Projekce a cylindrické rozšíření

Nechť R je fuzzy relace definovaná relační maticí (1, 2. a totální projekce jsou ukázány):

R:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	[redacted]
x_1	0.1	0.2	0.4	0.8	1.0	0.8	1
x_2	0.2	0.4	0.8	1.0	0.8	0.6	1
x_3	0.4	0.8	1.0	0.8	0.4	0.2	1
	0.4	0.8	1	1	1	0.8	① totální proj.

1. proj.

2. proj.

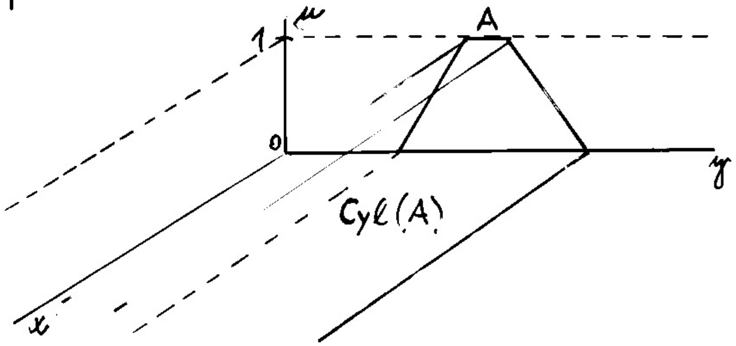
Výsledná relace (výsledek projekce) se také nazývá „stín".

Definice (cylindrické rozšíření):
$R_{q_L} \tilde{\subseteq} X$ je největší relací na X, jejíž projekce je Rq. R_{q_L} se nazývá cylindrickým rozšířením Rq a Rq se nazývá bází R_{q_L}. ■

Příklad (viz výše): cyl. rozšíření druhé projekce je:

Cyl(R_2):

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
x_1	0.4	0.8	1	1	1	0.8
x_2	0.4	0.8	1	1	1	0.8
x_3	0.4	0.8	1	1	1	0.8



Lingvistické proměnné

Jedním ze základních [redacted] nástrojů ve fuzzy logice a přibližném usuzování je pojem lingvistická proměnná:

Definice lingvistické proměnné: (L. Zadeh, 1973)
Lingvistická proměnná je charakterizována pěticí $(x, T(x), U, G, \tilde{M})$, kde x je název proměnné; $T(x)$ nebo zjednodušeně T označuje tzv. množinu termů proměnné x, což je množina jmen tzv. lingvistických hodnot pro x; U je universum asociované s tzv. bázovou proměnou $u \in U$; G je syntaktické pravidlo (obvykle gramatika) pro generování jména X proměnné x; M je sémantické pravidlo, které každému jménu X přiřazuje význam $\tilde{M}(X)$, což je fuzzy podmnožina na U. Konkrétní X (tj. jméno generované pomocí G) se nazývá term. ■

Příklad:
Nechť X je lingvistická proměnná s označením „Věk" a $U = [0, 100]$. Termy této lingvistické proměnné, což jsou fuzzy množiny, mohou být nazvány „starý", „mladý", „velmi starý", atd. Bázová proměnná je věk udaný v letech života. $\tilde{M}(X)$ je pravidlo přiřazující význam, tj. fuzzy množinu každému termu:

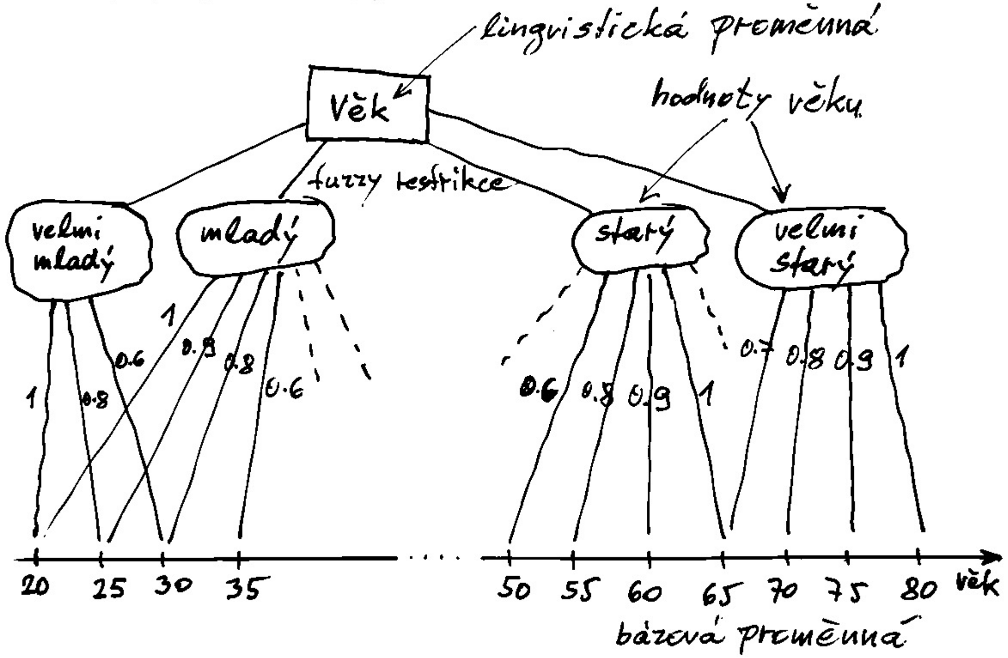
$$\tilde{M}(\text{starý}) = \left\{ (u, \mu_{\text{starý}}(u)),\ u \in [0, 100] \right\} \quad \text{kde}$$

$$\mu_{\text{starý}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \in [0, 50] \\ \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & \text{pro } u \in [50, 100] \end{cases}$$

T(x) definuje množinu termů proměnné x, např.:

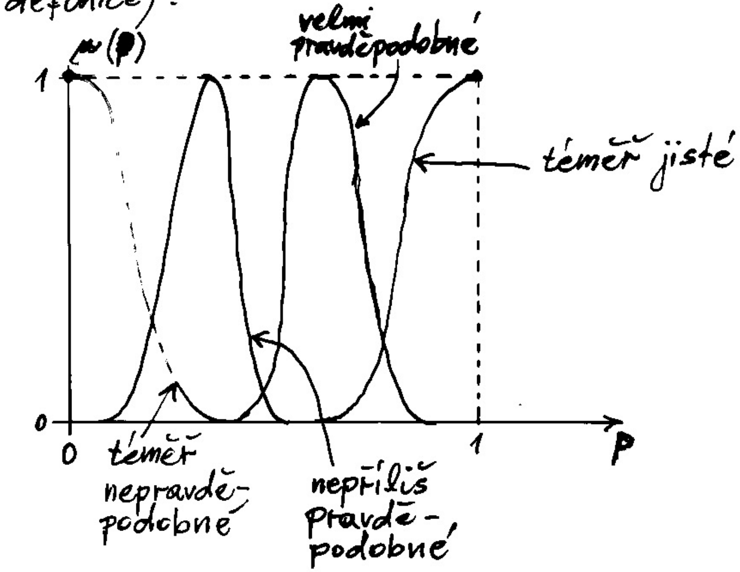
T(věk) = {starý, velmi starý, nepříliš starý, více-méně starý, více-méně mladý, zcela mladý, velmi mladý}

přičemž G(x) je pravidlo pro generování označení termů v termové množině.

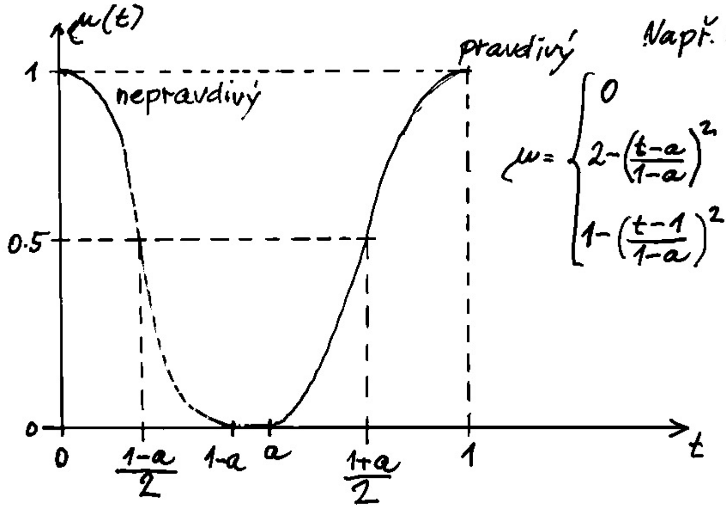


Některé lingvistické proměnné

Pravděpodobnost - fuzzy vyjádření (příklad možné definice):



Pravda



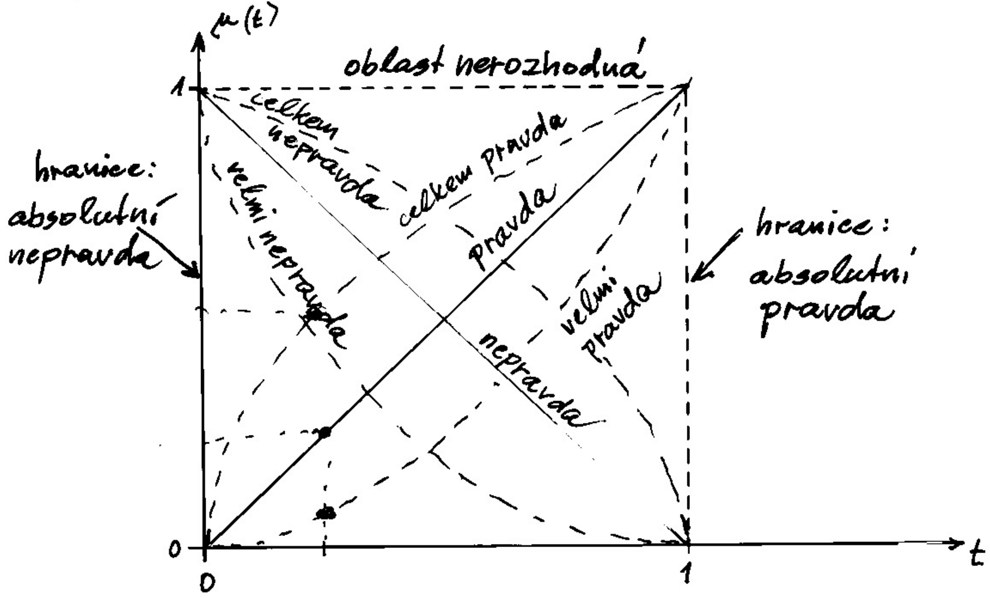
Např.:

$$\mu = \begin{cases} 0 & \dots\ 0 \leq t \leq a \\ 2-\left(\frac{t-a}{1-a}\right)^2 & \dots\ a \leq t \leq \frac{a+1}{2} \\ 1-\left(\frac{t-1}{1-a}\right)^2 & \dots\ \frac{a+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Možný způsob odvozování funkcí příslušnosti pro fuzzy hodnoty fuzzy proměnné T:

T(pravda) = {pravda, nepravda, velmi pravdivý, nepříliš pravdivý, ..., nepříliš nepravdivý, více-méně nepravdivý, ...}

Lze vyjít ze základní definice „fuzzy" pravda a nepravda a aplikovat modifikátory jako velmi apod.:



t-normy

Triangulární normy (t-normy) tvoří širokou třídu logických spojek pro realizaci průniku a sjednocení.

Def.: t-norma je funkce dvou argumentů:

- $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

  taková, že:
  - a) je v každém argumentu neklesající $x \leq y,\ w \leq z$, pak $x\, t\, w \leq y\, t\, z$
  - b) je komutativní $x\, t\, y = y\, t\, x$
  - c) je asociativní $(x\, t\, y)\, t\, z = x\, t\, (y\, t\, z)$
  - d) splňuje ohraničující podmínky $x\, t\, 0 = 0,\ x\, t\, 1 = x,\quad x, y, z, w \in [0,1]$

Def.: s-norma (t-konorma) je funkce 2 arg.:

- $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

  taková, že:
  - a) je neklesající v každém argumentu
  - b) je komutativní
  - c) je asociativní
  - d) splňuje ohraničující podmínky $x\, s\, 0 = x,\ x\, s\, 1 = 1$

t-normy korespondují s průnikem (AND), s-normy se sjednocením (OR).

s-normu lze odvodit z t-normy pomocí vztahu:

$$x\, s\, y = 1 - \big((1-x)\, t\, (1-y)\big)$$

Některé ze základních t-norem

minimum $MIN(a,b) = \min\{a,b\} = a \wedge b$

Łukasiewicz $LAND(a,b) = \max\{a+b-1,\ 0\}$

pravděpod. součin (algebr. součin) $PAND(a,b) = a * b$

slabší $WEAK(a,b) = \begin{cases} a \wedge b & \text{když } a \vee b = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Hamacher $(\gamma \geq 0)$ $H_\gamma(a,b) = \dfrac{ab}{(\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab))}$

Dubois & Prade $(\alpha \in]0,1[\,)$ $d_\alpha(a,b) = \dfrac{ab}{\max\{a,b,\alpha\}}$

? $(p \geq 1)$ $a\,t\,b = 1 - \min\left[1, \left((1-a)^p + (1-b)^p\right)^{1/p}\right]$

? $(0 < w < \infty,\ w \neq 1)$ $a\,t\,b = \log_w\left[1 + \dfrac{(w^a - 1)(w^b - 1)}{(w-1)}\right]$

? $(\lambda \geq -1)$ $a\,t\,b = \max\left[0, (\lambda+1)(a+b-1) - \lambda ab\right]$

Všechny t-normy mohou být (pomocí asociativity) rozšířeny na $n > 2$ argumenty, např.:

$MIN(a_1, \dots, a_n) = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

$PAND(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

$LAND(a_1, \dots, a_n) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i - n + 1,\ 0\right\}$

Některé ze základních s-norem

maximum $MAX(a,b) = \max\{a,b\}$

Łukasiewicz $LOR(a,b) = \min\{a+b,\ 1\}$

pravděpod. součet $POR(a,b) = a + b - ab$

silnější $STRONG(a,b) = \begin{cases} a \vee b & \text{když } a \wedge b = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

Hamacher $(\gamma \geq 0)$ $a\,s\,b = \dfrac{ab(\gamma - 2) + a + b}{ab(\gamma - 1) + 1}$

? $(p \geq 1)$ $a\,s\,b = \min\left(1, \left(a^p + b^p\right)^{1/p}\right)$

? $(0 < w < \infty;\ w \neq 1)$ $a\,s\,b = 1 - \log_w\left[1 + \dfrac{(w^{1-a} - 1)(w^{1-b} - 1)}{(w-1)}\right]$

? $(\lambda \geq -1)$ $a\,s\,b = \min\{1,\ a + b + \lambda ab\}$

Podobně jako t-normy, lze rozšířit i s-normy na $n > 2$ argumentů, např.:

$$MAX(a_1, \dots, a_n) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$$

Pro každou t-normu platí nerovnost:

$$x \wedge y \geq x\, t\, y \geq \begin{cases} x & \text{když } y = 1 \\ y & \text{když } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

tj. třída t-norem je ohraničená (shora minimem, zdola tzv. drastickým součinem).

Podobně pro s-normy platí:

$$x \vee y \leq x\, s\, y \leq \begin{cases} x & \text{když } y = 0 \\ y & \text{když } x = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Ohraničení shora je tzv. drastickým součtem a zdola maximem.

Některé t-normy (s-normy) obsahují parametry. Volbou parametrů lze modifikovat charakter logických spojek. Např.:

$p = 0$ pak $a\, t\, b$ se redukuje na drast. součin

$p \to \infty$ dává minimum

$p = 0$ pak $a\, s\, b$ se redukuje na drast. součet

$p \to \infty$ dává maximum

Pozn.: Velmi známé Łukasiewiczovy spojky (pocházející z jeho teorie vícehodnotové logiky) mohou být odvozeny pomocí nastavení λ:

$$\lambda = 0: \quad a\, t\, b = \max(0, a + b - 1)$$

$$a\, s\, b = \min(1, a + b)$$

Nekonečná třída t-norem (včetně parametrických verzí) dává široký repertoár formálních modelů logických spojek.

