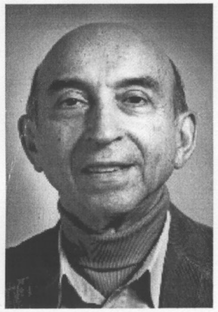
I. FUZZY MNOŽINY A LOGIKA



Lotfi A. Zadeh

Lotfi A. Zadeh, nar. 1921 v Baku (Ázerbajdžán, býv. SSSR). Vystudoval střední školu Alborz International High School v Teheránu (Írán) v r. 1938. Získal B.S. na University of Teheran v r. 1942, M.S. v r. 1946 na Massachusetts Institute of Technology, Ph.D. v r. 1949 na Columbia University (USA). Pracoval na Columbia University a University of California-Berkeley. Od r. 1990 ředitelem Berkeley Initiative on Soft Computing (BISC) na University of California.

1. Motivace zavedení fuzzy množin

Velmi dlouho převládal pocit, že klasická logika je příliš omezený rámec pro modelování všech stránek lidského usuzování. Obdobně začal být v moderní době zpochybňován jedinečný význam teorie pravděpodobnosti jako modelu pro zachycení nejistoty, přibližnosti a vágnosti. Zejména ve 20. století existuje mnoho pokusů o rozšíření reprezentačních schopností logiky. Jeden z nejradikálnějších a nejúspěšnějších pokusů byl iniciován Lotfi Zadehem v roce 1965 jeho článkem *Fuzzy Sets (Zadeh L. A.: Fuzzy Sets. Information and Control, Vol. 8, No. 3, June, 1965, str. 338-353).*

Základem Zadehova přístupu je idea graduálního náležení do množiny, což vedlo k rozvoji graduální logiky a jednoduchého efektivního kalkulu pro nejistotu, zvaného *teorie možnosti* (posibilistická teorie na rozdíl od probabilistické), který zpracovává pojmy *možnosti, jistoty* a *nezbytnosti* graduálně (stupňovitě).

Fuzzy množiny (neostré množiny) spolu s teorií možnosti nabízejí rámec pro zpracování predikátů, jejichž míra pravdivosti je dána ve stupních ("pravdivý do určitého stupně") a nejistota je vyjadřována rovněž stupňovitě.

2. Některé mezníky na cestě k fuzzy množinám

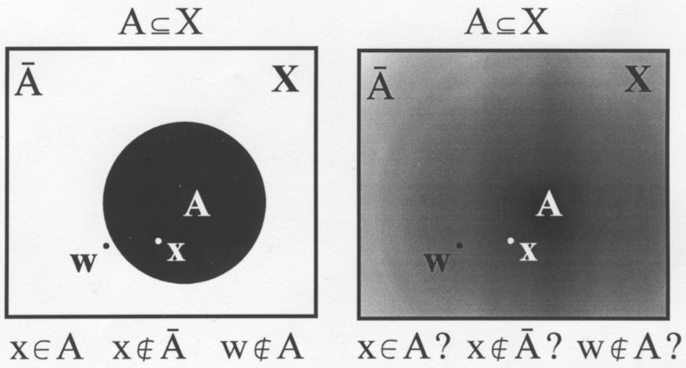
- Charles Peirce (americký filosof) upozornil před cca před 100 lety na skutečnost, že logici zanedbávají studium vágnosti, neboť neočekávají, že by mohla hrát v matematice důležitou roli.
- Bertrand Russel se obdobně vyjádřil v r. 1923.
- Jan Łukasiewicz založil směr, zabývající se vícehodnotovou logikou v 30. letech.
- Max Black (americký filosof) jako první navrhl r. 1937 tzv. *profily konsistence* (předchůdce fuzzy množin) pomocí nichž bylo možné charakterizovat vágní symboly.
- H. Weyl r. 1940 a A. Kaplan a H. F. Schott r. 1951 navrhli kalkuly pro vágní predikáty, včetně základních operátorů (logických spojek).
- L. Zadeh použil termín *fuzzy množiny* v r. 1965.

3. O čem jsou fuzzy množiny a fuzzy logika

Fuzzy logika se primárně zabývá kvantifikováním a usuzováním pomocí přirozeného jazyka, v němž má mnoho slov nejednoznačný význam (vysoký, horký, nebezpečný, trochu, velmi mnoho...). Fuzzy logika vznikla rozšířením základní teorie fuzzy množin. Od doby svého vzniku zaznamenala teorie fuzzy množin a fuzzy logiky značné rozšíření do přibližně 450 aplikačních oblastí, mj.:

- Řídicí algoritmy
- Lékařská diagnostika
- Rozhodování
- Ekonomika
- Inženýrství
- Prostředí
- Literatura
- Operační výzkum
- Rozpoznávání vzorů
- Psychologie
- Spolehlivost
- Bezpečnost
- Věda
- Expertní systémy

Koncept fuzzy množin se zabývá reprezentací tříd, jejichž hranice nejsou jasně (ostře) stanoveny:



Při absenci ostré hranice oddělující množinu od okolí vzniká problém jednoznačného stanovení příslušnosti prvku do množiny a do jejího doplňku. U klasických množin lze určit, zda prvek x patří či nepatří do množiny A naprosto jednoznačně pomocí tzv. charakteristické funkce:

$$\mu_A(x): \quad X \to \{0,\ 1\}, \quad x \in X, \quad A \subseteq X \tag{1}$$

Charakteristická funkce mapuje prvky universa do dvouprvkové množiny, přičemž dle konvence funkční hodnota $\mu(x)=0$ znamená, že $x \notin X$ a $\mu(x)=1$ znamená, že $x \in X$.

Pro fuzzy množiny je funkce náležení definována jinak:

Definice 1 (fuzzy množina): Nechť X je neprázdná množina. Fuzzy množina A na X je charakterizována následující funkcí příslušnosti (funkcí náležení):

$$\mu_A(x): \quad X \to [0,\ 1], \quad x \in X, \quad A \subseteq X \tag{2}$$

Funkce $0.0 \le \mu_A(x) \le 1.0$ je interpretována jako stupeň náležení elementu x do fuzzy množiny A pro každé $x \in X$. Mapování universa X je zde do (konvencí daného) *reálného jednotkového spojitého intervalu*.

Je zřejmé, že A je zcela určena množinou dvojic:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \tag{3}$$

Často se místo $\mu_A(x)$ používá také značení *A(x)*, *Ax*.

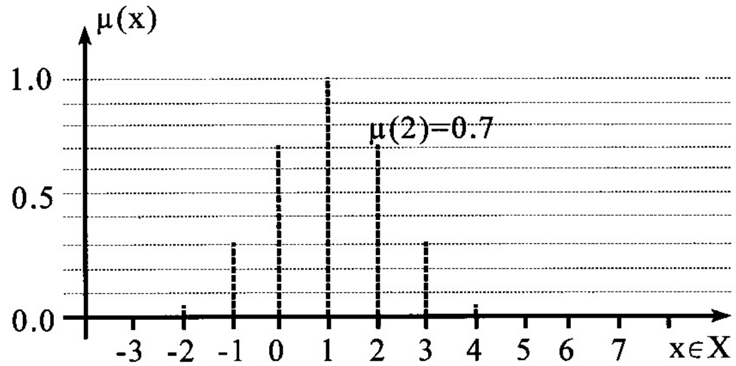
Je-li $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konečná množina a A je fuzzy množina na X, pak se používá zápisu:

$$A = \mu_1(x_1)/x_1 + \mu_2(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_n(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i)/x_i \tag{4}$$

kde výraz $\mu_i(x_i)/x_i$, i=1, 2, . . . , n, znamená, že $\mu_i(x_i)$ je stupeň náležení x_i do A. Operátor "+" zde reprezentuje *sjednocení* (nikoliv součet!); obdobně symbol "/" neznamená dělení, pouze spojuje konkrétní bod s jeho stupněm příslušnosti.

