

2 Výrazy

Zlomky Připomeňme některá základní pravidla pro počítání se zlomky. Necht' $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, potom platí

$$\begin{aligned}\frac{a \cdot d}{b \cdot d} &= \frac{a}{b}, & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad (c \neq 0).\end{aligned}$$

Příklad 2.1. Vypočítejte

$$\begin{array}{ll}\text{a)} & \frac{3}{5} + \frac{1}{6}, \\ \text{b)} & \frac{13}{3} + \frac{15}{4}, \\ \text{c)} & \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4}, \\ \text{d)} & \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}, \\ \text{e)} & \frac{\frac{15}{6}}{\frac{3}{4}}, \\ \text{f)} & \frac{3}{8} : \frac{6}{14}.\end{array}$$

Mocniny Pro všechna reálná čísla a, b a přirozená n, m platí

$$\begin{aligned}a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m\end{aligned}$$

Jsou-li a a b kladná, dají se předchozí vztahy rozšířit pro reálná m a n . Navíc si připomeňme, že pro $a \neq 0$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

a pro $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ můžeme vždy psát

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

přičemž n -tou odmocninou ($n \in \mathbb{N}$) z nezáporného čísla a rozumíme takové nezáporné číslo x , pro které platí

$$x^n = a.$$

Píšeme $x = \sqrt[n]{a}$ a tedy platí

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Při úpravách můžeme často také využít vztahů

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b)\end{aligned}$$

Příklad 2.2. Vypočítejte

$$\begin{array}{ll}\text{a)} & (2^2)^3, \\ \text{b)} & \frac{8^3}{4^3}, \\ \text{c)} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2, \\ \text{d)} & \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right), \\ \text{e)} & \sqrt{16+9}, \\ \text{f)} & \sqrt{16} + \sqrt{9}.\end{array}$$

Příklad 2.3. Zjednodušte

$$\begin{array}{ll}\text{a)} & \sqrt{8}, \\ \text{b)} & \sqrt{50}, \\ \text{c)} & \sqrt[3]{24}, \\ \text{d)} & \sqrt[5]{64}.\end{array}$$

Příklad 2.4. Pomocí vytýkání/krácení upravte následující výrazy (určete podmínky).

a) $2x^2 - 4x + 8$,

b) $x^2\sqrt{2} - 2x$,

c) $3x^3 - x^2$,

d) $\frac{x^3+x^2}{(2x-1)(x+1)}$,

e) $\frac{2x+6}{x^2-9}$,

f) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$.

Příklad 2.5. Upravte výrazy, případně určete podmínky.

a) $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$,

b) $\frac{4-4a+a^2}{a^2-4}$,

c) $\frac{2+a}{a^2b} + \frac{1-b}{ab^2} - \frac{2b}{a^2b^2}$,

d) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$,

e) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 3$,

f) $\frac{\frac{10x^2}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$.

Příklad 2.6. Z daných výrazů vyjádřete určenou proměnnou.

a) $q = 0,15p + 0,14$, $p = ?$;

b) $S = \alpha + \beta P$, $P = ?$;

c) $\alpha x - a = \beta x - b$, $x = ?$;

d) $AL^\alpha L^\beta = Y_0$, $L = ?$;

e) $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 2$, $r = ?$.

Pro to, abychom mohli například z posledního příkladu vyjádřit proměnnou t , musíme zavést logaritmus.

Logaritmus Jednoduše řečeno je logaritmus exponent, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo. Píšeme $\log_a b = c$. Platí vztah

$$a^c = b \iff c = \log_a b.$$

Pro číslo a , tzv. základ logaritmu, platí $a > 0$, $a \neq 1$. Pro b , argument logaritmu, pak platí $b > 0$. Například jelikož $3^2 = 9$, tak $\log_3 9 = 2$.

Speciálně je-li základ logaritmu číslo 10, tak píšeme místo $\log_{10} x$ jen $\log x$ a mluvíme o dekadickém logaritmu. Je-li základem Eulerovo číslo, pak místo $\log_e x$ píšeme jen $\ln x$ a mluvíme o přirozeném logaritmu. Máme tak například

$$\log 0,1 = -1, \quad \log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \text{ atd.}$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1.$$

Pro počítání s logaritmy platí například tato pravidla:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

pro všechna $x, y > 0$ a $n \in \mathbb{R}$.