Konkrétní výběr operátorů AND (konjunkce) a OR (disjunkce) závisí na typu řešeného problému.

$\wedge$ a $\vee$ způsobují, že jakmile jeden z argumentů má hodnotu (funkce příslušnosti) větší než ostatní (pro $\vee$) nebo menší než ostatní (pro $\wedge$), pak ty „ostatní" hodnoty nemají žádný vliv na výsledek. Jinými slovy, mezi argumenty není žádná interaktivita.

Výhodou zde je, že nejsou zapotřebí žádné přesné hodnoty funkce příslušnosti – stačí hrubý odhad (chyby měřicího postupu mohou být do velké míry ignorovány). To vede k tzv. robustnosti.

Na druhé straně „necitlivost" robustních systémů se může ukázat jako nevýhoda když takto získané výsledky neodpovídají charakteru kombinovaných dat a jejich vzájemné interakci. Proto je zapotřebí mít k dispozici různé možnosti (úrovně) interakce.

Př.: nízká cena řízení AND vysoká přesnost sledování

Obě složky (cena, přesnost) představují různé cíle určité řídicí strategie. Formulace problému se spojkou AND indikuje interakci mezi dvěma navzájem konfliktními cíly. Proto zde není vhodné použít $\wedge$, nýbrž kupř. $*$ (algebr. součin).

Př.: nový AND rychlý automobil

Zde není interakce mezi nový a rychlý zřejmá. Proto je v takovém případě použití $\wedge$ přiměřené.

Kompenzační operátory

Existuje-li operátor C takový, že platí:

$$\min\{a,b\} \leq C(a,b) \leq \max\{a,b\}$$
$$\forall a,b \in [0,1]$$

pak o takovém operátoru říkáme, že je to kompenzační operátor.

FUZZY IMPLIKACE

Materiální implikace

Ostré propozice: $p =$ „x je v A" a $q =$ „y je v B"
(A a B jsou zde klasické množiny.)
Zápis implikace $p \rightarrow q$ je interpretován jako $\neg(p \wedge \neg q)$, tj. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Stupeň pravdivosti $p \rightarrow q$ kvantifikuje, do jaké míry je q přinejmenším tak pravdivé jako p:

$$p \rightarrow q \text{ je pravda} \Longleftrightarrow \tau(p) \leq \tau(q)$$

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \tau(p) \leq \tau(q) \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Pravdivostní tabulka implikace:

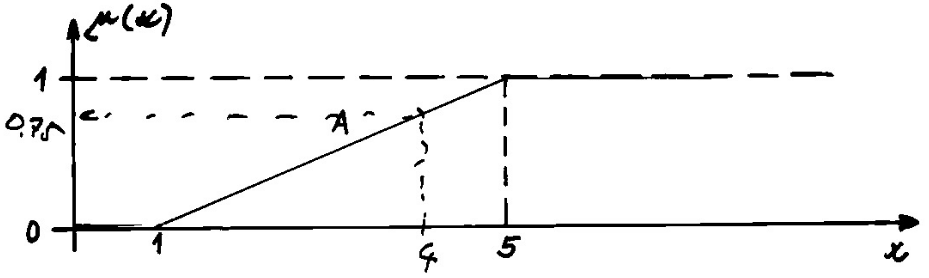
p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1
1	0	0

Př.: $p =$ „x je větší než 10", $q =$ „x je větší než 9".
$p \rightarrow q$ je pravdivé (nemůže se stát, že $x > 10$ a zároveň $x \leq 9$).

prší → je zataženo

Fuzzy implikace

Uvažme výrok „jestliže je tlak vysoký pak objem je malý". Funkce příslušnosti fuzzy množiny A, tj. lingvistická hodnota „vysoký tlak", ilustruje obrázek:



Fuzzy množinu A lze interpretovat takto:

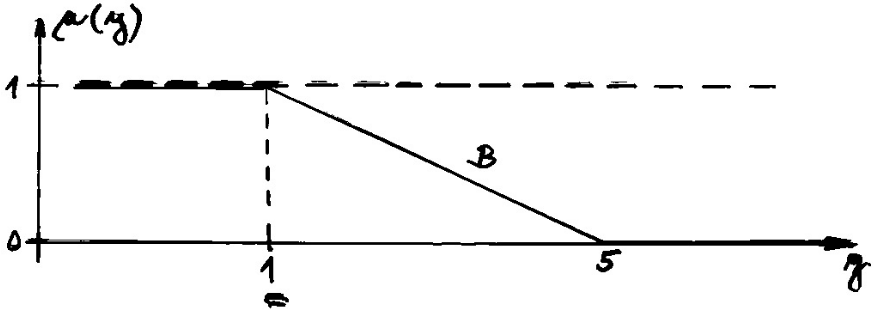
- 1 je v A se stupněm příslušnosti 0.0
- 2 je v A ——"—— 0.25
- 4 je v A ——"—— 0.75
- x je v A ——"—— 1.0 $\forall x \geq 5$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 5 \\ 1 - \frac{5-x}{4} & \text{pro } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{ostatní případy} \end{cases}$$

Podobně lze interpretovat fuzzy množinu B "malý objem":

- 5 je v B se stupněm příslušnosti 0.0
- 4 je v B ——"—— 0.25
- 2 je v B ——"—— 0.75
- x je v B ——"—— 1.0 $\forall x \leq 1$

Ilustrace fuzzy množiny B:



$$B(y) = \begin{array}{ll} 1 & \text{pro } y \leq 1 \\ 1 - \frac{y-1}{4} & \text{pro } 1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{jinak} \end{array}$$

Je-li p propozice x je A, kde A je fuzzy množina, např. velký tlak, a q propozice y = B, např. malý objem, pak se často používá fuzzy implikace definované jako fuzzy relace:

$$(A \rightarrow B)(x, y) = A(x) \rightarrow B(y)$$

(Existují i jiné definice fuzzy implikace.)

x je velký tlak ⟶ y je malý objem ≡ $A(x) \rightarrow B(y)$

Jedním z možných rozšíření materiální implikace na implikace s pravdivostními hodnotami mezi 0 a 1:

$$A(x) \rightarrow B(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } A(x) \leq B(y) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

"4 je velký tlak" → "1 je malý objem" =

$$A(4) \rightarrow B(1) = 0.75 \rightarrow 1 = 1$$

(tzv. standardní striktní fuzzy implikace)

Striktní fuzzy implikace se v mnoha případech ukazuje jako nevhodná pro reálné aplikace:

$$A(x) \to B(y) = 0.8 \to 0.8 = 1$$

Existovala-li by malá chyba měření $B(y)$, pak můžeme např. dostat:

$$A(x) \to B(y) = 0.8 \to 0.7999 = 0$$

Je to ukázka toho, jak nepatrná chyba měření nebo malá změna na vstupu může způsobit velikou odchylku na výstupu: Systém je velmi citlivý na zaokrouhlovací chyby digitálních výpočtů a na malé chyby měření.

„Jemnější" extenze materiální implikace pochází od Gödela:

$$A(x) \to B(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } A(x) \leq B(y) \\ B(y) & \text{jinak} \end{cases}$$

Další možností je rozšíření původní definice operátoru implikace: $p \to q \equiv \neg p \vee q$ za použití definic standardní negace a fuzzy množinového sjednocení:

$$A(x) \to B(y) = \max\{1 - A(x), B(y)\}$$

Tento operátor se nazývá Kleene-Dienesova implikace.

Fuzzy logika a klasická logika

V klasické logice je výrok A či B buď zcela pravdivý nebo zcela nepravdivý (tj. má konvenční ohodnocení 1 nebo 0). Lze konstruovat pravdivostní tabulky, definující logické operátory ($\wedge, \vee, \to \ldots$). Existuje (či lze vytvořit) $2^{2^2} = 16$ pravdivostních tabulek.

Není-li možné jasně označit A či B jako zcela pravdivé či zcela nepravdivé, lze přidat další pravdivostní hodnoty (např. „nerozhodnutelný", „nevím" apod.). Tento způsob vede k tzv. vícehodnotovým logikám. Poznamenejme, že pro dva výroky a tři pravdivostní hodnoty již lze vytvořit $3^{3^2} = 729$ pravdivostních tabulek. Snadnost interpretace, unikátní a výhodná např. v boolské logice, tak zcela mizí.

Usuzovací schémata (procedury)

Jsou obecně založeny na tautologiích, k nimž patří např. tyto čtyři zřejmě nejužívanější:

modus ponens: $(A \wedge (A \to B)) \to B$

modus tollens: $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$

sylogismus: $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

kontrapozice: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Nejužívanější modus ponens („potvrzování pomocí potvrzeného") lze interpretovat takto:

Je-li A pravdivé a výrok „jeli A pravdivé pak B je pravdivé" je také pravdivý, pak také B je pravdivé.

Fuzzy logika je rozšířením vicehodnotové „množinové" logiky, přičemž pravdivostní hodnoty jsou hodnotami lingvistických proměnných.

Rozšířením operátorů jako $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ do fuzzy logiky lze získat možnosti „fuzzy" usuzování:

Je-li $t(A) \in V = [0, 1]$ bodem na jednotkovém intervalu, representujícím pravdivostní hodnotu proposice „u je A" (nebo jednoduše A), pak pravdivostní hodnota „ne A" neboli $\neg A$ je definována takto:

$$t(\neg A) = 1 - t(A)$$

Pro numerické pravdivostní hodnoty $t(A)$ a $t(B)$ jsou logické operace AND, OR, NOT, IMPLIKACE definovány takto:

$$t(A) \wedge t(B) = t(A \wedge B) = \{(t, \min(\mu_A(t), \mu_B(t))$$

$$t(A) \vee t(B) = t(A \vee B) = \{(t, \max(\mu_A(t), \mu_B(t))$$

$$\neg t(A) = t(\neg A) = \{(t, 1 - \mu_A(t))\}$$

$$t(A) \rightarrow t(B) = t(A \rightarrow B) = \{(t, \overset{\vee}{\max}\{\overset{\neg A}{1 - \mu_A(t)}), \overset{B}{\mu_B(t)}$$

tj. $\neg A \vee B$

Přibližné usuzování

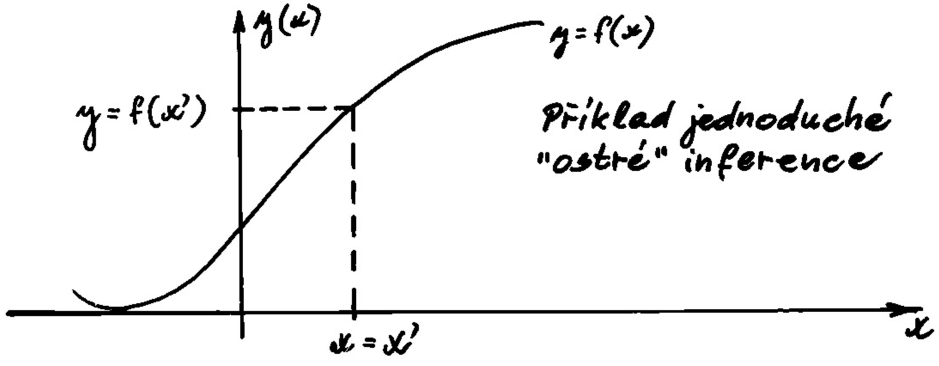
Přibližné usuzování pomocí teorie fuzzy množin pochází od Lotfi Zadeha z r. 1979. Zadehova teorie tvoří základ pro usuzování, je-li k dispozici přibližná, nejistá, vágní, či nepřesná informace. Středobodem Zadehovy teorie je reprezentace propozic jako tvrzení, která proměnným přiřazují fuzzy množiny jako hodnoty.

Předpokládejme, že máme dvě veličiny $x \in X$ a $y \in Y$ a že kauzální vztah mezi x a y je kompletně znám: $y = f(x)$.

V takovém případě je snadné inferovat:

$$\begin{array}{ll} \text{premisa} & y = f(x) \\ \text{fakt} & x = x' \\ \hline \text{závěr} & y = f(x') \end{array}$$

Uvedené inferenční pravidlo říká, že známe-li $y = f(x)\ \forall x \in X$ a existuje-li pozorovaná skutečnost $x = x'$, pak y nabývá hodnoty $f(x')$.



Příklad jednoduché "ostré" inference

Velmi často však neznáme úplný kauzální vztah f mezi x a y, jediné co bývá známo, jsou hodnoty $f(x)$ pro některé konkrétní hodnoty x:

R_1: IF $x = x_1$ THEN $y = y_1$ OTHERWISE
R_2: IF $x = x_2$ THEN $y = y_2$ OTHERWISE
$\vdots$
R_n: IF $x = x_n$ THEN $y = y_n$

Předpokládejme, že známe nějakou hodnotu $x' \in X$ (např. měřením) a chceme najít $y' \in Y$, korespondující s x' pomocí báze pravidel:

$$\begin{array}{lll} R_i: & \text{IF } x = x_i & \text{THEN } y = y_i \text{ OTHERWISE} \ldots \\ \text{fakt:} & x = x' & \\ \hline \text{závěr:} & & y = y' \end{array}$$

Tento problém ($x' \neq x_i, \forall i;\ y' \neq y_i, \forall i$) bývá často označován jako interpolace.

Nechť x a y jsou lingvistické proměnné (tj. nabývají lingvistických hodnot), např. "x je veliké" a "y je malé". Základním problémem je najít funkci příslušnosti konsekventu B ze znalostní pravidlové báze $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ a z faktu A':

$$\begin{array}{lll} R_i: & \text{IF } x \text{ je } A_i & \text{THEN } y \text{ je } B_i \ldots \\ \text{fakt:} & x \text{ je } A' & \\ \hline \text{závěr:} & & y \text{ je } B' \end{array}$$

L. Zadeh navrhl množství pravidel, umožňujících reprezentaci některých obecných lingvistických výroků v termínech propozic našeho jazyka:

Příčinné pravidlo:

$$\begin{array}{l} x \text{ je } A \\ A \subset B \\ \hline x \text{ je } B \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Marie je velmi mladá} \\ \text{velmi mladá} \subset \text{mladá} \\ \hline \text{Marie je mladá} \end{array}$$

Konjunktivní pravidlo:

$$\begin{array}{l} x \text{ je } A \\ x \text{ je } B \\ \hline x \text{ je } A \cap B \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{tlak není velmi vysoký} \\ \text{tlak není velmi nízký} \\ \hline \text{tlak není velmi vysoký a není} \\ \qquad\qquad \text{velmi nízký} \end{array}$$

Disjunktivní pravidlo:

$$\begin{array}{l} \quad\; x \text{ je } A \\ \text{OR } x \text{ je } B \\ \hline \quad\; x \text{ je } A \cup B \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad\;\; \text{tlak není velmi vysoký} \\ \text{OR tlak není velmi nízký} \\ \hline \quad\;\; \text{tlak není velmi vysoký nebo} \\ \qquad\qquad \text{velmi nízký} \end{array}$$

Projekční pravidlo

$$\begin{array}{l} (x, y) \text{ má relaci } R \\ \hline x \text{ je } P_X(R) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x, y) \text{ má relaci } R \\ \hline y \text{ je } P_Y(R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x, y) \text{ je blízké } (3,2) \\ \hline x \text{ je blízké } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x, y) \text{ je blízké } (3,2) \\ \hline y \text{ je blízké } 2 \end{array}$$

Negační pravidlo

$$\begin{array}{l} \neg (x \text{ je } A) \\ \hline x \text{ je } \neg A \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg (x \text{ je vysoké}) \\ \hline x \text{ není vysoké} \end{array}$$

V přibližném usuzování prostřednictvím fuzzy logiky je nejdůležitějším fuzzy inferenčním pravidlem tzv. generalizovaný modus ponens (GMP).

