

1 Základní poznatky

1.1 Matematická logika

Slovníček aneb stručný přehled teorie

výrok – oznamovací věta, o které má smysl prohlásit, že je pravdivá (1) nebo nepravdivá (0);

hypotéza – výrok, jehož pravdivostní hodnotu neznáme, zatím neznáme nebo znát nemůžeme;

kvantifikovaný výrok – výrok, který obsahuje některý z kvantifikátorů;

kvantifikátor

- existenční – $\exists$ (existuje alespoň jeden), $\exists!$ (existuje právě jeden);
- obecný – $\forall$ (pro každý, pro žádný);
- obsahující konkrétní číselný údaj (právě n , alespoň n , nejvýše n);

negace – negace výroku V je výrok $\neg V$, který popírá pravdivostní hodnotu výroku V .

Pravidla pro negování výroků

výrok A	výrok $\neg A$
...je ...	...není ...
pro každé x platí $V(x)$	existuje alespoň jedno x , pro které $V(x)$ neplatí
existuje x , pro které platí $V(x)$	pro žádné x neplatí $V(x)$
alespoň n ...je ...	nejvýše $(n - 1)$...je
nejvýš n ...je ...	alespoň $(n + 1)$...je ...

Příklad 1.1. Negujte dané výroky.

- Nikdo nechybí.
- Některou tvoji radu využiji.
- Od události uplynulo nejvýše 10 let.
- Petr v utkání vstřelil právě 3 branky.

Složené výroky Jedná se o souvětí vytvořená spojením jednodušších výroků pomocí logických spojek.

Konjunkce – A a zároveň B ($A \wedge B$)

Disjunkce – A nebo B ($A \vee B$)

Implikace – Jestliže A , pak B ($A \Rightarrow B$)

Ekvivalence – A právě tehdy, když B ($A \Leftrightarrow B$)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0

V	$\neg V$
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$\neg A \Leftrightarrow B$ nebo $A \Leftrightarrow \neg B$

Tvrzení $P \Rightarrow Q$ znamená, že P je dostatečná podmínka pro Q a Q je nutná podmínka pro P .
Tvrzení $P \Rightarrow Q$ je navíc logicky ekvivalentní tvrzení $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Tvrzení $P \Leftrightarrow Q$ můžeme také číst, že P je nutná a zároveň dostatečná podmínka pro Q .

Příklad 1.2. Které z následujících tvrzení je ekvivalentní tvrzení: „Pokud inflace vzroste, pak nezaměstnanost klesne“?

- a) Aby nezaměstnanost klesla, musí inflace vzrůst.
- b) Dostatečnou podmínkou pro pokles nezaměstnanosti je růst inflace.
- c) Nezaměstnanost může klesnout pouze tehdy, když inflace vzroste.
- d) Pokud nezaměstnanost neklesne, pak inflace nevzroste.
- e) Nutnou podmínkou pro růst inflace je, aby nezaměstnanost klesla.

1.2 Množiny

Množina je soubor objektů, tzv. prvků množiny. Množiny zadáváme obvykle výčtem a nebo charakteristickou vlastností jejich prvků.

Základní a přitom vlastně jedinou vlastností množin je, že mají prvky. Skutečnost, že objekt x je prvkem množiny A (tzn. x patří do A), budeme zapisovat: $x \in A$. Skutečnost, že objekt x není prvkem množiny A (tzn. x nepatří do A), pak budeme zapisovat: $x \notin A$.

Typickými množinami jsou množiny označující číselné obory:

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel, tj. čísel která lze vyjádřit ve tvaru zlomku, kde číselník i jmenovatel jsou celá čísla, přičemž jmenovatel je různý od nuly

$\mathbb{R}$ – množina všech reálných čísel. Tato množina obsahuje všechna racionální čísla a pak čísla iracionální, která se nedají vyjádřit jako podíl celých čísel, jsou to například čísla

$$\sqrt{2}, \pi, e, \dots$$

Říkáme, že množina A je podmnožina množiny B a píšeme $A \subseteq B$, jestliže libovolný prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B . Vztah $\subseteq$ se nazývá množinová inkluze.

Množinové operace

$A \cup B$ – sjednocení množin A a B je množina, která obsahuje všechny prvky x takové, že x je prvkem alespoň jedné z množin A , B .

$A \cap B$ – průnik množin A a B je množina, která obsahuje všechny prvky x takové, že x je prvkem obou množin A , B současně.

$A \setminus B$ – rozdíl množin A a B je množina, která obsahuje všechny prvky x takové, že x je prvkem množiny A , ale není prvkem množiny B .

Kartézským součinem $A \times B$ množin A a B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Příklad 1.3. Uvažme množinu Ω všech pracujících v České republice. Nechť A značí množinu všech pracujících, kteří mají čistý roční příjem alespoň 350 000 Kč. Nechť B značí množinu všech, kteří mají majetek v hodnotě 1 000 000 Kč. Jaký je význam množin $A \cap B$, $A \cup B$ a $B \setminus A$?

1.3 Intervaly

Intervalem v běžném jazyce i v matematice označujeme spojitý úsek nebo rozmezí mezi dvěma hodnotami.

Omezený interval Mějme dána reálná čísla a, b , kde $a < b$. Omezeným intervalem od a do b rozumíme množinu všech reálných čísel, pro která platí jedna z následujících možností:

i) otevřený interval

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

ii) zleva uzavřený interval

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

iii) zprava uzavřený interval

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

iv) uzavřený interval

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

V anglicky psané literatuře (a často i ve vysokoškolské matematice) se místo závorek $\langle a \rangle$ používají hranaté závorky $[a]$.

Můžeme zavést i neomezené intervaly. Za tímto účelem zavedeme nové symboly $-\infty$ a $+\infty$ takové, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$.

Neomezený interval Mějme dáno libovolné reálné číslo a . Neomezeným intervalem rozumíme množinu všech reálných čísel x , pro která platí jedna z následujících možností:

i) $x \in \mathbb{R}, x < a$, značíme $(-\infty, a)$;

ii) $x \in \mathbb{R}, x \leq a$, značíme $(-\infty, a]$;

iii) $x \in \mathbb{R}, a < x$, značíme (a, ∞) ;

iv) $x \in \mathbb{R}, a \leq x$, značíme $[a, \infty)$.

Příklad 1.4. Z množiny A vyberte všechny prvky, které patří do intervalu I .

a) $A = \{-10; -2; 7,1; 8,\bar{3}; 11\}$, $I = (-2, 10)$;

b) $A = \{-5; -3; -1; 0,2; ; \pi\}$, $I = \langle -3, 3 \rangle$;

c) $A = \{-\sqrt{2}; -1; -\frac{3}{4}; 2; 4\}$, $I = \langle -2, 4 \rangle$.

Příklad 1.5. Zanešte intervaly na číselnou osu a zapište jejich průnik a sjednocení.

a) $\langle -3; 4 \rangle$, $\langle 0; 6 \rangle$;

b) $(-2; \infty)$, $(-4; 0)$;

c) $\langle -5; 3 \rangle$, $\langle 3; 5 \rangle$;

d) $\langle -2; 7 \rangle$, $(7; \infty)$.