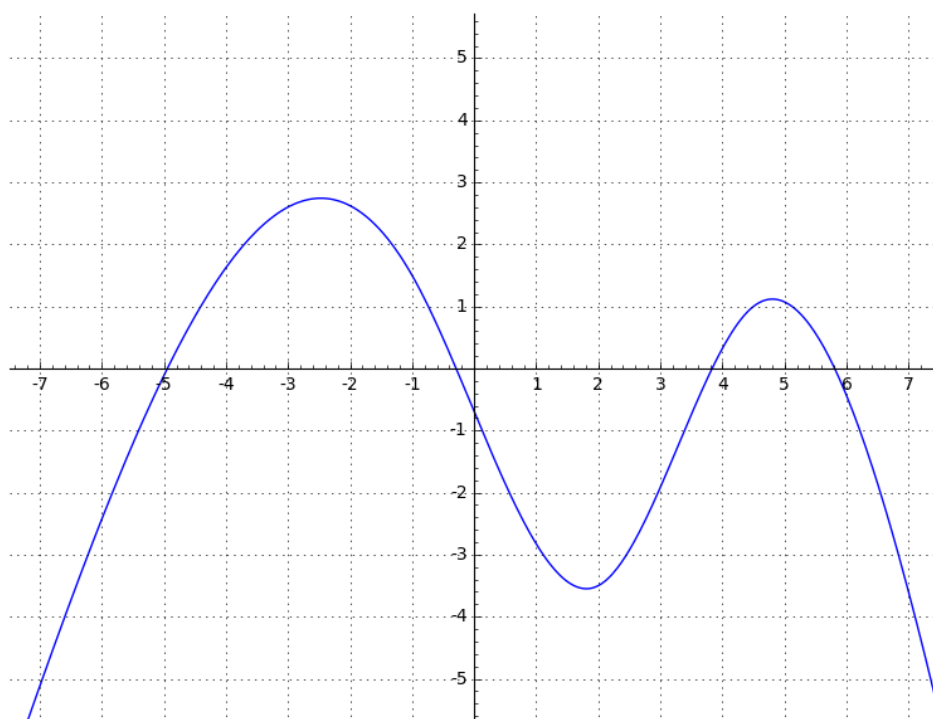
Křivka v rovině je grafem nějaké funkce proměnné x právě tehdy, když neexistuje žádná přímka rovnoběžná s osou y , která by protínala tuto křivku více než jednou.

Příklad 4.1. Na obrázku níže je graf funkce $f(x)$. Najděte celá čísla, která jsou nejbližše řešení rovnice $f(x) = 2$.



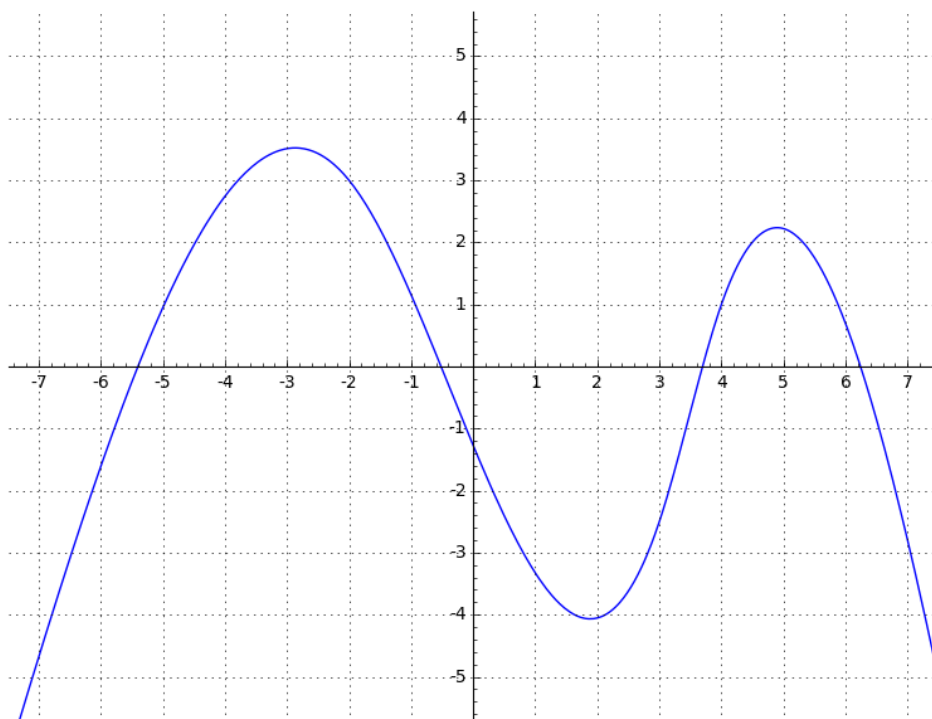
Příklad 4.2. Na obrázku níže je graf funkce $f(x)$. Určete, která z následujících rovnic má právě dvě kladná řešení:

$$f(x) = -3, \quad f(x) = -2, \quad f(x) = 0, \quad f(x) = 2, \quad f(x) = 3.$$

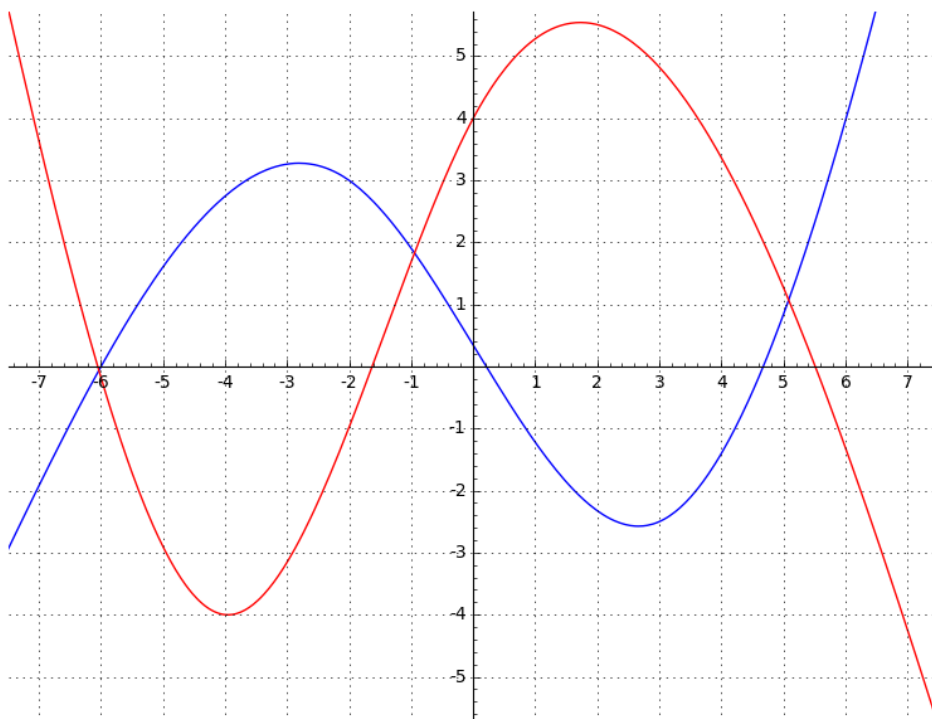


Příklad 4.3. Na obrázku níže je graf funkce $f(x)$. Určete, které z následujících intervalů jsou pod-
množinou řešení nerovnice $f(x) > 0$:

$$(-6, 7), \quad (-5, -1), \quad (4, 6), \quad (0, \infty), \quad (0, 4).$$



Příklad 4.4. Na obrázku níže jsou grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Najděte celá čísla, která jsou nejblíže
řešení rovnice $f(x) = g(x)$.



Známe-li graf nějaké funkce $f(x)$, můžeme snadno nakreslit i graf funkce složitější, základní pravidla vypadají takto:

1. Graf funkce $f(x) + p$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y .
2. Graf funkce $f(x + p)$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy x . Pro p kladné posunujeme doleva, pro p záporné doprava.
3. Graf funkce $-f(x)$ získáme tak, že část grafu funkce $f(x)$, která byla pod osou, symetricky zobrazíme nad osu x a část grafu funkce $f(x)$, která byla nad osou, symetricky zobrazíme pod osu.
4. Graf funkce $|f(x)|$ získáme tak, že část grafu funkce $f(x)$, která byla pod osou, symetricky zobrazíme nad osu x .