Klasické (ne-fuzzy) inferenční pravidlo modus ponens:

$$\begin{array}{lll} \text{premisa} & \text{IF } p \text{ THEN } q \\ \text{fakt} & p \\ \hline \text{závěr} & & q \end{array}$$

Toto inferenční pravidlo lze interpretovat takto:
Je-li p pravda a $p \rightarrow q$ je pravda pak q je pravda.

Fuzzy implikační inference je založena na kompozičním pravidle inference dle L. Zadeha:

Definice (kompoziční inferenční pravidlo):

premisa IF x je A THEN y je B
fakt x je A'
závěr y je B'

kde obecně platí $A' \neq A$ a $B' \neq B$. Přitom B' se určí jako kompozice faktu a fuzzy implikačního operátoru:

$$\underline{B'} = A' \circ (A \to B) \quad \text{tj.}$$

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min\{A'(x), (A \to B)(x,y)\}, \quad y \in Y$$

Konsekvent B' je projekce $(A \to B)$ na A'.

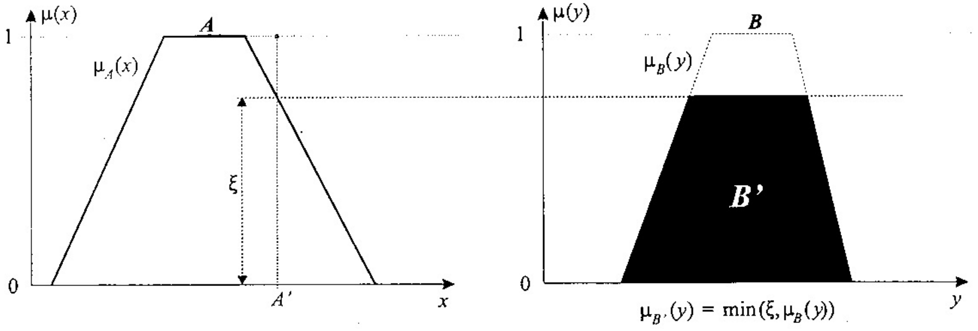
GMP se redukuje na klasický MP když $A' = A$ a $B' = B$.

Jiným pravidlem odvození je modus tollens, které ve své klasické podobě říká: je-li $p \to q$ pravda a q není pravda, pak p není pravda. Zobecněné pravidlo GMT:

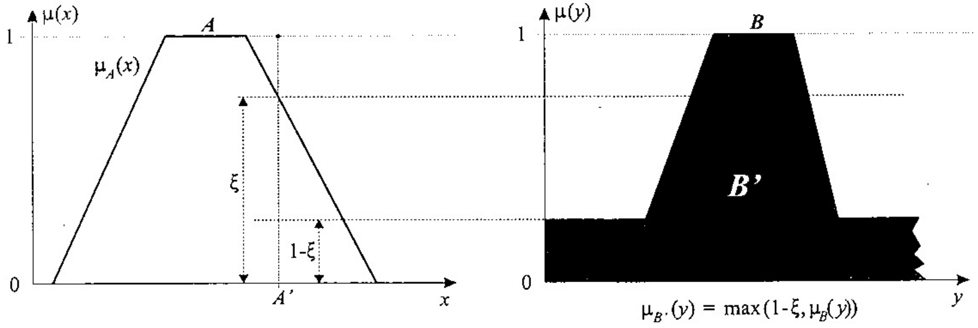
premisa IF x je A THEN y je B
fakt y je B'
zdvěr x je A'

(pro $B = \neg B$ a $A' = \neg A$ dostaneme klasický MT)

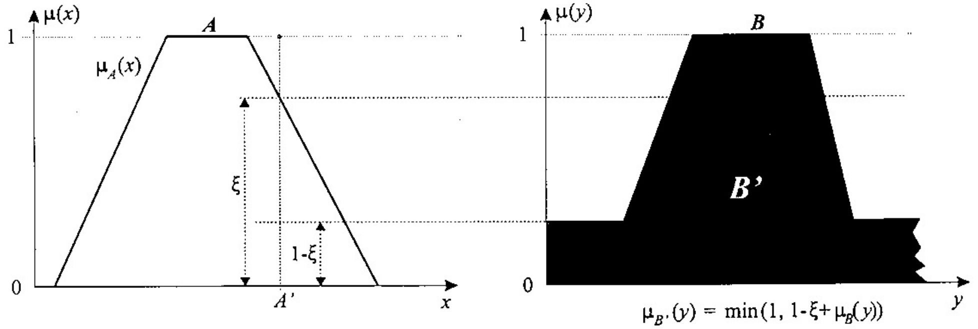
IF x je A THEN y je B
x je A'
y je B'



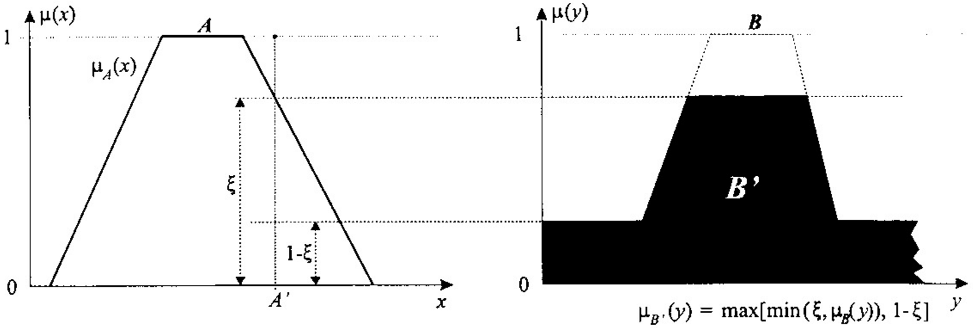
Mamdani



Kleene-Dienes

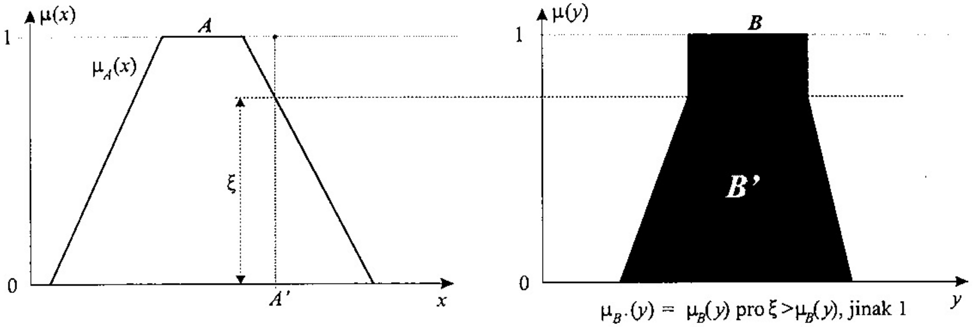


Łukasiewicz



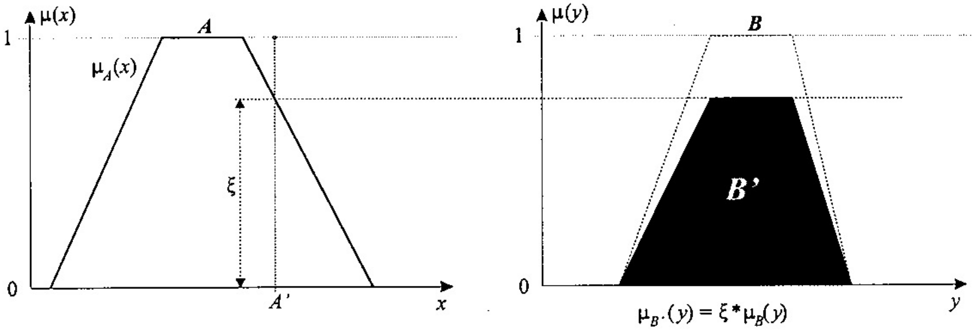
$\mu_{B'}(y) = \max[\min(\xi, \mu_B(y)), 1-\xi]$

Zadeh-Willmott



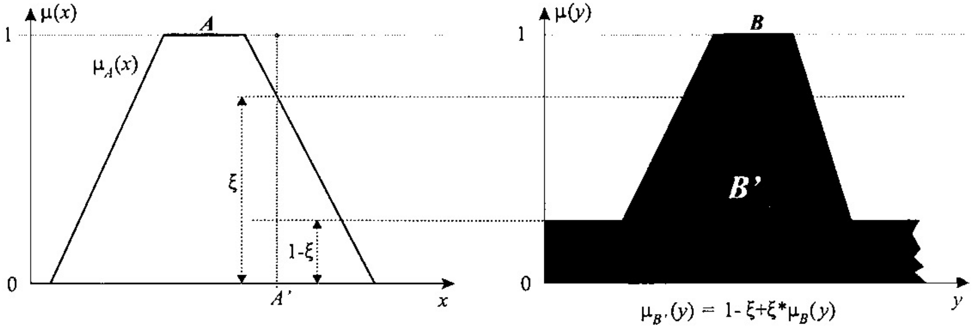
$\mu_{B'}(y) = \mu_B(y)$ pro $\xi > \mu_B(y)$, jinak 1

Brouwer-Gödel



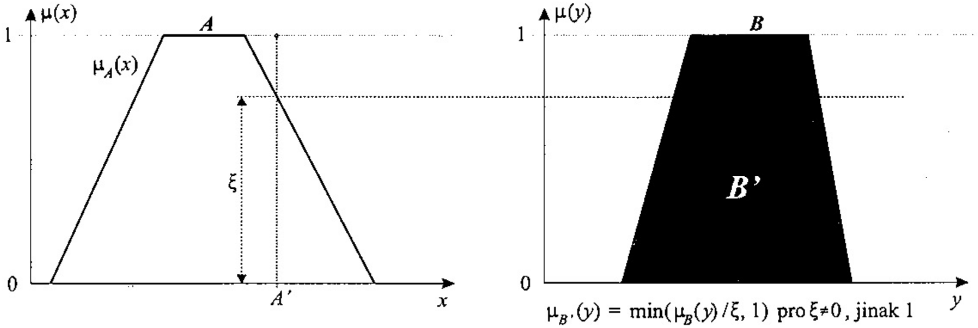
$\mu_{B'}(y) = \xi * \mu_B(y)$

Larsen



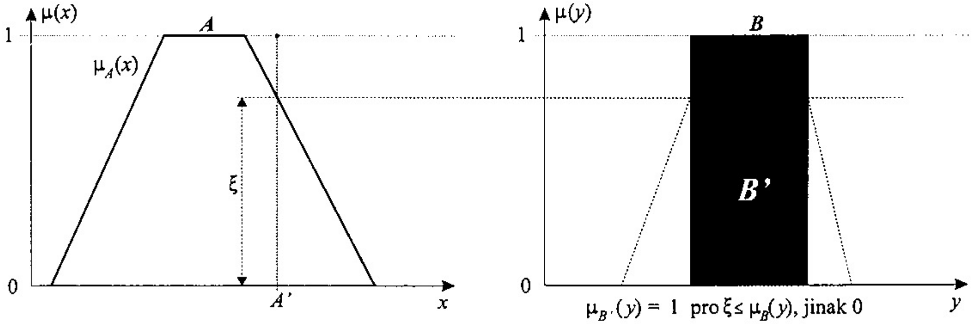
$\mu_{B'}(y) = 1-\xi+\xi * \mu_B(y)$

Reichenbach



$\mu_{B'}(y) = \min(\mu_B(y)/\xi, 1)$ pro $\xi \neq 0$, jinak 1

Goguen



$\mu_{B'}(y) = 1$ pro $\xi \leq \mu_B(y)$, jinak 0

Rescher-Gaines

Přibližné usuzování pomocí GMP

Nechť A, A', B, B', C, C', D, D' jsou fuzzy množiny.
GMP říká:

premisa	x je A'
implikace	IF x je A THEN y je B
závěr	y je B'

Pomocí téže implikace a různých premis získáme různé závěry:

modifikátor
fuzzy množina

viditelnost je poněkud nízká
IF viditelnost je nízká THEN podmínky jsou špatné
∴ podmínky jsou poněkud špatné

viditelnost je velmi nízká
IF viditelnost je nízká THEN podmínky jsou špatné
∴ podmínky jsou velmi špatné

Fuzzy množiny: nízká ≠ poněkud nízká
špatné ≠ poněkud špatné
špatné ≠ velmi špatné
velmi špatné ≠ poněkud špatné

Fuzzy inference je založena na dvou základních konceptech:

① Fuzzy implikace

② Kompoziční pravidlo inference

ad ① Fuzzy implikace je representována jako

$$A \rightarrow B$$

kde A a B jsou fuzzy množiny.

Fuzzy implikace je definována jako fuzzy relace.
Fuzzy relace bývá reprezentována pomocí matice.

Fuzzy relace R asociovaná s implikací A→B je fuzzy množina na kartézském součinu X×Y kde $A \in X$ a $B \in Y$.

Nejpoužívanější fuzzy implikace je založena na operátoru min čili $\wedge$:

$$\mu_R(x,y) = \min\left(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\right), \quad x \in X,\ y \in Y$$

Je-li tedy R fuzzy relace z X do Y a $\tilde{x}$ je fuzzy podmnožina na X, pak fuzzy podmnožina $\tilde{y}$ na Y indukovaná pomocí $\tilde{x}$ je dána jako kompozice R a $\tilde{x}$:

$$\tilde{y} = \tilde{x} \circ R \qquad \text{(kompoziční pravidlo)}$$

Nejužívanější metodou kompozice fuzzy množin je tzv. max-min kompozice. Při použití této metody je $\tilde{y}$ počítáno jako max-min produkt $\tilde{x}$ a R. Operace je velmi podobná násobení vektoru a matice (skalární součin); rozdíl je v tom, že násobení je nahrazeno operací min a sčítání operací max:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} \min\left(\mu_A(x), \mu_R(x,y)\right), \quad \forall y$$

$$= \max_{x \in X} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_R(x,y)\right), \quad \forall y$$

Poznámka: je-li $R = (A \to B)$ a $\tilde{x} = A$ dostaneme

$$\tilde{y} = \tilde{x} \circ (A \to B) = B \qquad \text{(přesná identita)}$$

(ověřte si za domácí úkol).

Fuzzy pravidla

Fuzzy pravidlo definujeme pomocí relace mezi pozorováním (antecedent) a akcí (konsekvent). Fuzzy pravidlo je ekvivalentní fuzzy implikaci. Pro každé pravidlo IF A THEN B by bylo obecně nutno generovat matici, což pro rozsáhlejší soubory pravidel by vyžadovalo mnoho matic, což je časově i paměťově náročné obdobně jako výpočty spojené s inferencí.

Ve speciálním případě lze inferovat pomocí A a B bez nutnosti generovat matice. Lze to tehdy, pokud operátor implikace (tj. relace!) a produktu jsou tytéž. Použijeme-li pro vytvoření relace operace min a taktéž použijeme min pro produkt, výpočty se značně zjednoduší.

Předpokládejme, že máme k dispozici pozorování A' a relaci R. Potom závěr B' vypočteme jako

$$B' = A' \circ R$$

Rozepíšeme-li kompozici:

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)\right) =$$

$$= \max_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right)\right) =$$

$$= \max_x \left(\left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right) \wedge \mu_B(y)\right) =$$

$$= \left(\max_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right)\right) \wedge \mu_B(y) =$$

$$= \underline{\xi \wedge \mu_B(y)}$$

kde

$$\xi = \max_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right)$$

Vše, co potřebujeme, je aplikovat operaci min na vektory A a A' a pak najít maximální prvek výsledku. Toto maximum ξ se použije jako jeden z operandů operace min spolu s vektorem B.

Ukázaný postup lze rozšířit i pro pravidla, jejichž podmínková část je složena z více podmínek. Např. uvažme pravidlo:

IF A AND B THEN C

A, B, C jsou fuzzy množiny definované na (příslušných) universech X, Y, Z. Podmínková část pravidla je nyní dvourozměrná. Relace R je tedy reprezentována takto:

$$R = (A \times B) \rightarrow C$$

kde $A \times B$ je kartézský součin A a B. Spojka AND se interpretuje jako průnik, takže kartézský součin je realizován pomocí operace min. S použitím "min" pro "→" pak dostáváme:

$$\mu_R(x, y, z) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)$$

$$x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$$

Vznikne ternární relace R (třírozměrné pole).