Příklad: Předpokládejme, že chceme definovat množinu celých čísel charakterizovanou pojmem přirozené řeči "blízký k jedné". Možný způsob definice je např.:

$$\begin{aligned} A(x) = {} & 0.0/-3 + 0.05/-2 + 0.3/-1 + 0.7/0 + \\ & 1.0/1 + 0.7/2 + 0.3/3 + 0.05/4 + 0.0/5 \end{aligned} \tag{5}$$

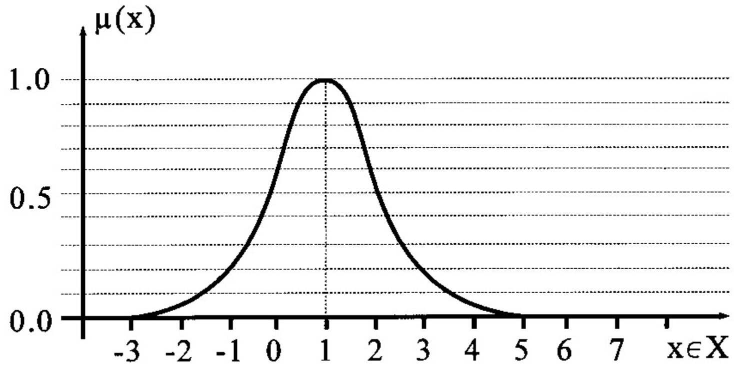


Diskrétní funkce příslušnosti pro "x je blízké 1"

Příklad: Předpokládejme, že chceme definovat množinu reálných čísel charakterizovanou pojmem přirozené řeči "blízký k jedné". Možný způsob definice je např.:

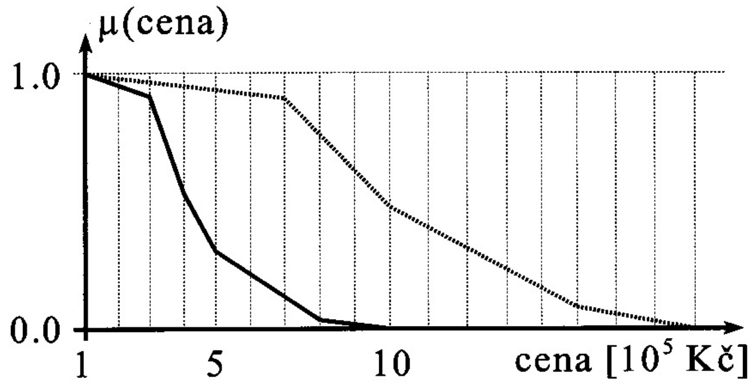
$$A(x) = e^{-\beta(x-1)^2} \qquad \textbf{(6)}$$

kde β je kladné reálné číslo.



Spojitá funkce příslušnosti pro "*x* je blízké 1"

Příklad: Předpokládejme, že někdo chce koupit levné auto. "Levný" lze reprezentovat jako fuzzy množinu na universu cen a konkrétní tvar záleží na obsahu peněženky, viz následující obrázek:

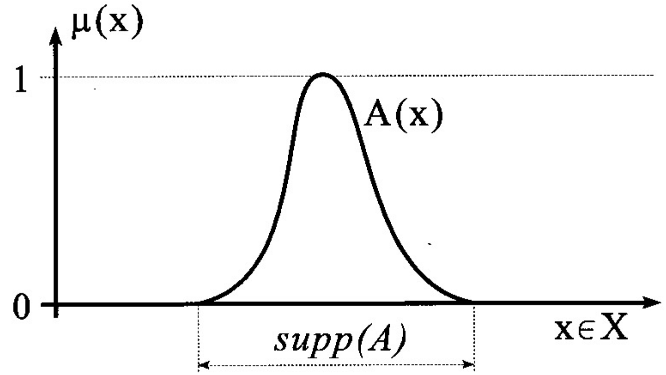


Funkce příslušností definující hodnoty "levný automobil"

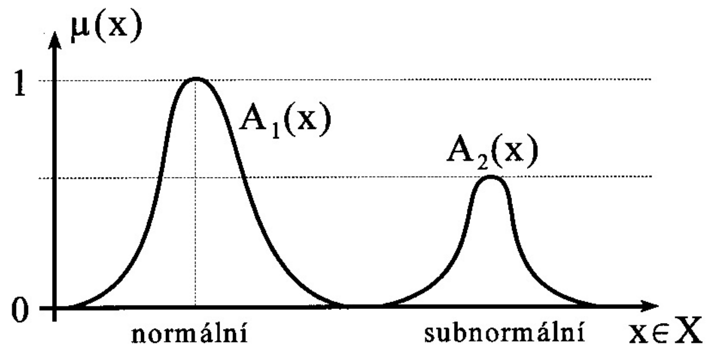
4. Další základní pojmy

Definice 2 (suport): Nechť A je fuzzy množina, $A \subseteq X$; suport A, označovaný jako $supp(A)$, je ostrá (nefuzzy) množina na X taková, jejíž prvky mají nenulový stupeň příslušnosti do A:

$$supp(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\} \qquad \textbf{(7)}$$

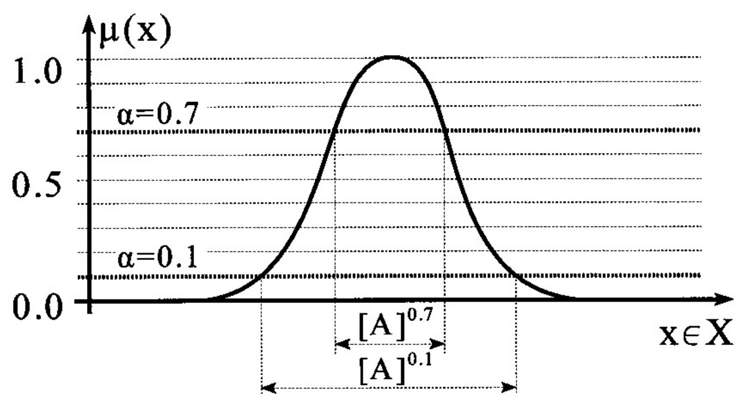


Definice 3 (normální fuzzy množina): Fuzzy množina $A \subseteq X$ se nazývá *normální* existuje-li alespoň jeden bod $x \in X$ takový, že $A(x)=1$, jinak je fuzzy množina *subnormální*:

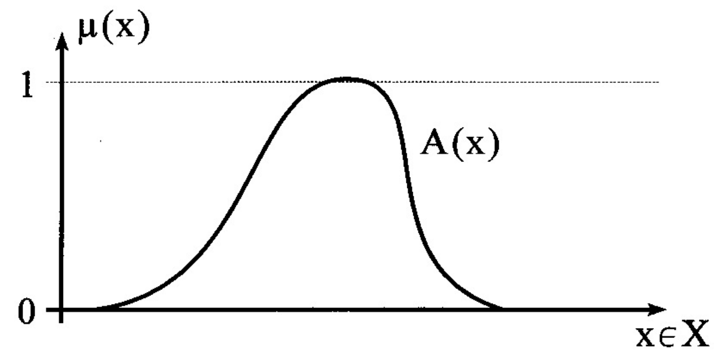


Defininice 4 (α-řez): α-řez fuzzy množiny $A \subseteq X$ je ostrá množina označená jako $[A]^{\alpha}$ a definovaná následovně:

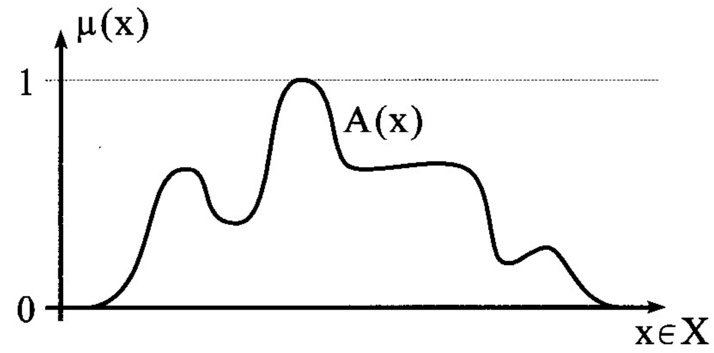
$$[A]^{\alpha} = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\} \tag{8}$$



Definice 5 (konvexní fuzzy množina): $A \subseteq X$ se nazývá *konvexní* jestliže $[A]^{\alpha}$ je konvexní podmnožina universa X $\forall \alpha \in [0, 1]$.

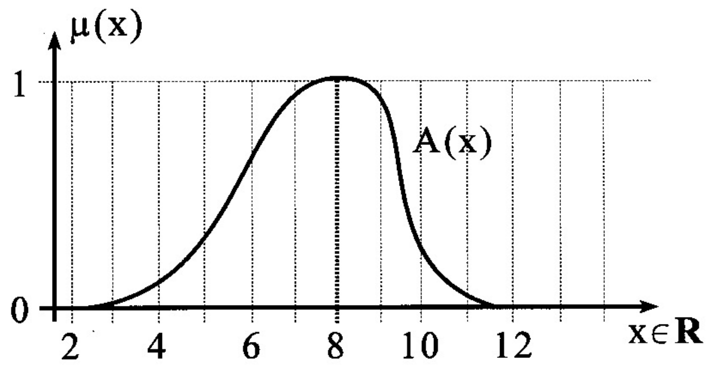


Konvexní fuzzy množina *A*



Nekonvexní fuzzy množina *A*

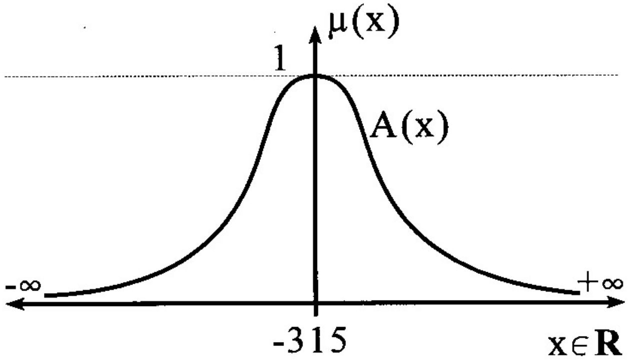
Definice 6 (fuzzy číslo): Fuzzy číslo *A* je fuzzy množina na reálné ose **R** mající normální, fuzzy konvexní a spojitou funkci příslušnosti s ohraničeným suportem.



Fuzzy číslo “přibližně osm”

Definice 7 (kvazi fuzzy číslo): Kvazi fuzzy číslo A je fuzzy množina na reálné ose **R** mající normální, fuzzy konvexní a spojitou funkci příslušnosti, která splňuje následující limitní podmínky:

$$\lim_{x \to \infty} A(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} A(x) = 0 \tag{9}$$

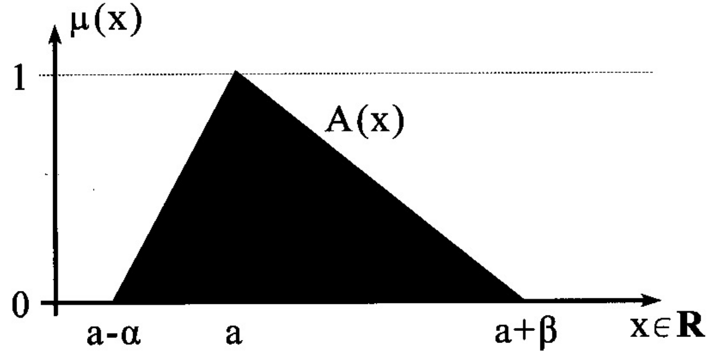


Kvazi fuzzy číslo “okolo -315”

Fuzzy čísla mohou pomoci modelovat situace, kdy jsou lidé schopni charakterizovat numerickou informaci pouze přibližně, např. “okolo 5000”, “blízko nuly”, “podstatně více než 10 000”, apod. Uvedené příklady jsou *fuzzy čísla*. Pomocí teorie fuzzy množin lze tato fuzzy čísla (neostrá čísla) reprezentovat fuzzy podmnožinami universa reálných čísel.

Definice 8 (triangulární fuzzy číslo): Fuzzy množina A se nazývá *triangulární (trojúhelníkové) fuzzy číslo* se středem (vrcholem) a, levou šířkou $\alpha>0$ a pravou šířkou $\beta>0$, má-li její funkce příslušnosti následující formu:

$$A(x) = \begin{cases} 1-(a-x)/\alpha & \text{pro } a-\alpha \le x \le a \\ 1-(x-a)/\beta & \text{pro } a \le x \le a+\beta \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases} \tag{10}$$



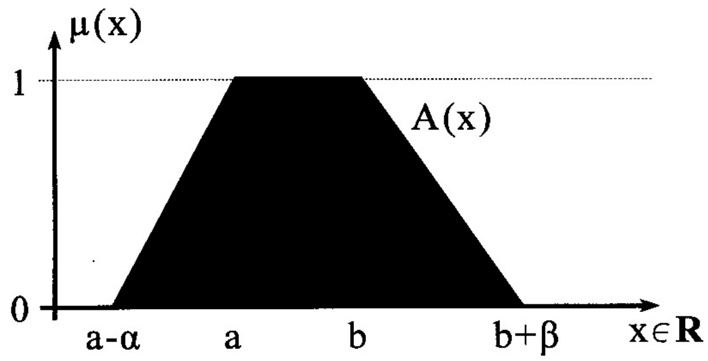
Triangulární fuzzy číslo se středem v a, jež lze interpretovat jako fuzzy kvantitu “x je přibližně rovno a”

Pro zápis triangulárního fuzzy čísla se pužívá notace $A=(a, \alpha, \beta)$; $supp(A)=(a-\alpha, a+\beta)$.