Příklad 4.5. Nakreslete grafy funkcí:

1. $y = 2x$

2. $y = -x - 1$

3. $y = (x - 1)^2$

4. $y = -(x + 1)^2$

5. $y = \frac{1}{x+1}$

6. $y = \frac{1}{x} - 1$

7. $y = \log(x - 2)$

8. $y = \log x + 1$

9. $y = 2^{x-2}$

10. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

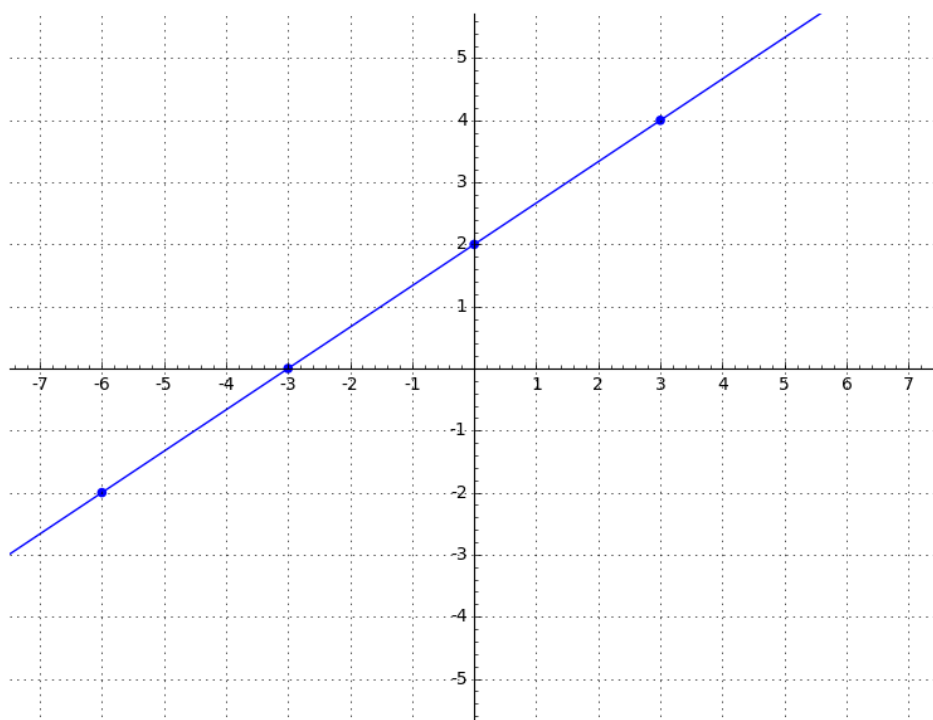
11. $y = 3 - 2^x$

12. $y = 3^x - 2$

13. $y = \sqrt{x+2}$

14. $y = \sqrt{x} + 1$

Příklad 4.6. Určete rovnici přímky z obrázku:



Příklad 4.7. Nakreslete oblast ohraničenou grafy funkcí

$$y = 3 - x^2, \quad y = 1 - x.$$

Určete průsečíky těchto grafů.

Příklad 4.8. Nakreslete oblast ohraničenou grafy funkcí

$$y = x^2 - 2x, \quad y = 4 - x^2.$$

Určete průsečíky těchto grafů.

Nechť $u: A \rightarrow B$ a $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce u se nazývá *vnitřní složkou*, funkce f *vnější složkou* složené funkce F .

Příklad 4.9. Určete vnější a vnitřní složku složené funkce:

$$\text{a) } f: y = \ln(x^2 + 1), \quad \text{b) } g: y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \text{c) } h: y = e^{2x+1}.$$

Příklad 4.10. U většiny majetku, jako jsou automobily, elektronika či nábytek, hodnota v průběhu let klesá – dochází k tzv. odepisování. Obvykle se předpokládá, že hodnota majetku klesá každý rok o pevně stanovené procento z jeho původní ceny. Uvažme například nákladní automobil s pořizovací cenou €20 000. Jeho hodnota se každý rok sníží o 10 % původní ceny. Napište funkci, která vyjadřuje hodnotu automobilu v závislosti na čase a nakreslete její graf.

Příklad 4.11. Firma vyrábí a prodává Q jednotek produkce. Cena P za jednu jednotku závisí na prodaném množství a je dána vztahem

$$P(Q) = 102 - 2Q.$$

Náklady C na výrobu a prodej Q jednotek jsou

$$C(Q) = 2Q + \frac{1}{2}Q^2.$$

Napište funkci popisující zisk firmy. O jakou funkci se jedná? Nakreslete graf funkce a určete množství Q , pro které je zisk maximální.