Nechť existují pozorování A' a B'. Pak fuzzy závěr C' se spočítá jako:

$$C' = (A' \times B') \circ R$$

což po rozepsání obdobně jako v dvourozměrném případu dá následující výsledek:

$$\mu_C(z) = \max_x \max_y \Big(\big(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)\big) \wedge \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)\big)\Big) =$$

$$= \max_x \max_y \Big(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)\big)\Big) =$$

$$= \max_x \big(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(\overset{x}{\cancel{y}})\big) \wedge \max_y \big(\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)\big) \wedge \mu_C(z$$

$$= \xi \wedge \mu_C(z)$$

ověřte si za domácí úlohu

Obdobně lze zobecnit pravidlo pro lib. počet podmínek.

Kombinace dvou a více pravidel

Pravidla jsou kombinována pomocí spojky ELSE (někdy také označované OTHERWISE pro odlišení od „vylučovacího" chápání ELSE např. v systémech založených na klasické logice).

R_1: IF A_1 AND B_1 THEN C_1 ELSE
R_2: IF A_2 AND B_2 THEN C_2 ELSE
R_3: IF A_3 AND B_3 THEN C_3 ELSE ...

Interpretace ELSE záleží na tom, co od této spojky očekáváme.

Chápeme-li soubor fuzzy pravidel jako sjednocení částečných znalostí reprezentovaných individuálními pravidly, pak lze (jak se v praxi téměř výhradně děje) interpretovat ELSE jako spojku OR, která je nejčastěji realizována pomocí max:

$$R = R_1 \text{ OR } R_2 \text{ OR } \dots \text{ OR } R_m =$$

$$= R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

$$\mu_R = \max(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$$

Inference pomocí fuzzy pravidel

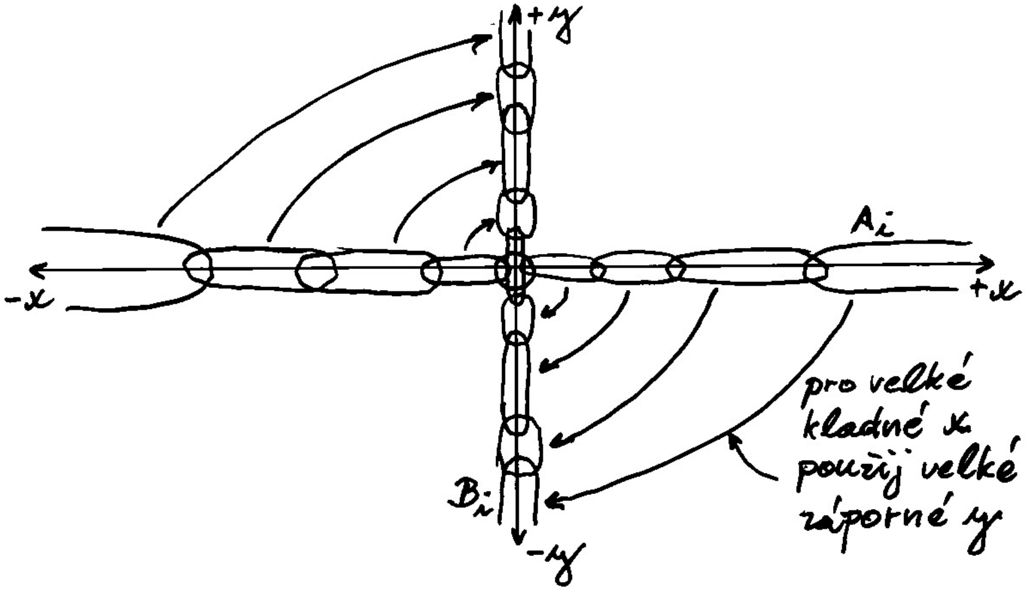
Jednoduchý případ: 1 vstupní proměnná, 1 výstupní:
Pravidlo (i-té z nějaké báze pravidel):

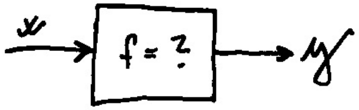
$$R_i: \text{ IF } x = A_i \text{ THEN } y = B_i$$

$$x \in X,\ y \in Y,\ A_i \subseteq X \times Y,\ B_i \subseteq X \times Y$$

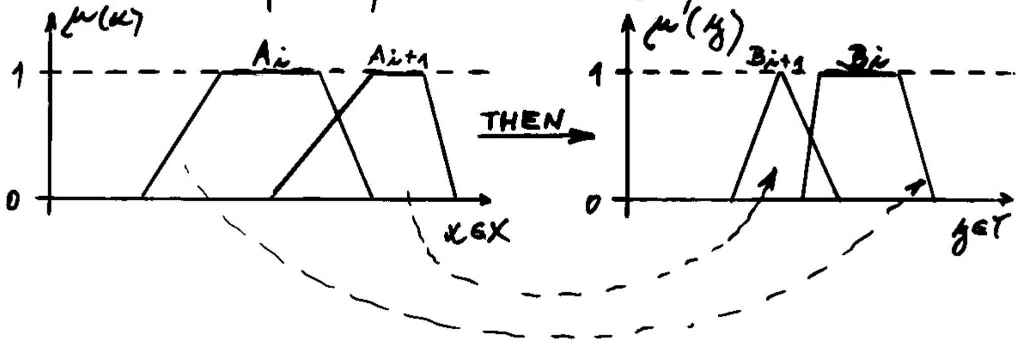
A_i, B_i jsou fuzzy množiny. $X \subseteq \mathbf{R}, Y \subseteq \mathbf{R}$ (obecně)

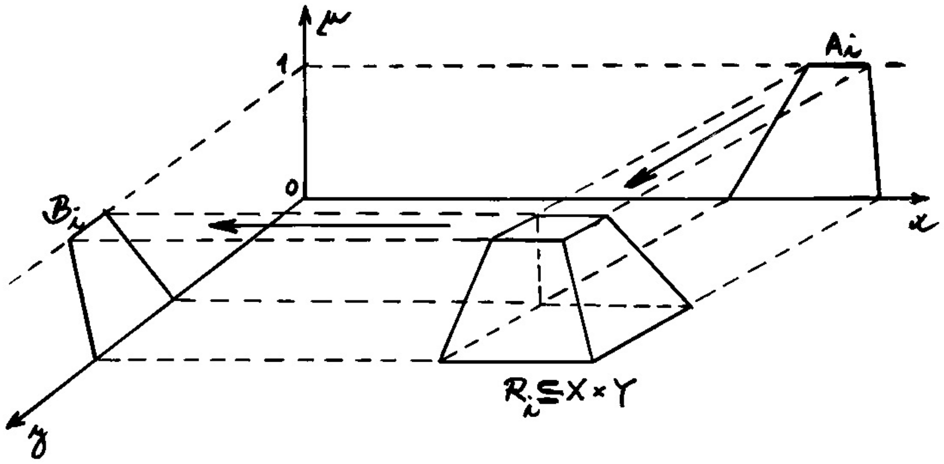
Pravidla aproximují neznámou nelineární závislost $y = f(x)$, kde jsou k dispozici pouze některé vstup/výstupní dvojice $\{A_i, B_i\}$, jejichž počet nemusí být velký (např. řádu $10^0, 10^1, 10^2$).





Pravidlo R_i (a R_{i+1}) lze pro názornost překreslit:





Logická spojka THEN může být implementována libovolnou t-normou (dává-li to smysl vzhledem ke konkrétní aplikaci). Nejběžnější implementace je pomocí minima $\wedge$. Často se používá i algebraický součin (někdy zvaný jako „Larsenův operátor").

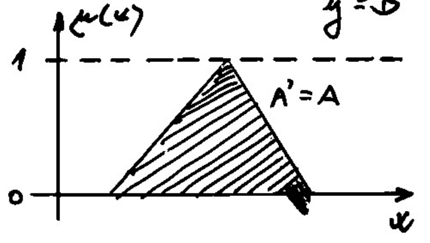
Pozn.: MT (GMT) je svázán se zpětnou inferencí řízenou cílem, která se často používá v medicínských expertních systémech (v diagnostice).

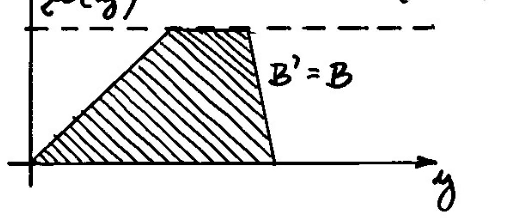
Nechť A, B, A' jsou fuzzy čísla. GMP splňuje některé rozumné předpoklady:

(1) základní vlastnost:

IF x je A THEN y = B
x je A
---
y = B

IF tlak = vysoký THEN objem = malý
tlak = vysoký
---
objem je malý





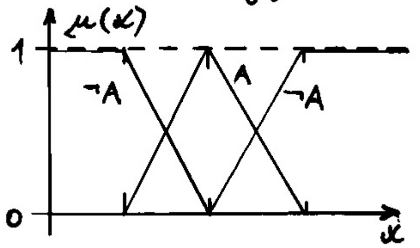
(2) Úplná indeterminence:

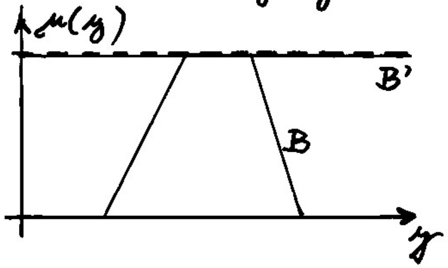
IF x je A THEN y je B
x je ¬A

∴ y je neznámé

IF tlak je vysoký THEN objem je malý
tlak není vysoký

∴ objem je neznámý





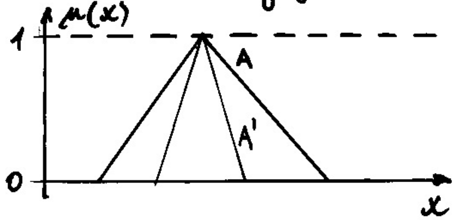
(3) Podmnožina:

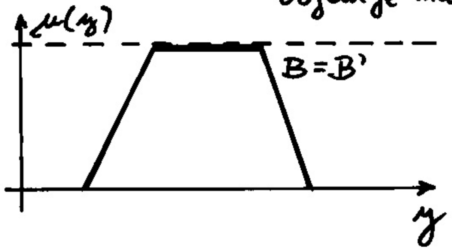
IF x je A THEN y je B
x je $A' \subset A$

$\therefore$ y je B

IF tlak je velký THEN objem je malý
tlak je velmi velký

$\therefore$ objem je malý

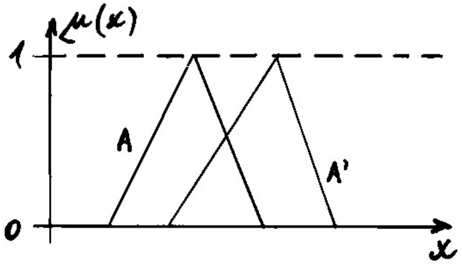


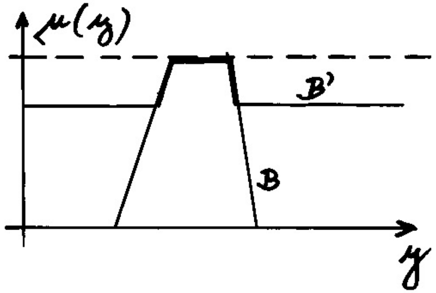


(4) Nadmnožina:

IF x je A THEN $y = B$
x je A'

$\therefore$ y je $B' \supset B$





Pozn.: Nejužívanější GMP s tzv. Mamdaniho implikací nesplňuje ~~[illegible]~~ některé ze čtyř výše uvedených vlastností:

Př.: GMP s Mamdaniho implikací:

IF x je A then y je B
x je A'

$\therefore$ y je B'

$B'(y)$ je definováno jako

$$B'(y) = \sup\{A'(x) \wedge A(x) \wedge B(y) \mid x \in R\}, \; y \in R$$

Základní vlastnost: nechť $A' = A$:

$$B'(y) = \cancel{\sup_x \min\{A(x), \min(A(x), B(y))\} =}$$

$$= \sup_x \min\{A(x), B(y)\} = \min\{B(y), \sup_x A(x)\} =$$

$$= \min\{B(y), 1\} = B(y) \text{ splněno}$$

Úplná indeterminence: nechť $A' = \neg A = 1 - A$

$$B'(y) = \sup_x \min\{1 - A(x), \min\{A(x), B(y)\}\} =$$

$$= \sup_x \min\{A(x), 1 - A(x), B(y)\} =$$

$$\boxed{= \min\{B(y), \sup_x \min\{A(x), 1 - A(x)\}\} =}$$

$$? \quad = \min\cancel{\{B(y), 1/2\}} = \underline{\tfrac{1}{2}}\cancel{B(y)} < 1 \text{ nesplněno}$$

Podmnožina: nechť $A' \subset A$

$$B'(y) = \sup_x \min\{A'(x), \min\{A(x), B(y)\}\} =$$

$$= \sup_x \min\{A(x), A'(x), B(y)\} =$$

$$= \min\{B(y), \sup_x A'(x)\} =$$

$$= \min\{B(y), 1\} = B(y)$$ splněno

Nadmnožina:

$$B'(y) = \sup_x \min\{A'(x), \min\{A(x), B(y)\}\} =$$

$$= \sup_x \min\{A(x), A'(x), B(y)\} \leq B(y)$$ nesplněno

Podobně např. pro Larsenovu implikaci:

základní vlastnost: nechť $A' = A$ $(x \in R, y \in R)$

$$B'(y) = \sup_x \min\{A(x), A(x)\cdot B(y)\} = B(y)$$ splněno

Úplná indeterminence: nechť $A' = \neg A = 1 - A$

$$B'(y) = \sup_x \min\{1-A(x), A(x)\cdot B(y)\} =$$

$$= \frac{B(y)}{1+B(y)} < 1$$ nesplněno

Podmnožina: nechť $A' \subset A$

$$B'(y) = \sup_x \min\{A'(x), A(x)\cdot B(y)\} =$$

$$= \sup_x \min\{A(x), A'(x)\cdot B(y)\} = B(y)$$ splněn

Nadmnožina:

$$B'(y) = \sup_x \min\{A'(x), A(x)\cdot B(y)\} \leq B(y)$$

nesplněno

Inference (fuzzy inference) vychází ze zobecněného modus ponens:

$$\left.\begin{array}{lllll} & & \text{premisa} & & \text{závěr} \\ R_1: & \text{IF} & x = A_1 & \text{THEN} & y = B_1 \\ R_2: & \text{IF} & x = A_2 & \text{THEN} & y = B_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ R_n: & \text{IF} & x = A_m & \text{THEN} & y = B_m \end{array}\right\} \text{propozice}$$

$$\begin{array}{lll} & x = A' & \qquad \text{fakt} \\ \hline \therefore & \qquad y = B' & \end{array}$$

Postup:

1. Zjistí (naměří ...) se fakt, že $x = A'$ ($A' \subseteq X$, $x \in X$), přičemž obvykle A' je ostrá hodnota.
2. Hledá se, která premisa (obecně premisy za předpokladu, že fuzzy množiny A_i se překrývají) odpovídá (je konsistentní s) faktu. Je-li konsistence > 0, pak se pravidlo uplatní (do míry ~~dané~~ založené na konsistenci).
3. Aktivované pravidlo R_i, u něhož došlo k částečné nebo úplné shodě mezi A' a A_i, přispěje k celkovému výsledku inference svou pravou stranou (konsekventem B_i), modifikovanou na základě míry konsistence mezi A_i a A', tj. pravidlo poskytne B'_i (obecně $B'_i \neq B_i$).
4. Individuální příspěvky B'_i jsou pomocí vhodného agregačního operátoru OTHERWISE akumulovány do celkového výsledku B' inferenčního kroku:

$$B' = \underset{i=1}{\overset{m}{\text{OTHERWISE}}}\, B'_i \qquad B' \subseteq Y,\ B'_i \subseteq Y$$

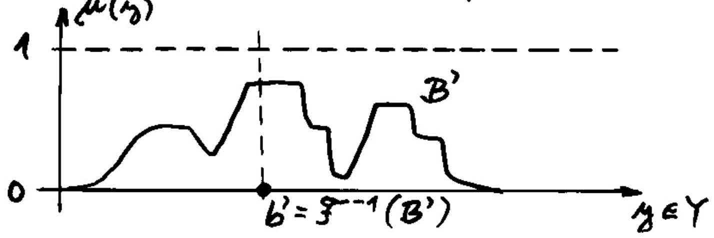
5. Obecně vznikne fuzzy množina B' (nemusí být normální a konvexní).