Definice 9 (trapezoidální fuzzy číslo): Fuzzy množina A se nazývá *trapezoidální (lichoběžníkové) fuzzy číslo* s tolerančním intervalem $[a, b]$, levou šířkou α a pravou šířkou β, má-li její funkce příslušnosti následující formu:

$$A(x) = \begin{cases} 1-(a-x)/\alpha & \text{pro } a-\alpha \le x \le a \\ 1 & \text{pro } a \le x \le b \\ 1-(x-a)/\beta & \text{pro } a \le x \le a+\beta \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases} \quad \textbf{(11)}$$

Pro zápis trapezoidálního fuzzy čísla se pužívá notace $A=(a, b, \alpha, \beta)$; *supp(A)*$=(a-\alpha, b+\beta)$.



Trapezoidální fuzzy číslo, jež lze interpretovat jako fuzzy kvantitu "*x* je přibližně v intervalu [*a, b*]"

Definice 10 (LR-reprezentace fuzzy čísel): Každé fuzzy číslo A lze zapsat pomocí L a R funkcí:

$$A(x) = \begin{cases} L((a-x)/\alpha) & \text{pro } x \in [a-\alpha, a] \\ 1 & \text{pro } x \in [a,b] \\ R((x-b)/\beta) & \text{pro } x \in [b, b+\beta] \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases} \quad \textbf{(12)}$$

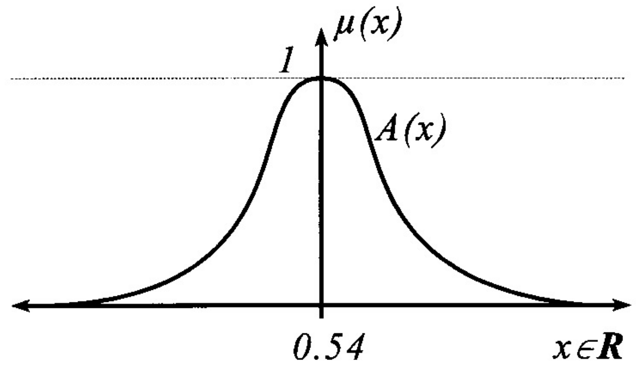
kde $[a, b]$ je *vrchol* neboli *jádro* fuzzy množiny A, a funkce L a R jsou určeny takto:

$$L\colon\ [0, 1] \to [0, 1], \qquad R\colon\ [0, 1] \to [0, 1] \quad \textbf{(13)}$$

přičemž jsou to funkce spojité a nevzrůstající; $L(0)=R(0)=1$ a $L(1)=R(1)=0$. Tento fuzzy interval je tzv. LR-typu:

$$A = (a, b, \alpha, \beta)_{LR} \quad \textbf{(14)}$$

Suport *supp(A)*$=(a-\alpha, b+\beta)$.



Fuzzy číslo "přibližně 0.54" typu LR definované pomocí nelineárních referenčních funkcí L a R

Definice 11 (kvazi fuzzy číslo typu LR): Každé kvazi fuzzy číslo A lze zapsat pomocí L a R funkcí:

$$A(x) = \begin{cases} L((a-x)/\alpha) & \text{pro } x \le a \\ 1 & \text{pro } x \in [a,b] \\ R((x-b)/\beta) & \text{pro } x \ge b \end{cases} \quad \textbf{(15)}$$

kde $[a, b]$ je *vrchol* neboli *jádro* fuzzy množiny A, a funkce L a R jsou určeny takto:

$$L:\ [0,\infty] \to [0,1], \qquad R:\ [0,\infty] \to [0,1] \qquad \textbf{(16)}$$

přičemž jsou to funkce spojité a nevzrůstající; $L(0)=R(0)=1$ a pro $L(1)$ a $R(1)$ platí:

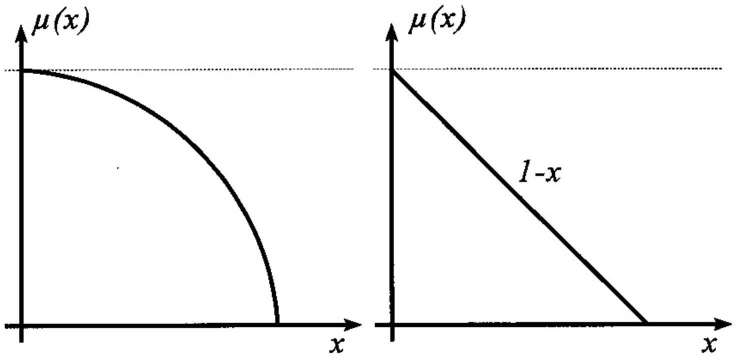
$$\lim_{x\to\infty} L(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} R(x) = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

Nechť $A=(a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ je fuzzy číslo typu LR. Jestliže $a=b$, pak se užívá zápisu:

$$A = (a,\alpha,\beta)_{LR} \qquad \textbf{(18)}$$

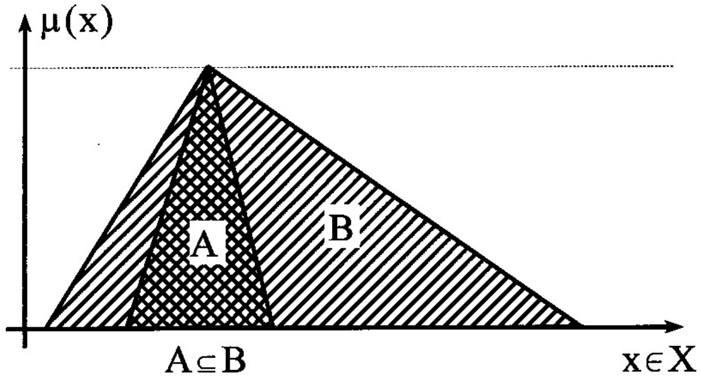
a o takovém čísle se říká, že je to kvazi-triangulární fuzzy číslo.

Platí-li $L(x)=R(x)=1-x$ pak se místo $A=(a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ píše jednoduše $A=(a, b, \alpha, \beta)$.



Nelineární a lineární referenční funkce (příklad)

Definice 12 (podmnožina): Nechť A a B jsou fuzzy podmnožiny klasické množiny X. Fuzzy množina A je podmnožinou fuzzy množiny B, pokud platí $A(x) \le B(x)$, $\forall x \in X$.



A je podmnožinou B, $A \subseteq B$

Definice 13 (rovnost fuzzy množin): Nechť $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ jsou fuzzy množiny na klasickém universu X. A a B jsou si rovny, tj. $A=B$, pokud platí $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$. Lze psát, že $A=B$ pouze tehdy, jestliže $A(x)=B(x)$, $\forall\, x \in X$.

Příklad: Nechť A a B jsou fuzzy podmnožiny množiny $X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Dále nechť platí:

$$A=0.0/{-2} + 0.3/{-1} + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4$$
$$B=0.1/{-2} + 0.3/{-1} + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.2/4$$

Je zřejmé, že platí $A \subset B$.