Výsledek je nutno vhodně (z hlediska aplikace) interpretovat.

Obecně je interpretace složité množiny B' (vzniklé kompozicí B_i, $i = 1, \dots, m$) obtížný. Lze např. výsledek převést na lingvistickou hodnotu, ale neexistuje exaktní návod, jak postupovat – interpretaci je nutno mít na paměti již při sestavování fuzzy modelu.

Často se B' transformuje na bod $b' \in Y$ pomocí tzv. defuzzifikace, což je postup, pro nějž rovněž neexistuje jednoznačný návod. Existují různé metody $b' = \mathcal{F}^{-1}(B')$.

Z b' obecně nelze zpětně stanovit B', tj. defuzzifikací se ztrácí informace:

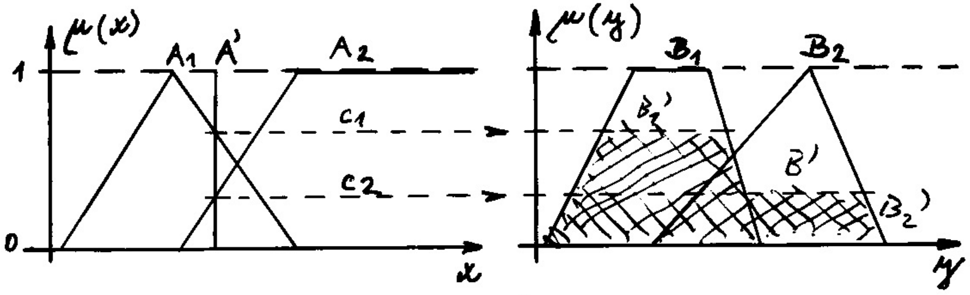


Defuzzifikace se většinou používá pro numerická universa Y; aplikace fuzzy inference na řízení procesů vyžadují defuzzifikaci vždy, protože reálné regulační elementy (ventily, ...) umí pracovat jen s ostrými hodnotami.

Př.: Předpokládejme pro jednoduchost, že existují pouze dvě pravidla:

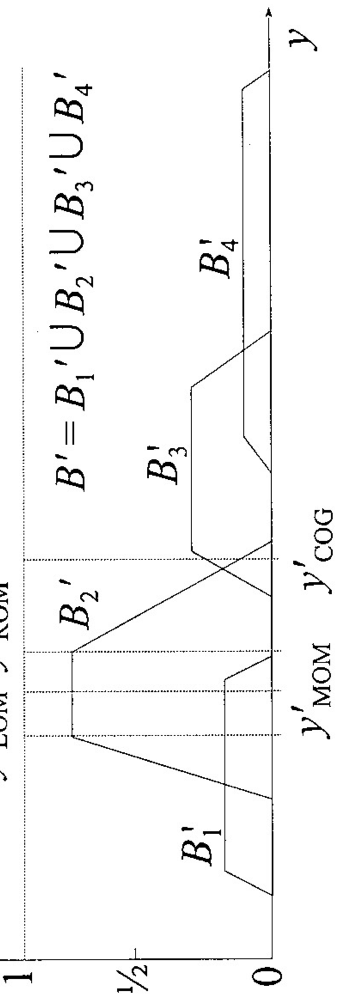
R_1 : IF $x = A_1$ THEN $y = B_1$

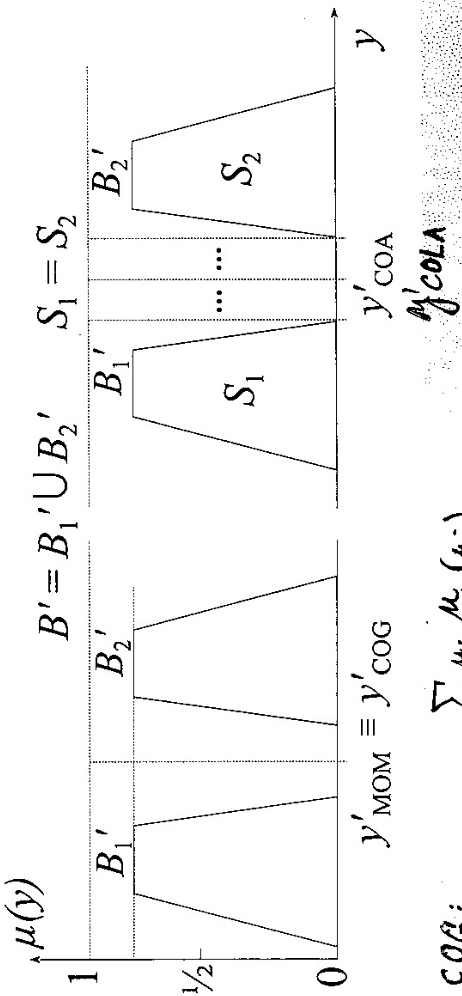
R_2 : IF $x = A_2$ THEN $y = B_2$



$B_1' = ?$ $B_2' = ?$ $B' = ?$ $\underline{\underline{\mathcal{F}^{-1}(B') = ?}}$

DEFUZZIFIKACE





<u>COG:</u>

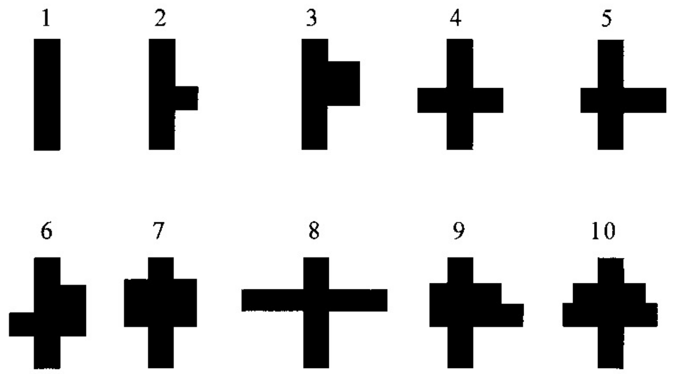
$$y'_{COG} = \frac{\sum_i y_i \, \mu_y(y_i)}{\sum_i \mu_y(y_i)}$$

FUZZY PRAVIDLA

Jako jednoduchý příklad operátorů fuzzy množin uvažme problém rozpoznávání vzorů. Vzory mohou reprezentovat objekty zkoumané z hlediska kvality, např. vyráběné součástky či sklízené ovoce. Jiným typem důležitého rozpoznávání vzorů jsou lékařské snímky, seismická data z minerálních a ropných průzkumů aj.

Následující tabulka ukazuje hypotetická data reprezentující stupeň příslušnosti do fuzzy množin raket, stíhaček a dopravních letadel, odpovídajících nějakým obrazcům. Takové obrazce mohou být vytvářeny laserovým televizním systémem na velké vzdálenosti a obsahovat nejistotu vlivem pohybu a orientace cíle, šumu apod.

obrazec	**stupeň příslušnosti**		
	raketa	**stíhačka**	**dopravní**
1	1.0	0.0	0.0
2	0.9	0.0	0.1
3	0.4	0.3	0.2
4	0.2	0.3	0.5
5	0.1	0.2	0.7
6	0.1	0.6	0.4
7	0.0	0.7	0.2
8	0.0	0.0	1.0
9	0.0	0.8	0.2
10	0.0	1.0	0.0



Sjednocení fuzzy množin lze považovat za reprezentaci pravidel typu

IF e THEN h

kde e je pozorovaný obrazec a h je sjednocení fuzzy množin. Například:

IF $\textit{obrazec}_4$ THEN $\textit{cíl}(0.2/R + 0.3/S + 0.5/D)$

kde *R*=*raketa*, *S*=*stíhačka* a *D*=*dopravní letadlo*. Výraz v závorce je sjednocená fuzzy množina cíle. Pravidlo může být případně vyjádřeno jako

IF $\textit{obrazec}_4$ THEN $\textit{cíl}_4$ kde $\textit{cíl}_4 = 0.2/R + 0.3/S + 0.5/D$

Předpokládejme, že je nějaký čas na provedení dalšího pozorování cíle a že získáme $\textit{obrazec}_6$:

IF $\textit{obrazec}_6$ THEN $\textit{cíl}_6$ kde $\textit{cíl}_6 = 0.1/R + 0.6/S + 0.4/D$

Všechny naměřené elementy cíle tedy jsou:

$$\begin{aligned}\textit{cíl} &= \textit{cíl}_4 + \textit{cíl}_6 = \\ &= 0.2/R + 0.3/S + 0.5/D + 0.1/R + 0.6/S + 0.4/D = \\ &= 0.2/R + 0.6/S + 0.5/D\end{aligned}$$

tj. ve sjednocení (fuzzy množině *cíl*) zůstaly pouze maximální stupně příslušnosti.

Je-li element s nejvyšším stupněm příslušnosti *interpretován* jako *nejvíce možný cíl* (nejvíce do úvahy připadající typ cíle), pak to bude stíhačka s hodnotou 0.6. Avšak kdyby dopravní letadlo mělo také stupeň příslušnosti do množiny *cíl* o velikosti = 0.6, pak by bylo třeba říci, že cíl je se stejnou *možností* stíhačka nebo dopravní letadlo.

Obecně, je-li dáno N pozorování a pravidel:

IF e_1 THEN h_1
IF e_2 THEN h_2
.
.
.
IF e_N THEN h_N

kde všechny h_i souvisejí s nějakou obecnou hypotézou h, pak sjednocení hypotéz h_i určuje stupeň příslušnosti h:

$$\mu_h = \max(\mu_{h1}, \mu_{h2}, \dots , \mu_{hN})$$

μ_h hypotézy h se nazývá pravdivostní hodnota h.

Je rozumné stanovit předpoklad, že pravdivost hypotézy nebude větší než pravdivost jejího antecedentu. Tedy:

$$\mu_h = \max(\mu_{h1}, \mu_{h2}, \dots , \mu_{hN}) = \max[\min(\mu_{e1}), \min(\mu_{e2}), \dots , \min(\mu_{eN})]$$

kde každé e_i může být nějakým fuzzy výrazem. Například e_1 by mohlo být definováno jako

$$e_1 = e_A \text{ AND } (e_B \text{ OR } \neg e_C)$$

a k vyhodnocení by se použily fuzzy operátory:

$$\mu e_1 = \min[\mu e_A, \max(\mu e_B, 1\text{-}\mu_{eC})]$$

Kombinovaný stupeň příslušnosti antecedentu se nazývá jako *pravdivostní hodnota antecedentu*.

Max-min kompozice

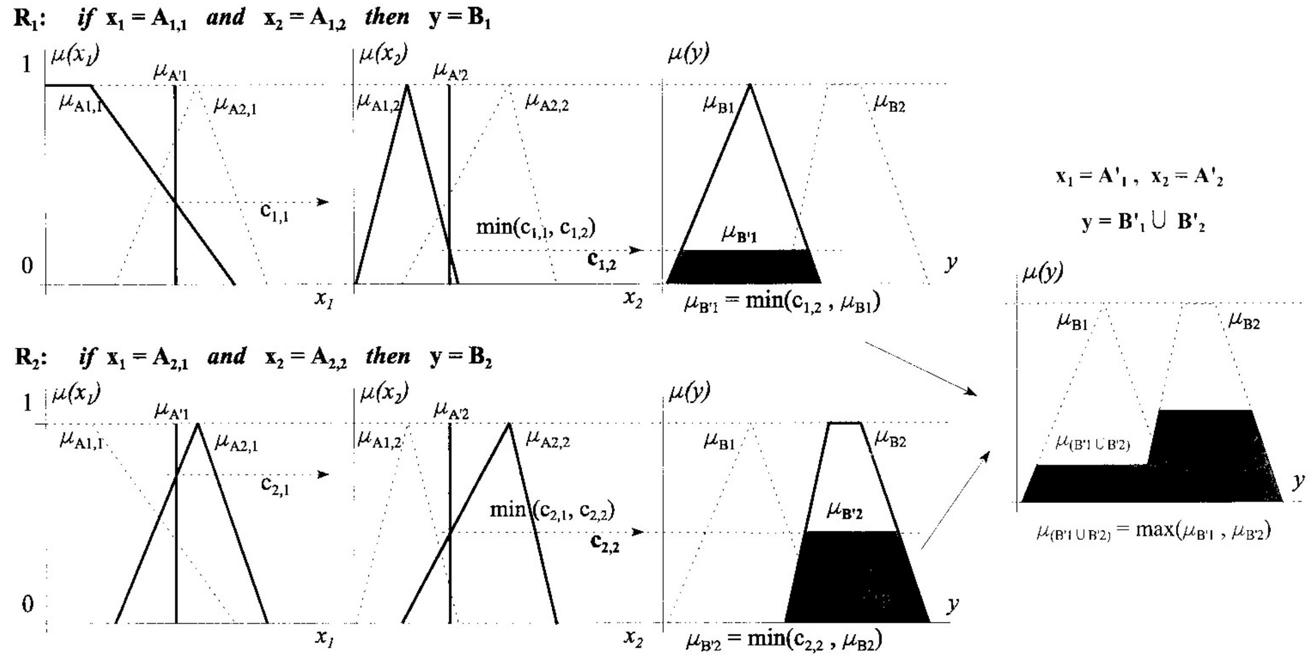
Uvedený vztah pro h je tzv. *max-min kompoziční pravidlo* fuzzy logiky (kompoziční pravidlo inference). V jednoduchém případě dvou důkazů na pravidlo:

IF e_{11} AND e_{12} THEN h_1
IF e_{21} AND e_{22} THEN h_2
.
.
.
IF e_{N1} AND e_{N2} THEN h_N

je max-min kompoziční pravidlo inference

$$\mu_H = \max[\min(\mu_{e11}, \mu_{e12}), \min(\mu_{e21}, \mu_{e22}), \dots , \min(\mu_{eN1}, \mu_{eN2})]$$

s obdobným rozšířením pro další důkazy e_{i3}, e_{i4} atd.



R_1: *if* $x_1 = A_{1,1}$ *and* $x_2 = A_{1,2}$ *then* $y = B_1$

R_2: *if* $x_1 = A_{2,1}$ *and* $x_2 = A_{2,2}$ *then* $y = B_2$

$\mu_{B'1} = \min(c_{1,2}, \mu_{B1})$

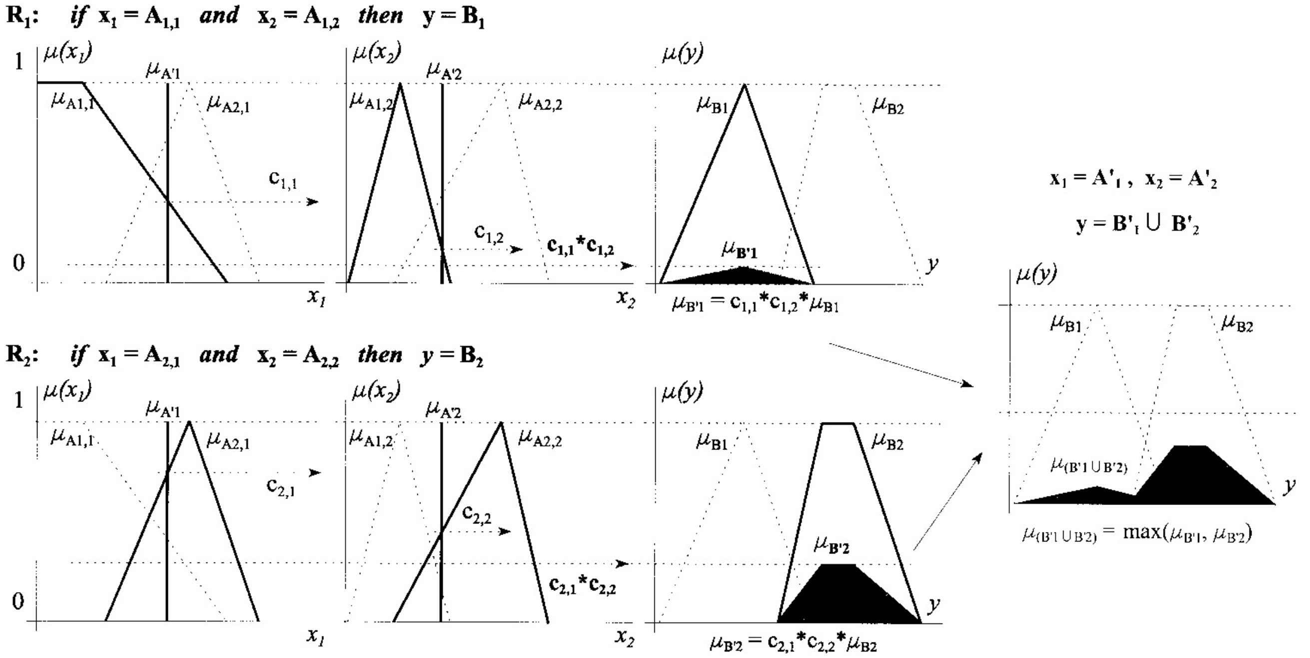
$\mu_{B'2} = \min(c_{2,2}, \mu_{B2})$

$x_1 = A'_1, \ x_2 = A'_2$

$y = B'_1 \cup B'_2$

$\mu_{(B'1 \cup B'2)} = \max(\mu_{B'1}, \mu_{B'2})$

Inference MIN-MAX



R_1: *if* $x_1 = A_{1,1}$ *and* $x_2 = A_{1,2}$ *then* $y = B_1$

R_2: *if* $x_1 = A_{2,1}$ *and* $x_2 = A_{2,2}$ *then* $y = B_2$

$\mu_{B'1} = c_{1,1} * c_{1,2} * \mu_{B1}$

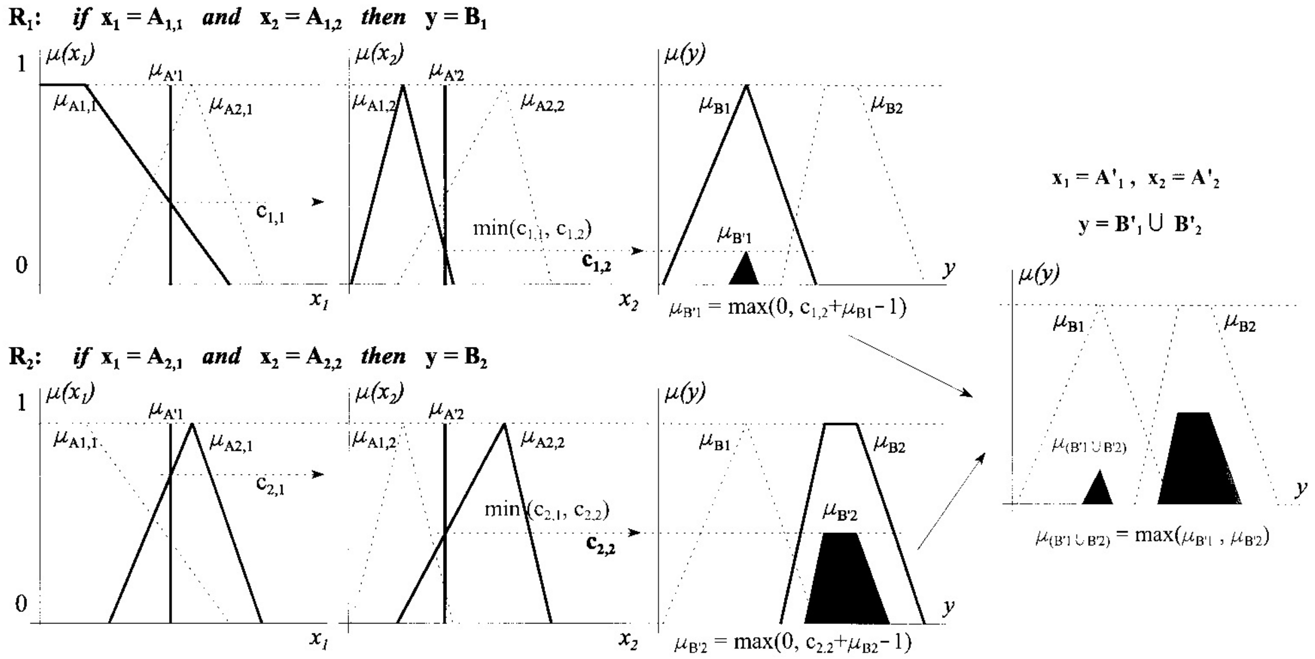
$\mu_{B'2} = c_{2,1} * c_{2,2} * \mu_{B2}$

$x_1 = A'_1, \ x_2 = A'_2$

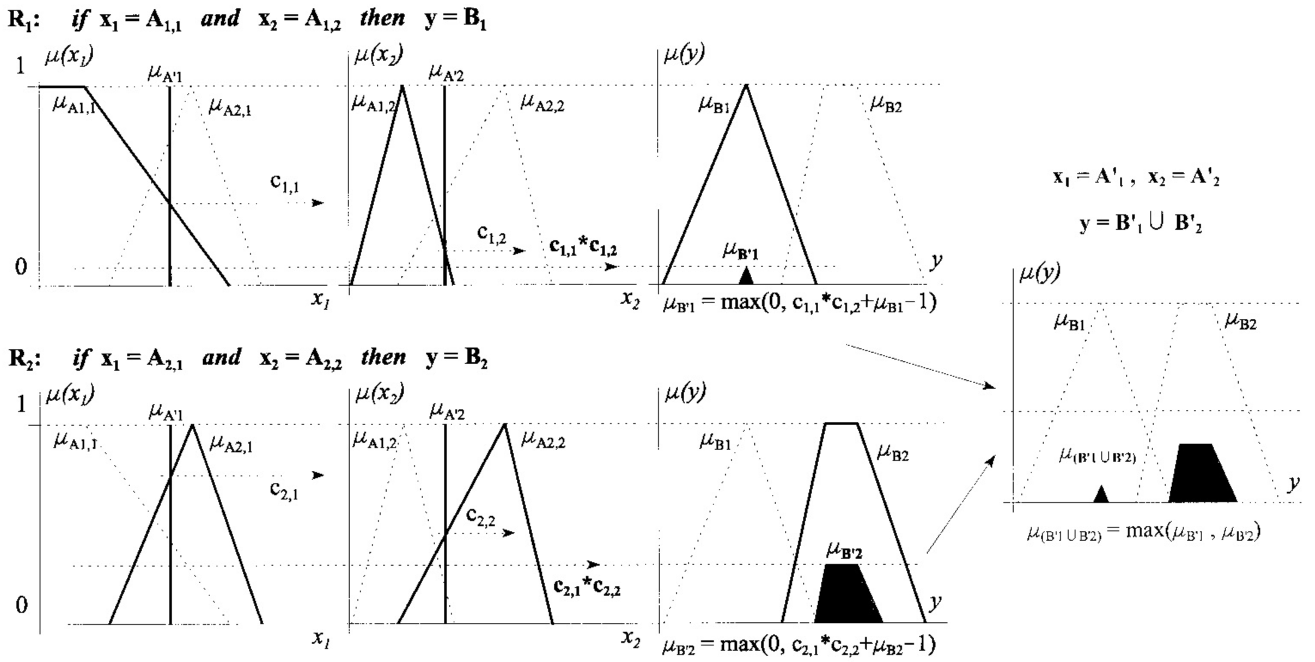
$y = B'_1 \cup B'_2$

$\mu_{(B'1 \cup B'2)} = \max(\mu_{B'1}, \mu_{B'2})$

Inference PROD-MAX



Inference MIN-BOLD



Inference PROD-BOLD

Metoda Takagiho a Sugena

Lze ji považovat za modifikaci Mamdaniho přístupu:

Vstupní domény se zpracují stejně jako u Mamdaniho.

Výstupní doména však není rozdělena pomocí fuzzy intervalů, nýbrž obsahuje ostré hodnoty (tj. přímo hodnoty řídicí akce). Není tedy zapotřebí defuzzifikace.

Tvar řídicího pravidla:

$$R_j: \ IF \ x_1 = A_{1j} \ AND \ \dots \ AND \ x_m = A_{mj}$$

$$THEN \ y = f_j(x_1, \dots, x_m) \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

f_j je mapování $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$

Obecně se předpokládá lineární funkce:

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = a_1^{(j)} x_1 + \dots + a_m^{(j)} x_m + a_0^{(j)}$$

Při aktivaci více pravidel se výsledná hodnota řídicí veličiny určí jako

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot f_j(x_1, \dots, x_m)}{\sum_{j=1}^{m} c_j}, \quad j = 1, \dots, m$$

Takagiho-Sugenův model

Takagiho-Sugenův inferenční model se formálně odlišuje od Mamdaniho metody tím, že pravé strany pravidel nejsou tvořeny fuzzy množinami, nýbrž obecně funkcemi vstupních proměnných $f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)$, které mapují kartézský součin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N \rightarrow Y$:

$$\text{IF} \quad x_1 \overset{je}{\bullet} A_{1j} \ \text{AND} \ x_2 \overset{je}{\bullet} A_{2j} \ \text{AND} \ \dots \ \text{AND} \ x_N \overset{je}{\bullet} A_{Nj}$$

$$\text{THEN} \ y = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Obvykle se používá lineární mapovací funkce vyjádřená následujícím vztahem:

$$f_j(x_1, x_2, \dots x_N) = q_{0j} + \sum_{i=1}^{N} q_{ij} x_i, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

případně zcela jednoduchá forma, kde je v každém pravidle na pravé straně konstanta:

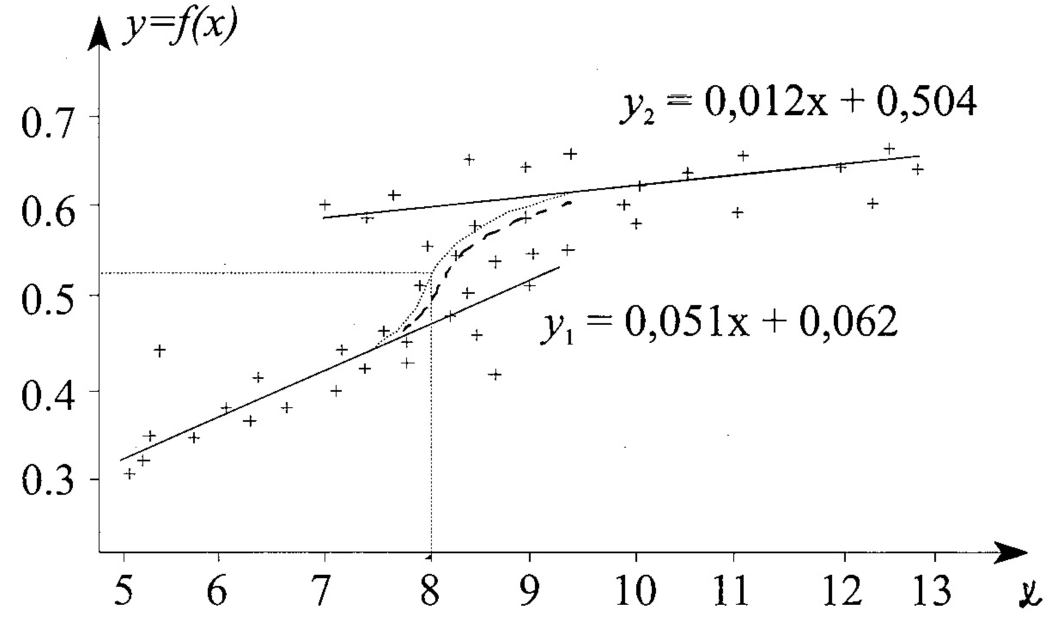
$$f_j(x_1, x_2, \dots x_N) = k_j, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

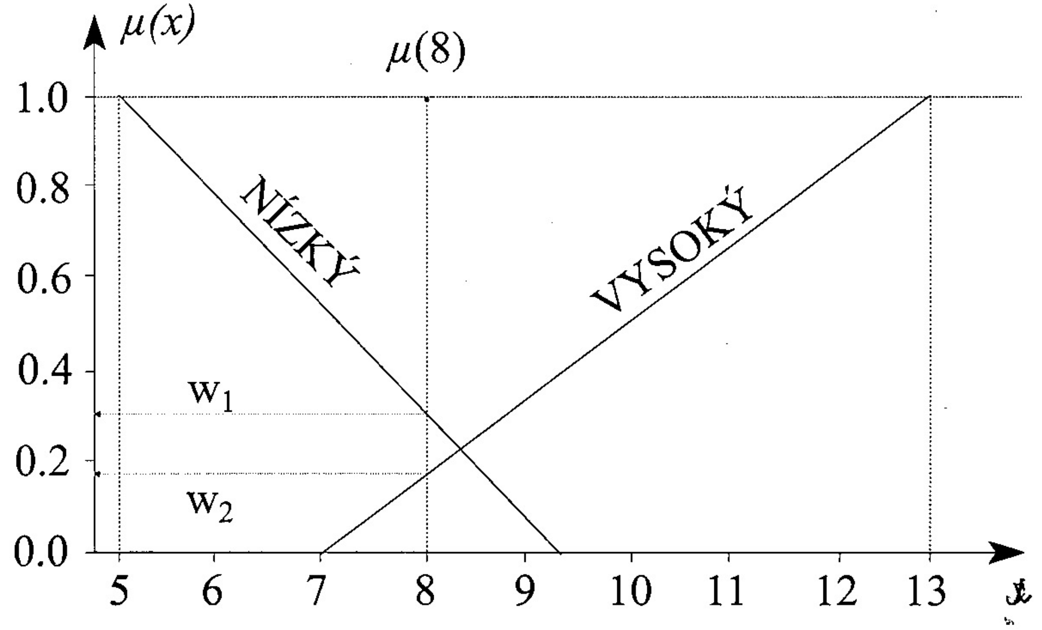
Odlišná forma konsekventu ovlivňuje způsob inference. Spojce THEN zde odpovídá algebraický součin, takže úhrnnou míru splnění podmíněné části j-tého pravidla ξ_j lze považovat za váhu, modifikující parciální příspěvek pravé strany pravidla. Protože na pravé straně pravidla nevystupuje fuzzy množina, nýbrž ostré číslo, není zapotřebí defuzzifikace. Přesto i zde zůstává problém řešení konfliktu pravidel, a to ze stejné příčiny jako u Mamdaniho metody. Je-li nutno stanovit celkový výsledek, složený z částečných příspěvků jednotlivých pravidel, spočítá se výsledná hodnota y' jako vážený aritmetický průměr příspěvků jednotlivých pravidel:

$$y' = \frac{\sum_{j=1}^{M} \xi_j * f_j(x_1, \ldots, x_N)}{\sum_{j=1}^{M} \xi_j}$$

Takagiho-Sugenův model je do jisté míry výpočtově jednodušší, neboť není nutno defuzzifikovat výsledek inference, což je obvykle náročná operace, avšak v praxi nemusí být vždy snadné určit koeficienty q_{ij} a tak definovat potřebné mapovací funkce. Přestože nejsou konsekventy pravých stran stanoveny formou částečně se překrývajících fuzzy množin, popsaná interpolační metoda využívající vážený aritmetický průměr umožňuje spojitou změnu výstupu obdobně jako v případě Mamdaniho modelu.