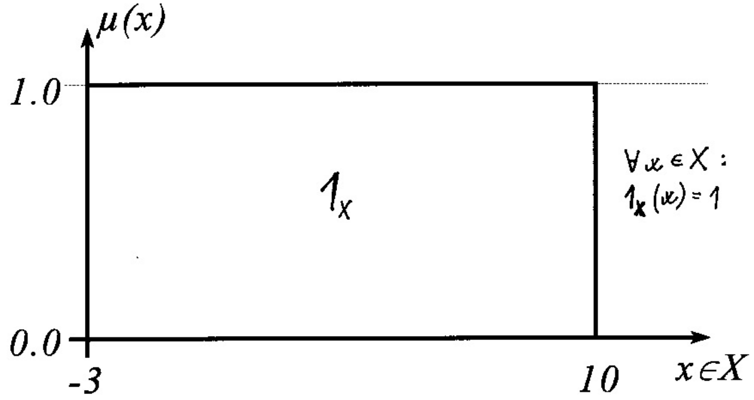
Definice 14 (prázdná fuzzy množina): Prázdná fuzzy podmnožina ostré množiny X je definována jako fuzzy podmnožina $\emptyset \subseteq X$ taková, že platí $\emptyset(x)=0$, $\forall x \in X$.

Je zřejmé, že $\emptyset \subseteq A$ platí pro jakoukoliv podmnožinu $A \subseteq X$.

Definice 15 (universální fuzzy množina): Největší fuzzy množina na X, zvaná *universální fuzzy množina na X* a značená jako 1_X, je definována pomocí vztahu:

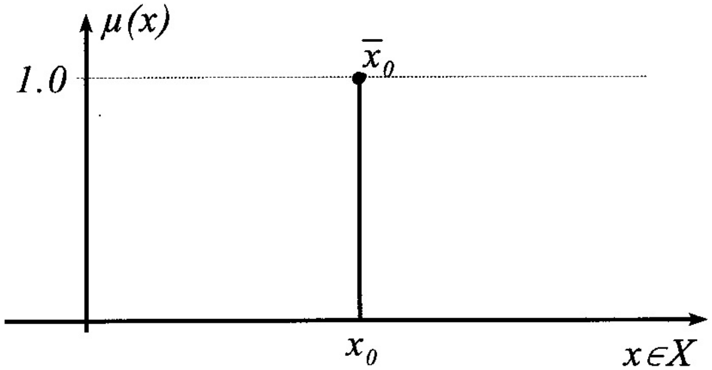
$$1_X(x) = 1, \quad \forall x \in X \qquad \textbf{(19)}$$

Lze snadno vidět, že vztah $A \subset 1_X$ platí pro libovolnou (fuzzy) podmnožinu $A \subseteq X$.



Universální fuzzy množina na universu X=[-3, 10]

Definice 16 (fuzzy bod): Nechť A je fuzzy číslo. Jestliže $supp(A)=\{x_0\}$ pak A se nazývá *fuzzy bod* a používá se notace $A=\bar{x}_0$.



Fuzzy bod (jednoprvková fuzzy množina; singleton)

5. Operace nad fuzzy množinami

Následující operace nad fuzzy množinami tvoří rozšíření operací nad klasickými množinami. Důležité je, že všechny tyto operace nad fuzzy množinami se redukují na své obvyklé významy, pokud se přejde k charakteristické funkci nabývající hodnot z $\{0, 1\}$. Z tohoto důvodu je používána pro fuzzy operace stejná symbolika jako v klasické teorii množin.

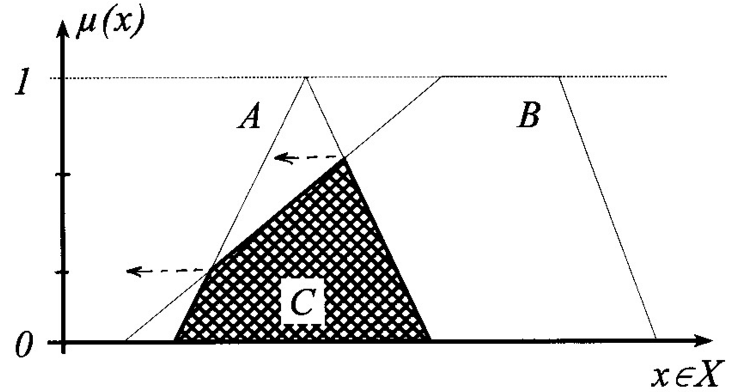
V následujícím se předpokládá, že A, B, C jsou neprázdné fuzzy množiny definované na ostré universální množině X.

Definice 17 (průnik fuzzy množin): Průnik fuzy množin A a B je definován jako fuzzy množina $C(x)$:

$$C(x) = (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x), \quad \forall x \in X \qquad \textbf{(20)}$$

Příklad: Nechť X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}.

A=0.6/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.4/4
B=0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.2/4
$A \cap B$=0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.2/4



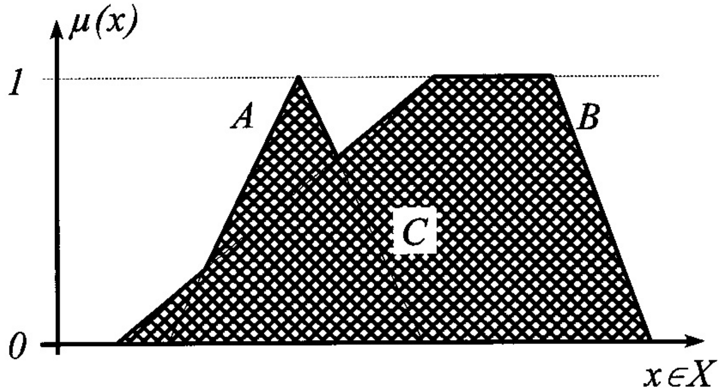
Průnik dvou fuzzy množin

Definice 18 (sjednocení fuzzy množin): Sjednocení fuzy množin A a B je definováno jako fuzzy množina $C(x)$:

$$C(x) = (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x), \quad \forall x \in X \qquad \textbf{(21)}$$

Příklad: Nechť X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}.

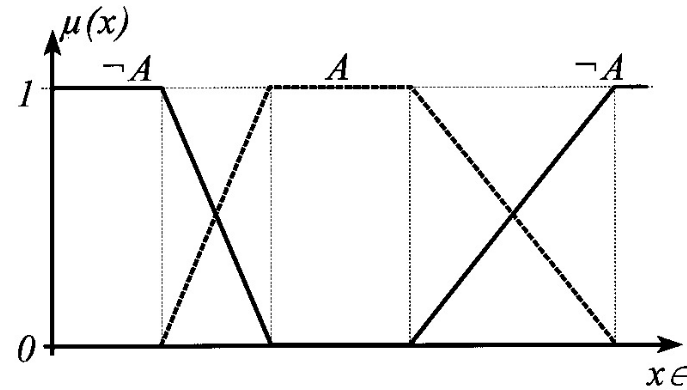
A=0.6/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.4/4
B=0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.2/4
$A \cup B$=0.6/-2 + 0.3/-1 + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.4/4



Sjednocení fuzzy množin

Definice 19 (doplněk): Doplněk fuzzy množiny A je definován jako:

$$C(x) = (\neg A)(x) = 1 - A(x), \quad \forall x \in X \qquad \textbf{(22)}$$



Komplement fuzzy množiny A

V klasické teorii množin platí následující dvě pravidla (A v následujícím vztahu představuje klasickou množinu):

$$\begin{aligned} A \vee \neg A &= X \qquad \text{(pravidlo vyloučeného třetího)} \\ A \wedge \neg A &= \varnothing \qquad \text{(pravidlo kontradikce)} \end{aligned} \qquad \textbf{(23)}$$