Sestavení a použití Takagi-Sugenova modelu lze ilustrovat následujícím postupem (hypotetický příklad je z důvodu srozumitelnosti a stručnosti velmi zjednodušen). Předpokládejme, že vztah mezi vstupní veličinou x a výstupní veličinou y je znám pouze pomocí řady uskutečněných měření tak, jak je zobrazen v horní části obrázku formou bodů vyznačených křížky. Závislost je nelineární a měření je ovlivněno šumem ve snímaných veličinách. Dále uvažujme, že zpracování naměřených dat umožnilo získat dvě regresní přímky y_1=0.045x+0.31 a y_2=0.013x+0.56, tj. vztah y=$f(x)$ je v tomto okamžiku modelován nespojitou lineární aproximací po částech. V oblasti hodnot přibližně $x \in [7, 9.5]$, nejvíce zatížených šumem při měření, je čárkovanou křivkou naznačena možnost aproximace neznámého nelineárního spojení obou lineárních funkcí. V popisovaném příkladu lze postupovat např. tak, že obor hodnot x se rozdělí na dvě části – nízké hodnoty, modelované fuzzy množinou NÍZKÝ, a vysoké hodnoty x, modelované fuzzy množinou VYSOKÝ (viz spodní část obrázku). Oblast překrytí obou fuzzy množin odpovídá té části universa, kde nebylo možno najít vhodnou lineární aproximaci, která by zároveň tvořila přechod mezi y_1 a y_2. Nyní již je možné stanovit přibližná fuzzy pravidla:





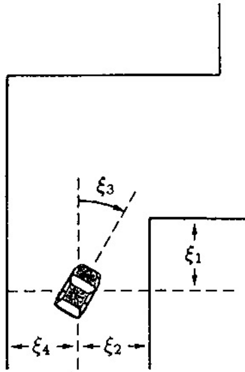
R_1: IF x is NÍZKÝ THEN $y = y_1 = 0{,}051x + 0{,}062$

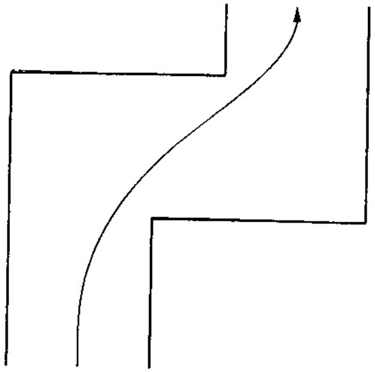
R_2: IF x is VYSOKÝ THEN $y = y_2 = 0{,}012x + 0{,}504$

Přijde-li na vstup např. hodnota x=8, která spadá do oblasti, kde nebylo možno stanovit regresní přímku, pak lze spočítat, že pro ilustrovanou situaci platí $\mu_{\text{NÍZKÝ}}(8)=0.31$ a $\mu_{\text{VYSOKÝ}}(8)=0.18$. Konkrétní hodnoty konsekventů budou tedy po dosazení y_1=0.47 a y_2=0.6. K výsledku přispívají obě pravidla a tento konflikt řeší váhovaný aritmetický průměr, kde váhami pro y_1 a y_2 jsou získané stupně příslušnosti 0.31 resp. 0.18:

$$y' = (0.31*0.47+0.18*0.6)/(0.31+0.18) \doteq 0.52.$$

O této hodnotě je možno říci, že vcelku odpovídá očekávání vzhledem k existující neurčitosti v popisu závislosti $y=f(x)$.





rule	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
R_1	–	–	outwards	small	3.000	0.000	0.000	-0.045	-0.004
R_2	–	–	forward	small	3.000	0.000	0.000	-0.030	-0.090
R_3	small	small	outwards	–	3.000	-0.041	0.004	0.000	0.000
R_4	small	small	forward	–	0.303	-0.026	0.061	-0.050	0.000
R_5	small	small	inwards	–	0.000	-0.025	0.070	-0.075	0.000
R_6	small	big	outwards	–	3.000	-0.066	0.000	-0.034	0.000
R_7	small	big	forward	–	2.990	-0.017	0.000	-0.021	0.000
R_8	small	big	inwards	–	1.500	0.025	0.000	-0.050	0.000
R_9	medium	small	outwards	–	3.000	-0.017	0.005	-0.036	0.000
R_{10}	medium	small	forward	–	0.053	-0.038	0.080	-0.034	0.000
R_{11}	medium	small	inwards	–	-1.220	-0.016	0.047	-0.018	0.000
R_{12}	medium	big	outwards	–	3.000	-0.027	0.000	-0.044	0.000
R_{13}	medium	big	forward	–	7.000	-0.049	0.000	-0.041	0.000
R_{14}	medium	big	inwards	–	4.000	-0.025	0.000	-0.100	0.000
R_{15}	big	small	outwards	–	0.370	0.000	0.000	-0.007	0.000
R_{16}	big	small	forward	–	-0.900	0.000	0.034	-0.030	0.000
R_{17}	big	small	inwards	–	-1.500	0.000	0.005	-0.100	0.000
R_{18}	big	big	outwards	–	1.000	0.000	0.000	-0.013	0.000
R_{19}	big	big	forward	–	0.000	0.000	0.000	-0.006	0.000
R_{20}	big	big	inwards	–	0.000	0.000	0.000	-0.010	0.000

R_i: $\underline{\text{if}}$ $\xi_1 = A$ $\underline{\text{and}}$ $\xi_2 = B$ $\underline{\text{and}}$ $\xi_3 = C$ $\underline{\text{and}}$ $\xi_4 = D$

$\underline{\text{then}}$ $\eta = p_0 + p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + p_4 \xi_4$

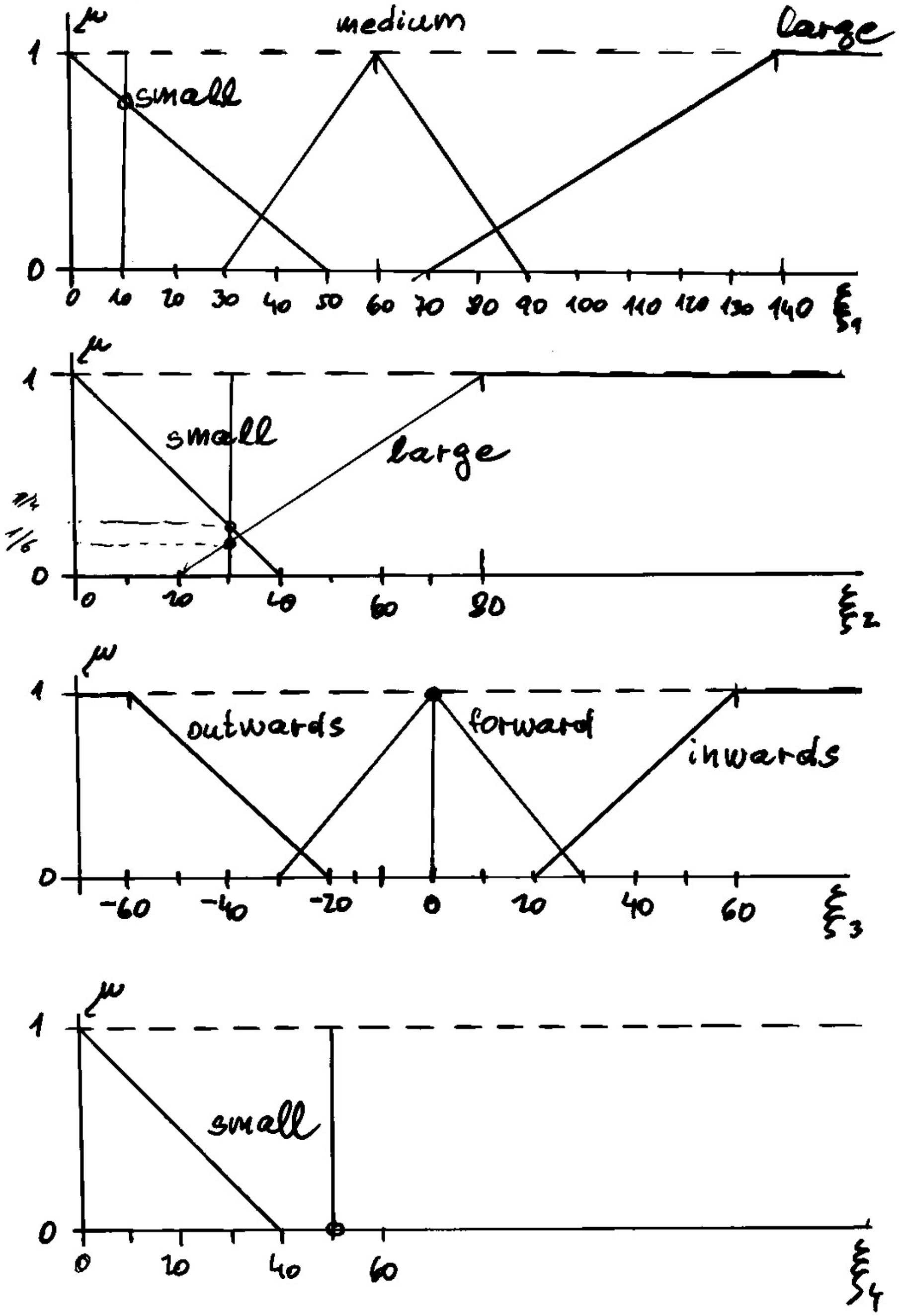
$A \in \{\text{small, medium, big}\}$

$B \in \{\text{small, big}\}$

$C \in \{\text{outwards, forward, inwards}\}$

$D \in \{\text{small}\}$ $p_i \in R, \ i = 1, 2, 3, 4$

| aktuální hodnoty



Příklad určité situace

Předp., že $\xi_1 = 10cm$, $\xi_2 = 30cm$, $\xi_3 = 0°$ ("vpřed!"), $\xi_4 = 50 cm$.

Z pravidel R_1 až R_{20} se uplatní pouze pravidla R_4 až R_7:

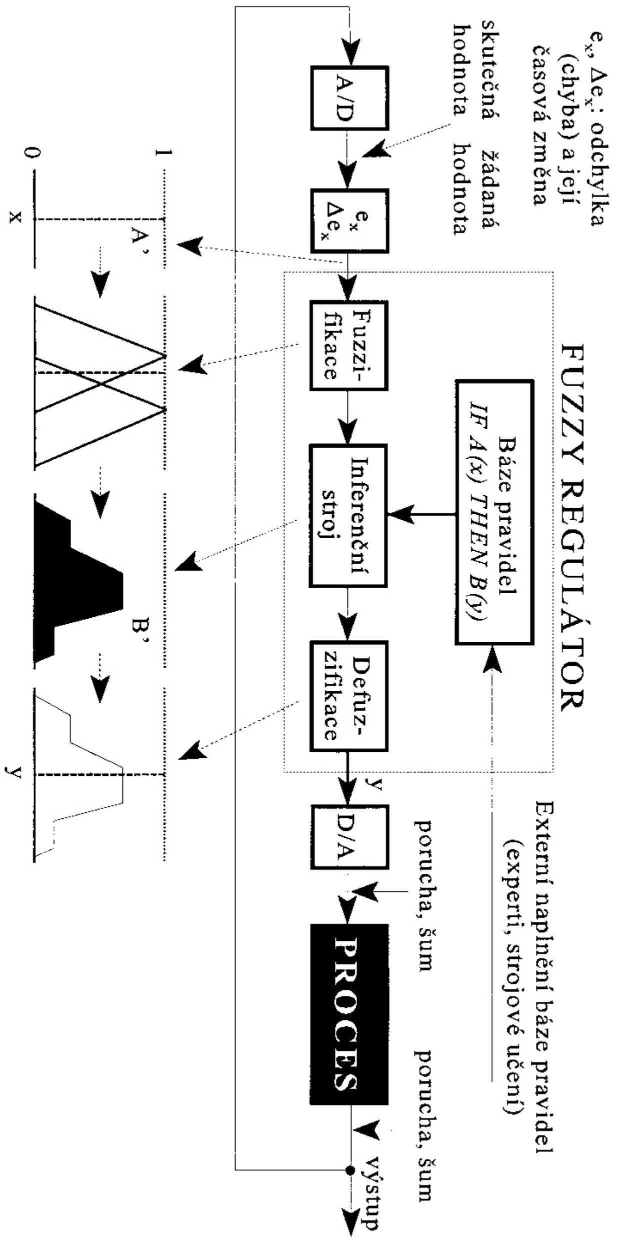
$c_4 = 1/4$, $c_7 = 1/6$

$$y'_4 = 0.303 - 0.026 \cdot 10 + 0.061 \cdot 30 - 0.050 \cdot 0 + 0 \cdot 50 =$$
$$= 1.873$$

$$y'_7 = 2.99 - 0.017 \cdot 10 + 0 \cdot 30 - 0.021 \cdot 0 + 0 \cdot 50 =$$
$$= 2.82$$

$$y = \underbrace{\overset{w_4}{\frac{3}{5}} \cdot 1.873} + \overbrace{\overset{w_7}{\frac{2}{5}} \cdot 2.820} = 2.2518$$

$$w_4 = \frac{\overset{c_4}{\frac{1}{4}}}{\underset{c_4}{\frac{1}{4}} + \underset{c_7}{\frac{1}{6}}} = \frac{3}{5} \qquad w_7 = \frac{\overset{c_7}{\frac{1}{6}}}{\underset{c_4}{\frac{1}{4}} + \underset{c_7}{\frac{1}{6}}} = \frac{2}{5}$$



Řízení cementárenské vypalovací pece pomocí fuzzy logiky u společnosti ENCI v Maastrichtu (Nizozemí)

Cílem optimálního procesu bylo:

- maximální produkce cementu
- konstantně vysoká kvalita
- co nejnižší výrobní náklady

Sekundární cíle:

- produkce nejméně po dobu 85% celkového času
- redukce odstávek o 25%
- vzrůst produkce nejméně o 3%
- úspory energie
- redukce emisí
- redukce spotřeby ohnivzdorných materiálů
- zvýšení využití vypalovací pece
- zvýšení kvality cementu

Fyzikálně-chemický model, potřebný pro vývoj klasického řídicího systému, nebylo možné v rozumné době vyvinout (jedná se o směsi, nikoliv o chemikálie; existuje mnoho proměnných s nejasnou vzájemnou korelací, apod.).

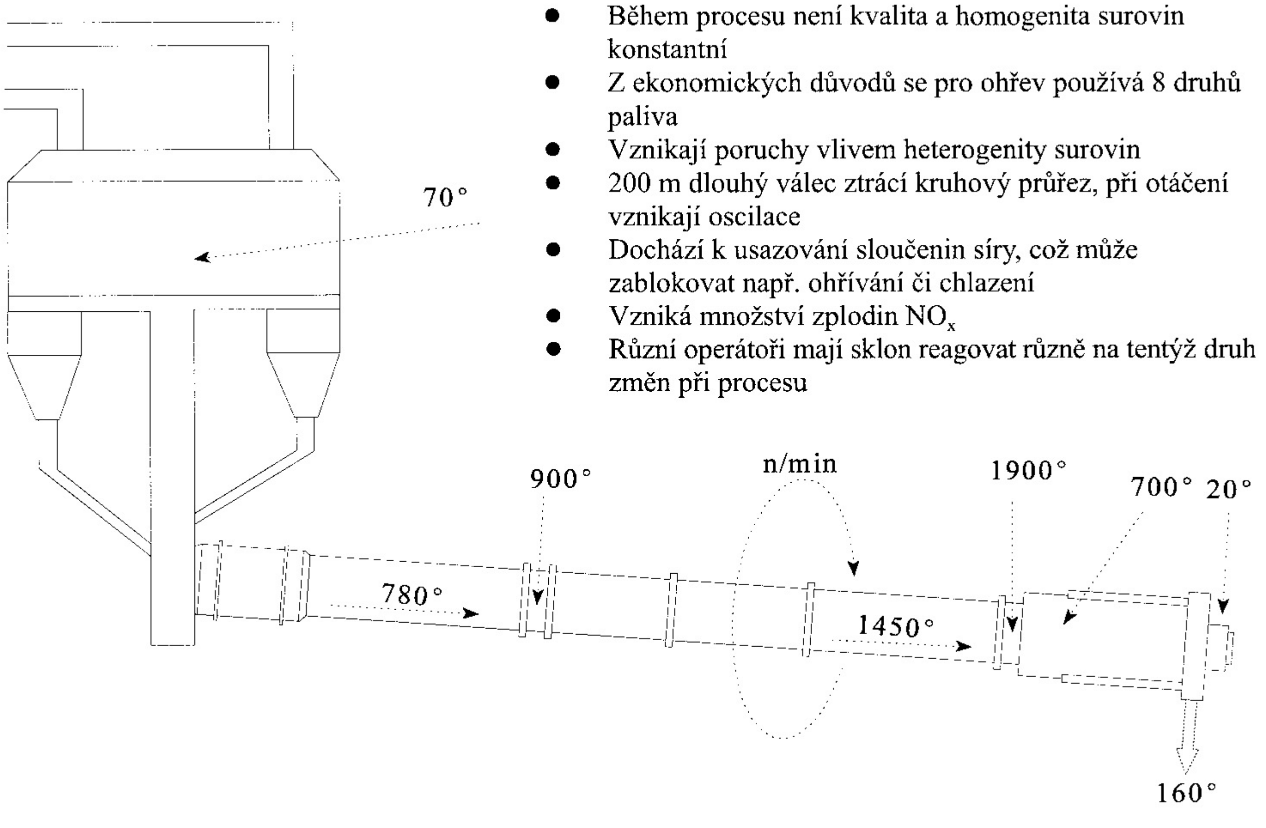
Řídicí model systému rovněž nebylo možné vyvinout v době, kdy by se dal prakticky využít.

Bylo zvoleno řešení využít fuzzy modelování chování zkušených operátorů (Zadehova teorie fuzzy logiky a fuzzy množin). Fuzzy logika umožňuje počítačům pracovat s přibližnými hodnotami (*nadměrná spotřeba paliva, nedostatečný obsah kyslíku, malá změna veličiny...*). Udávaná cena projektu byla zhruba 600 000 HFl.

Cementárna v St.Pietersberg u Maastrichtu (Nizozemí) společnosti ENCI (Eerste Nederlandse Cement Industrie). Výroba cementu je řízena fuzzy logikou v kombinaci s klasickým řízením. Fuzzylogický řídicí systém pochází od dánské fimy FLS Automation v Kodani.

Kromě celkového zvýšení produkce o cca 3% byly sníženy náklady na spotřebu energie, na údržbu (prodloužením jednoho výrobního cyklu), a sníženy emise NO_x a SO_2. Návratnost nákladů byla 1 rok.

- Během procesu není kvalita a homogenita surovin konstantní
- Z ekonomických důvodů se pro ohřev používá 8 druhů paliva
- Vznikají poruchy vlivem heterogenity surovin
- 200 m dlouhý válec ztrácí kruhový průřez, při otáčení vznikají oscilace
- Dochází k usazování sloučenin síry, což může zablokovat např. ohřívání či chlazení
- Vzniká množství zplodin NO_x
- Různí operátoři mají sklon reagovat různě na tentýž druh změn při procesu



PRINCIP ROZŠÍŘENÍ

Princip rozíření poskytuje obecnou metodu, jak rozšířit doménu dané ostré funkce tak, aby zahrnovala i fuzzy množiny. Tím je umožněno rozšíření klasických výpočtů na výpočty s fuzzy množinami modelujícími přibližné hodnoty proměnných. Použití principu rozšíření zpřístupňuje využití fuzzy množin ve všech oblastech.

Nechť jsou dány fuzzy množiny $A_i \subseteq X_i$ definované na příslušných universech (i=1, 2, . . . , n). Dále nechť $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je nefuzzy (ostrá) mapovací funkce f: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. Cílem je rozšířit f tak, aby operovala i s A_i a jako výsledek vracela fuzzy množinu $F \subseteq Y$.

Definice (rozšíření): Výsledná funkce příslušnosti $\mu_F(y)$, $y \in Y$, se po aplikaci ostré funkce f na fuzzy argumenty A_i stanoví následovně:

$$\mu_F(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \dots x_n \\ y=f(x_1, x_2, \dots x_n)}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$$

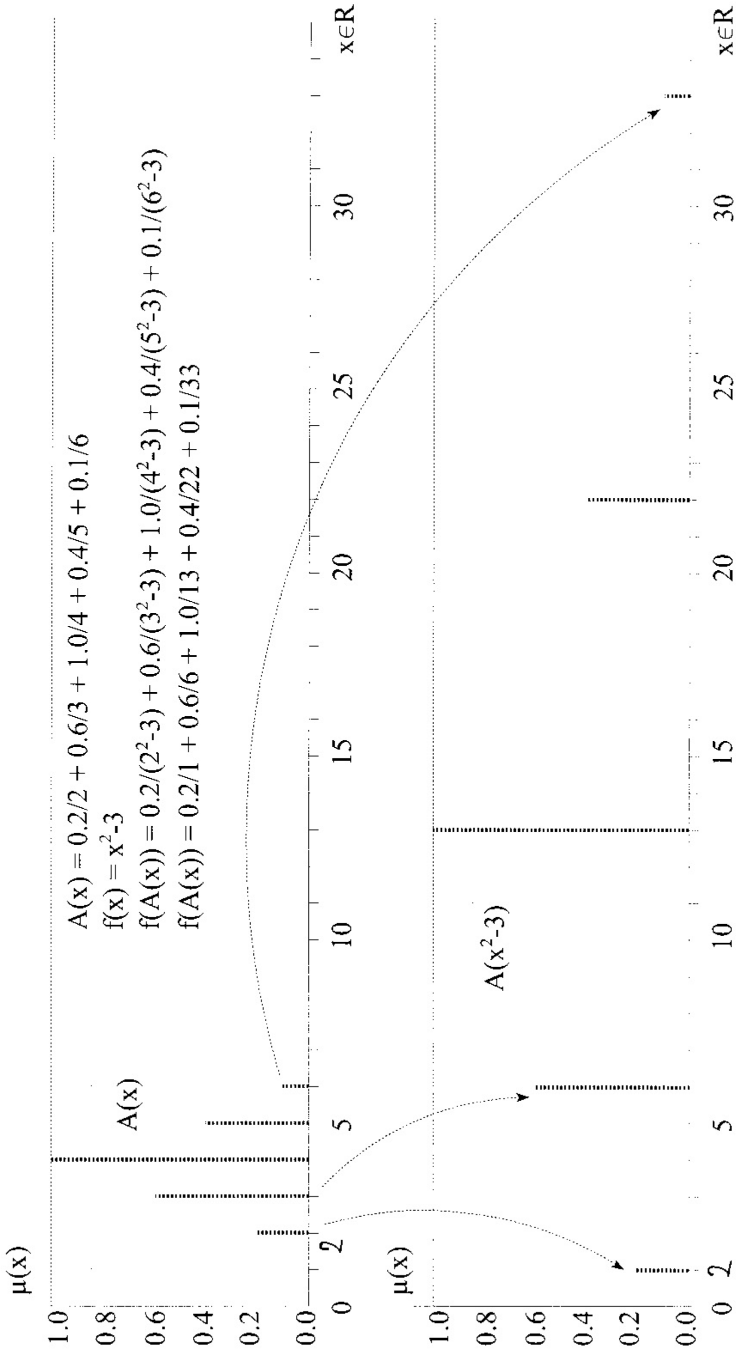
$(\sup \emptyset \overset{def}{=} 0$ ... předpoklad$)$

za předpokladu, že existuje $f^{-1}(y)$, jinak $\mu_F(y)$=0.

Jiný způsob získání výsledné fuzzy množiny F je pomocí sjednocení:

zde symbolizuje sjednocení !

$$F = \int_{X_1 \times \dots \times X_n} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) / f(x_1, \dots, x_n)$$



MOŽNOST A PRAVDĚPODOBNOST

Termín ***možnost*** má ve fuzzy teorii zvláštní význam. Možnost se v podstatě vztahuje na povolené hodnoty. Např. předpokládejme, že propozice p je definována vzhledem k vrhům dvěma kostkami na universu U jejich součtu:

$$p = x \in U, \quad U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Ve fuzzy terminologii platí pro každé i typu integer:

$\text{Poss}(x{=}i) = 1$ pro $2 \le i \le 12$
$\text{Poss}(x{=}i) = 0$ pro ostatní i

kde $\text{Poss}(x{=}i)$ označuje "Možnost, že x může nabýt hodnotu i".

Možnost se velice liší od pravděpodobnosti. Distribuce možnosti není totéž jako distribuce pravděpodobnosti. Distribuce pravděpodobnosti pro vrhy kostkami je frekvence očekávaných výskytů hodnot náhodné proměnné x (součtu bodů na obou kostkách).

Např. 7 se může vyskytnout jako 1+6, 2+5 a 3+4, takže pravděpodobnost, že při hodu bude součet = 7 je 2*3/36 = 1/6, zatímco pravděpodobnost, že při hodu bude součet = 2 je 1/36.

Oproti tomu je zde distribuce možnosti konstantní hodnota = 1 (pro nezfalšované kostky) pro všechna čísla typu integer od 2 do 12 (tj. při hodu kostkou je každý ze součtů $\in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ naprosto možný). Propozice p indukuje *distribuci možnosti* Π_x. Znamená to, že pro danou [redacted]i [redacted] fuzzy množinu F a jazykovou proměnnou X je propozice p definována takto:

$p = X$ je F např. p = výška je malý

Je-li propozice p vyjádřena uvedenou formou, říkáme, že se nachází v kanonické formě. Fuzzy množina F je *fuzzy predikát* (F ovšem může být i fuzzy relací).

Příklad: uvažme propozici přirozeného jazyka:

p = Pepa je vysoký

Kanonická forma "X je F" je reprezentována v termínech proměnné *výška*:

výška(Pepa) je *VYSOKÝ*

(*výška* je zde jazyková proměnná). Tedy,

$$\text{Poss}(\textit{výška}(\text{Pepa}) = x) = \mu_{\textit{VYSOKÝ}}(x)$$

Jako distribuci možnosti lze propozici p zapsat takto:

$$\text{Pepa je vysoký} \to \Pi_{\textit{výška}(\text{Pepa})} = \textit{VYSOKÝ}$$

kde symbol šipky znamená "převedeno na", *výška* je jazyková proměnná a *VYSOKÝ* je fuzzy množina.

Rozdíl mezi pravděpodobností a možností lze ilustrovat např. následujícím příkladem:

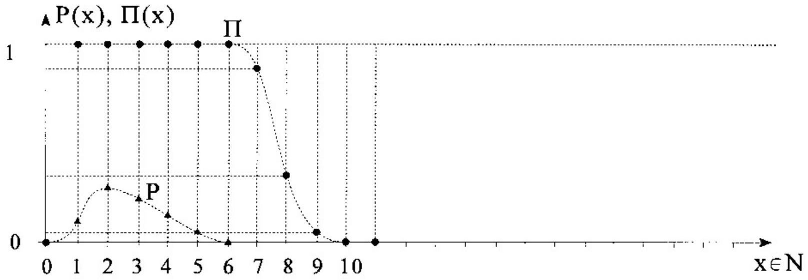
> Jaká je *pravděpodobnost*, že v normálním pětimístném osobním autě jede 9 pasažérů? A jaká je *možnost* takového jevu?

Kdybychom chtěli zjistit pravděpodobnost (a posteriori), tak bychom si asi museli stoupnout někam k silnici a zaznamenávat, kolik osob jede v každém automobilu, který vyhovuje našemu případu. Distribuci pravděpodobností pro 1, 2, atd. osoby na automobil pak získáme z četností pozorovaných případů. Může se stát, že ani po dlouhém pozorování silnic nezjistíme 9 osob v jednom automobilu, takže pravděpodobnost jevu

$$P(\text{9 osob v autě}) = 0$$

protože se jev nikdy během pozorování neuskutečnil.

Lze si ovšem docela dobře představit, že by se 9 lidí nějakým (nepříliš pohodlným způsobem) do auta naskládalo, tedy že takový jev není nemožný, i když se nám ho nepodařilo zaznamenat. V takovém případě (možného jevu – i třebas zcela subjektivně možného, protože názory se mohou lišit) lze přiřadit jevu E=(9 osob) nějakou numerickou hodnotu, vyjadřující stupeň uskutečnitelnosti (tj. míru možnosti) $\in [0, 1]$. Proto platí, že vztah mezi pravděpodobností $P(x)$ a možností $\Pi(x)$ je: $0 \le P(x) \le \Pi(x) \le 1$, tedy možnost je vždy větší nebo rovna pravděpodobnosti. Nulovou hodnotu možnosti přiřazujeme pouze nemožným jevům.



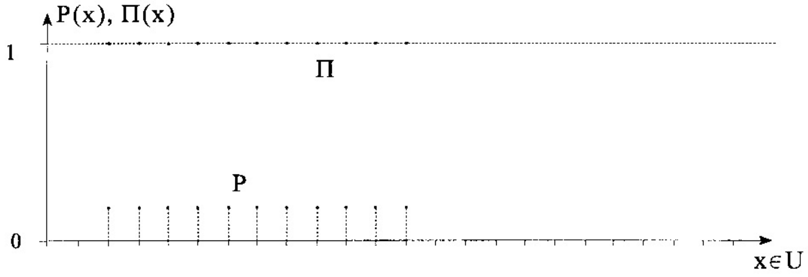
Distribuce pravděpodobnosti P a možnosti Π téhož diskrétního jevu, že v pětimístném osobním autě pojede určitý počet osob

Poznámka: existuje rozšíření pojmu pravděpodobnosti také do fuzzy domény, takže dostáváme obecnější nástroj *fuzzy pravděpodobnost*. Fuzzy pravděpodobnost popisuje pravděpodobnosti, jejichž hodnota je známa nepřesně, vágně, přibližně.

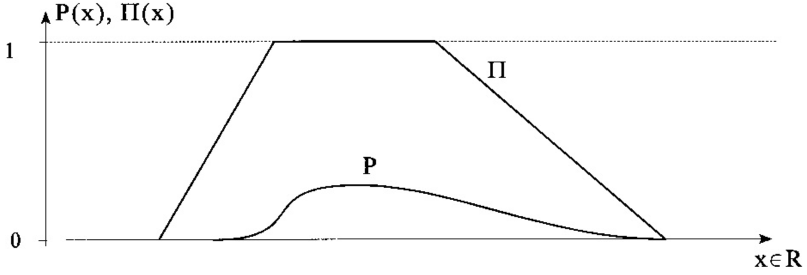
Pravděpodobnost je reálné číslo, které (je-li vágní) lze modelovat pomocí fuzzy čísla:

pravděpodobnost nákazy touto nemocí je přibližně 0.015
pravděpodobnost havárie je *nepatrná*
pravděpodobnost, že akumulátor je vybitý, je *značně vysoká*

Možnost má charakter *nestatistický*, zatímco pravděpodobnost naopak *statistický*. I když je možné, že pan X. Y. sní na snídani 5 vajec, dlouhodobá pozorování indikují, že nikdy zatím nesnědl víc než 3.



Distribuce pravděpodobnosti P a možnosti Π téhož diskrétního jevu



Distribuce pravděpodobnosti P a možnosti Π téhož spojitého jevu

Distribuce možnosti indukovaná p je rovna fuzzy množině F a je definována následujícím přiřazením:

$$\Pi_X = F$$

což znamená, že pro všechny hodnoty $x \in U$, Poss(X=x) = $\mu_F(x)$, $x \in U$.