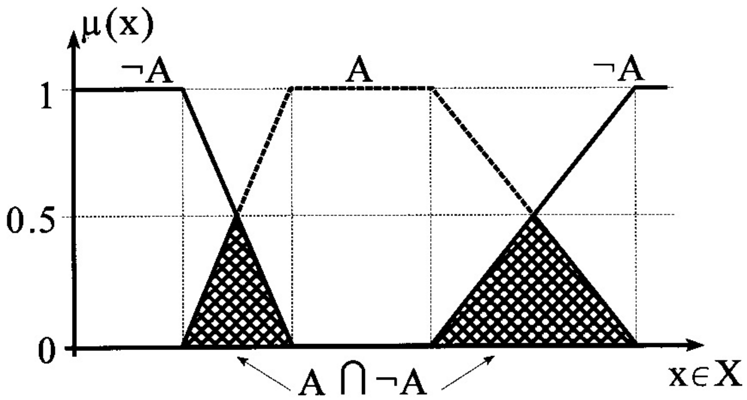
Je zřejmé, že $\neg 1_X = \varnothing$ a $\neg\varnothing = 1_X$, avšak obě pravidla ze vztahu **(23)** ***nejsou pro fuzzy množiny splněna***.

Lemma 1 (pravidlo vyloučeného třetího neplatí): Nechť $A(x)$=0.5, $\forall x \in \mathbf{R}$; je zřejmé, že

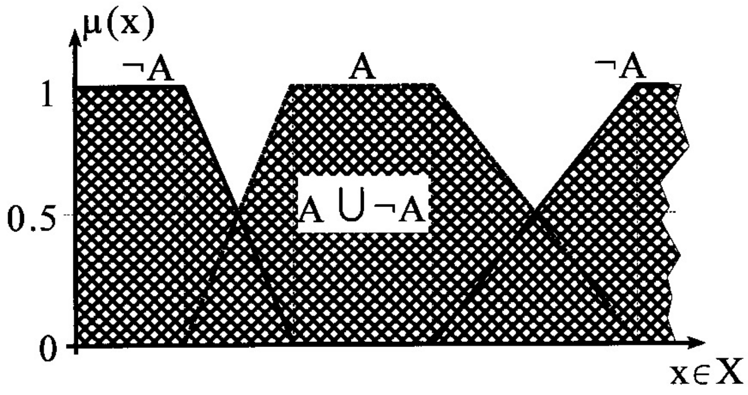
$$(\neg A \vee A)(x) = \max\{\neg A(x), A(x)\} = \max\{1-0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 1 \qquad \textbf{(24)}$$

Lemma 2 (pravidlo kontradikce neplatí): Nechť $A(x)$=0.5, $\forall x \in \mathbf{R}$; je zřejmé, že

$$(\neg A \wedge A)(x) = \min\{\neg A(x), A(x)\} = \min\{1-0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 0 \qquad \textbf{(25)}$$



Průnik fuzzy množiny *A* se svým doplňkem ¬*A*



Sjednocení fuzzy množiny *A* se svým doplňkem ¬*A*

Definice 20 (rovnost fuzzy množin): Fuzzy množiny *A* a *B* jsou si rovny, právě když platí:

$$A(x) = B(x), \quad \forall x \in X \qquad \textbf{(26)}$$

Rozdíl fuzzy množin

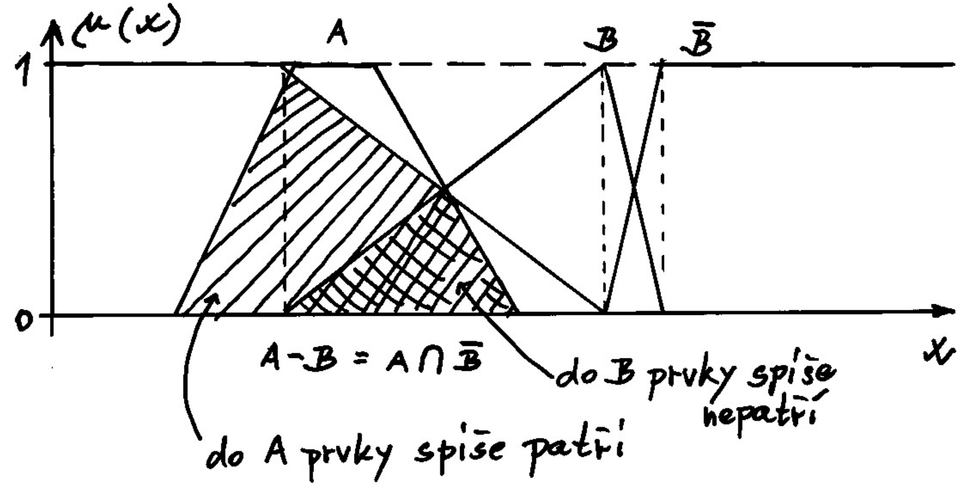
$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_B(x)) =$$

$$= \min\left[\mu_A(x),\ 1 - \mu_B(x)\right]$$

Interpretace

Operace rozdílu má za výsledek fuzzy množinu, jejíž prvky více-méně patří do A a nepatří do B.



Souhrn nejdůležitějších vlastností fuzzy množin ($A, B, C \subseteq X$):

komutativnost: **(27)**

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

asociativnost: **(28)**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

idempotence: **(29)**

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$$

(pozn.: "idem" je latinsky "tentýž")

distributivnost: **(30)**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

absorpce: **(31)**

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

de Morganova pravidla: **(32)**

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B, \qquad \neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

involuce: **(33)**

$$\neg(\neg A) = A$$

rozdíl: **(34)**

$$A - B = A \cap \neg B$$

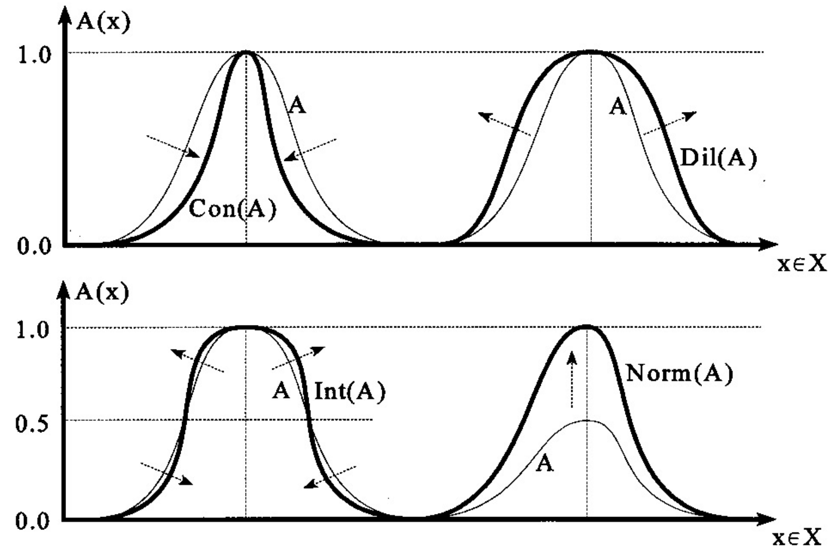
Některé další občas používané operace:

koncentrace: $\mathrm{Con}(A(x)) = (A(x))^2$

dilatace: $\mathrm{Dil}(A(x)) = (A(x))^{0.5}$

intenzifikace: $\mathrm{Int}(A(x)) = \begin{cases} 2(A(x))^2 & \text{pro } 0.0 \le A(x) \le 0.5 \\ 1-2(1-A(x))^2 & \text{pro } 0.5 < A(x) \le 1.0 \end{cases}$

normalizace: $\mathrm{Norm}(A(x)) = \dfrac{A(x)}{\max(A(x))}$



6. Fuzzy relace

Definice 21 (fuzzy relace): Nechť X a Y jsou neprázdné množiny. *Fuzzy relace* R je fuzzy podmnožina kartézského součinu $X \times Y$: $R \subseteq X \times Y$.

Nechť R je binární fuzzy relace na **R**. $R(x,y)$ se interpretuje jako stupeň náležení uspořádané dvojice (x,y) do fuzzy relace R.

Příklad: Jednoduchý příklad binární fuzzy relace na $U=\{1,2,3\}$, zvané "přibližně rovno", lze definovat takto:

$$R(1,1)=R(2,2)=R(3,3)=1.0$$
$$R(1,2)=R(2,1)=R(2,3)=R(3,2)=0.8$$
$$R(1,3)=R(3,1)=0.3$$

Funkce příslušnosti R je dána následovně:

$$R(x,y) = \begin{cases} 1.0 & \text{pro } x=y \\ 0.8 & \text{pro } |x-y|=1 \\ 0.3 & \text{pro } |x-y|=2 \end{cases}$$

Fuzzy relace se často vyjadřují pomocí maticového zápisu:

$$R = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \end{array}$$

Příklad klasické binární relace: X={Pepa, Lojza, Karel}, Y={Eva, Mařena, Anča}. Relace "*být ženatý s*" je např.:

{(Pepa, Mařena), (Karel, Eva), (Lojza, Anča)}

Pozn.: "*být ženatý*" nelze částečně, proto jde o klasickou relaci.

7. Operace nad fuzzy relacemi

Fuzzy relace hrají důležitou roli, protože umožňují popis vztahů mezi proměnnými.

Nechť R a S jsou binární fuzzy relace na $X \times Y$.

Definice 22 (průnik fuzzy relací): Průnik R a S je definován takto:

$$(R \wedge S)(x,y) = \min\{R(x,y), S(x,y)\} \quad \textbf{(35)}$$

$R \cap S$

Pozn.: R: $X \times Y \to [0, 1]$, tj. doménou R je celý kartézský součin $X \times Y$.

Definice 23 (sjednocení fuzzy relací): Sjednocení R a S je definováno takto:

$$(R \vee S)(x,y) = \max\{R(x,y), S(x,y)\} \quad \textbf{(36)}$$

$R \cup S$

Příklad: Mějme definovány dvě fuzzy relace R a S následovně:

$$R = \text{"}x \text{ je podstatně větší než } y\text{"} = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ x_3 & 0.9 & 1.0 & 0.7 & 0.8 \end{array}$$

$$S = \text{"}x \text{ je velmi blízké } y\text{"} = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.4 & 0.0 & 0.9 & 0.6 \\ x_2 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.3 & 0.0 & 0.8 & 0.5 \end{array}$$

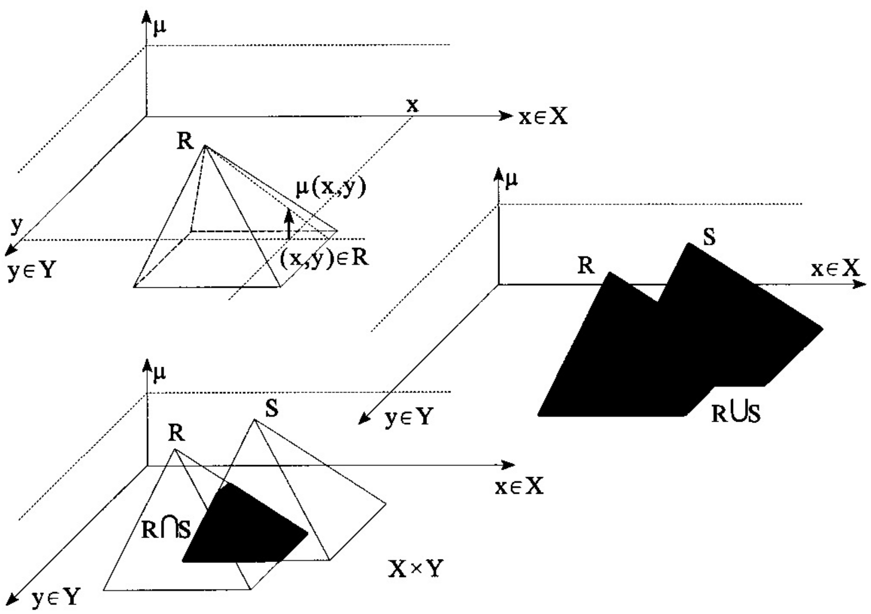
Průnik R a S znamená "x je podstatně větší než y **a** zároveň x je velmi blízké y".

$$(R \wedge S)(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \end{array}$$

$$(R \wedge S)(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.6 \\ x_2 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 \\ x_3 & 0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.5 \end{array}$$

Sjednocení R a S znamená “x je podstatně větší než y **nebo** x je velmi blízké y”.

$$(R \vee S)(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.9 & 0.7 \\ x_2 & 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.9 & 1.0 & 0.8 & 0.8 \end{array}$$

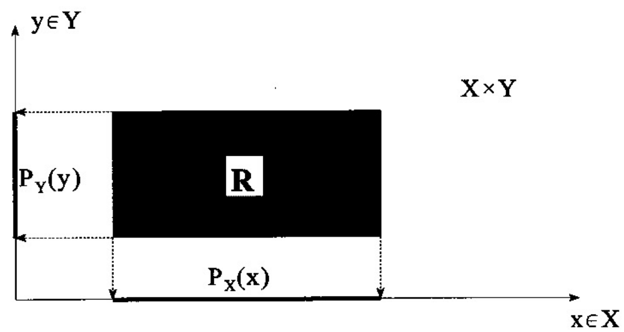


Výhodným způsobem reprezentace relace je matice. Např. pro relaci MÁ_RÁDA_SLADKOSTI:

$$\text{MÁ\_RÁDA\_SLADKOSTI} = \begin{array}{c|cc} & \text{koláč} & \text{bonbóny} \\ \hline \text{čokoláda} & 0.9 & 0.7 \\ \text{jahody} & 0.2 & 0.1 \end{array}$$

kde MÁ_RÁDA_SLADKOSTI je matice reprezentující fuzzy relaci. Je dobré si uvědomit, že pro ostré množiny by matice obsahovala pouze nuly a jedničky vyjadřující, že dotyčná osoba naprosto má ráda nebo má naprosto nerada uspořádané dvojice typu (*příchuť, sladkost*). To by mělo být argumentem, že náš svět je opravdu spíše fuzzy než ostrý.

Projekce klasických a fuzzy relací:



Příklad projekce v případě klasické relace $R \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$P_X = \{x \in X \mid \exists y \in Y: (x,y) \in R\}$$
$$P_Y = \{y \in Y \mid \exists x \in X: (x,y) \in R\} \qquad \textbf{(37)}$$

kde P_X označuje projekci relace R na universum X a P_Y označuje projekci R realce na universum Y.

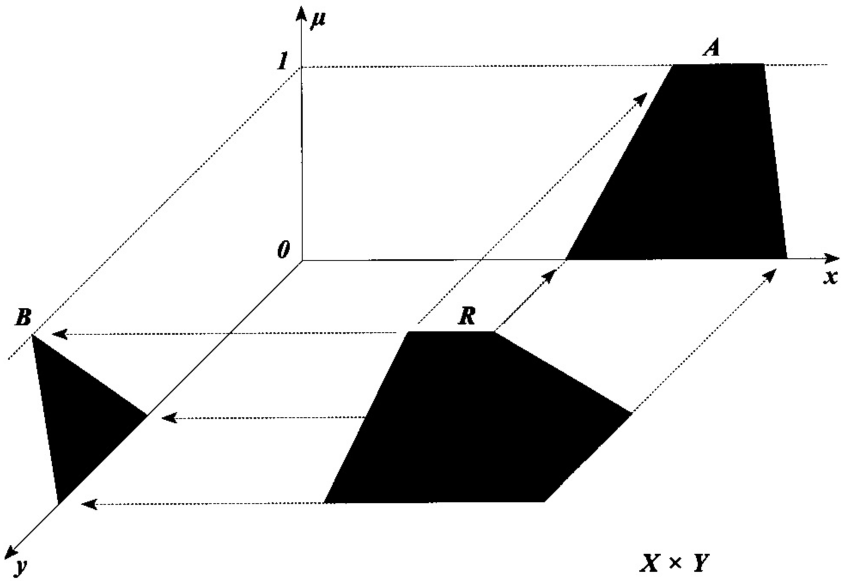
Pozn.: Projekce vícerozměrné relace na universum snižuje její rozměr o 1.

Definice 24 (fuzzy projekce): Nechť R je binární fuzzy relace na $X\times Y$. Projekce P_X relace R na X, resp. P_Y relace R na Y, je definována jako:

$$\begin{aligned} P_X(x) &= \sup\{R(x,y) \mid y \in Y\} \\ P_Y(y) &= \sup\{R(x,y) \mid x \in X\} \end{aligned} \qquad \mathbf{(38)}$$

Řádková, sloupcová a celková projekce:

$$R(x,y) = \text{"}x \text{ je znatelně větší než } y\text{"} = \begin{bmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 & \mid \mathbf{0.8} \\ x_2 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & \mid \mathbf{0.8} \\ x_3 & 0.9 & 1.0 & 0.7 & 0.8 & \mid \mathbf{1.0} \\ & \overline{\mathbf{0.9}} & \overline{\mathbf{1.0}} & \overline{\mathbf{0.7}} & \overline{\mathbf{0.8}} & \mid \overline{\mathit{1.0}} \end{bmatrix}$$



Projekce fuzzy relace R na universa X a Y

Definice 25 (kartézský součin fuzzy množin): Nechť A a B jsou fuzzy množiny na universech X, resp. na Y. Kartézský součin $A\times B$ je definován jako fuzzy množina (fuzzy relace) na $X\times Y$:

$$(A \times B)(x,y) = \min\{A(x), B(y)\}, \qquad \forall x \in X,\ \forall y \in Y \qquad \mathbf{(39)}$$

Definice 26 (*sup-min* kompozice fuzzy množin a relací): *sup-min* kompozice fuzzy množiny $C \subseteq X$ a fuzzy relace $R \subseteq X\times Y$ je definována vztahem:

$$(C \circ R)(y) = \sup_{x \in X} \min\{C(x), R(x,y)\}, \qquad \forall y \in Y \qquad \mathbf{(40)}$$

Příklad: Nechť C je fuzzy množina na universu $\{1, 2, 3\}$ a R je binární fuzzy relace na $\{1, 2, 3\}$, např.:

$$C = 0.2/1 + 1.0/2 + 0.2/3$$

$$R = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Pomocí definice dostaneme výsledek:

$$C \circ R = (0.2/1 + 1.0/2 + 0.2/3) \circ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} y \\ x \downarrow \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} = 0.8/1 + 1.0/2 + 0.8/3$$

Příklad: Nechť C je fuzzy množina na universu [0, 1] a R je binární fuzzy relace na [0, 1]. Dále nechť $C(x)=x$ a $R(x)=1-|x-y|$. Použitím *sup-min* kompozice dostaneme:

$$(C\circ R)(y) = \sup_{x\in[0,1]} \min\{x, 1-|x-y|\} = \frac{1+y}{2}, \quad \forall y\in[0,1]$$

Definice 27 (*sup-min* kompozice fuzzy relací): Nechť $R\subseteq X\times Y$ a $S\subseteq Y\times Z$ jsou fuzzy relace. *sup-min* kompozice R a S, označovaná jako $R\circ S$, je definována jako

$$(R\circ S)(x,z) = \sup_{y\in Y} \min\{R(x,y), S(y,z)\} \tag{44}$$

$R\circ S$ je binární fuzzy relace na $X\times Z$.

Příklad: Uvažme dvě fuzzy relace R a S:

$$R = \text{"}x \text{ je podstatně větší než } y\text{"} = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ x_3 & 0.9 & 1.0 & 0.7 & 0.8 \end{array}$$

$$S = \text{"}y \text{ je velmi blízké } z\text{"} = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ y_2 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \\ y_3 & 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ y_3 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array}$$

Dle definice se spočítá jejich kompozice:

$$R\circ S = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ x_3 & 0.9 & 1.0 & 0.7 & 0.8 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ y_2 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \\ y_3 & 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ y_4 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ x_2 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \\ x_3 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{array}$$

Pozn.: kompozice se snadno spočítá jako analogie maticového součinu, kde místo sečítání se použije *max* a místo násobení se použije *min*.

Maticový součin:

$(0.8 * 0.9) + (0.1 * 0.4) + (0.1 * 0.5) + (0.7 * 0.7)$

Kompozice ~~fuzy~~ množin $R\circ S$:

$$\underbrace{\underbrace{(0.8 \wedge 0.9)}_{0.8} \vee \underbrace{(0.1 \wedge 0.4)}_{0.1} \vee \underbrace{(0.1 \wedge 0.5)}_{0.1} \vee \underbrace{(0.7 \wedge 0.7)}_{0.7}}_{\max = 0.8}$$

Výsledná fuzzy relace *T* = *R* o *S* dává do závislosti proměnné *x* a *z*, přičemž *y* zmizelo. Jak lze interpretovat vzniklý výsledek *T*? Původní vztah mezi proměnnými byl *x je podstatně větší než y* a *y je velmi blízké z*. Jak by se dal slovně vyjádřit nový vztah mezi *x* a *z*, který vznikl přes *y*? Interpretace je vždy velmi důležitá, i když její vytvoření je často složité a označuje něco, co je obvykle značně přibližné, přesto to může být celkem pochopitelné z hlediska přibližného usuzování.