

Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

1 Okruhy

Komplexní čísla

1. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.
2. Nalezněte rovnici, jejíž komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v i .
3. Řešte v \mathbb{C} kvadratickou rovnici $x^2 + (1 + 3i)x + i - 2 = 0$.
- 4.* Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Okruhy, podokruhy

5. Rozhodněte, zda množina M je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:
 - a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$,
 - b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$,
 - c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$,
 - d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$,
 - e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$,
 - f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.
6. Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo a pro
 - a) $a = \sqrt{3}$,
 - b) $a = \sqrt[5]{2}$,
 - c) $a = i$,
 - d) $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \xi_3$,
 - e) $a = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \xi_7$,
 - f) $a = \pi$,
 - g) $a = \sqrt{n}$,
 - h) $a = \sqrt[3]{n}$,
 - i) $a = \sqrt{ni}$.
7. Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh i
 - a) $(R, +, \square)$, kde \square je operace definovaná vztahem $a \square b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$,
 - b) $(R, +, +)$.

Obory integrity, invertibilní prvky okruhů, tělesa

8. Rozhodněte, zda následující podmnožina A okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
 - a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$
 - b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
 - c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
9. Rozhodněte, zda následující podmnožina M okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je okruh, obor integrity, popřípadě těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
 - a) $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
 - b) $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
 - c) $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
 - d) $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

10. Rozhodněte, zda je (M, \oplus, \odot) okruh, obor integrity, těleso:

- a) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$
- b) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x + y - xy$
- c) $M = \mathbb{Q}$, operace jako v b)
- d) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$
- e) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$

11.* Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

12.* Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahující daný prvek.

Homomorfismy okruhů

13. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované takto:

- a) $f(a + bi) = a + b$,
- b) $f(a + bi) = a^2 + b^2$,
- c) $f(a + bi) = a - bi$,

pro $a, b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je f homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

14.* Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

15. Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

16. Určete všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$, pro $r, s \in \mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ okruhu \mathbb{C} do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

17.* Bud' $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

2 Polynomy

Dělení v okruzích polynomů

18. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

- a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$,
- b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$,
- c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$,
- d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

19. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

- a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$,
- b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$.

Kořeny polynomů

20. Uvažme polynom $f = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem a určete jeho násobnost.

21. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

22. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$

- a) dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$,
- b) trojnásobným kořenem polynomu $x^{2n} - nx^{n+1} + (n+1)x^{n-1} - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

23. Vyjádřete polynom $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

24. Vyjádřete polynom $f = (x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

Racionální kořeny polynomů

25. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

- a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$
- b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$
- c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$
- d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$
- e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$
- f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$
- g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
- i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
- j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
- k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
- l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
- m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
- n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$
- o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$
- p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$
- q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$
- r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

26. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

27. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro která má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen.

Rozklad polynomů

28. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

- a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
- b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
- c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
- d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
- e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
- f) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
- g) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

29. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

30. Určete všechny kořeny polynomu

- a) $f = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,
- b) $f = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$,

víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Komplexně sdružené kořeny

31. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

32. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

33. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

34. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen

- a) $1 - i$,
- b) $1 - 2i$,

nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

35. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

36. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f .

37. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

- a) $1 + i$,
- b) $2 + \sqrt{3}i$,
- c) $\sqrt{3} - 5i$.

Polynomy nad \mathbb{Z}_p

38. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v \mathbb{Z}_7 .

39. Určete všechny ireducibilní polynomy

- a) nad \mathbb{Z}_2 stupně menšího než 5,
- b) nad \mathbb{Z}_3 stupně menšího než 4.

40. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.

41. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad \mathbb{Z}_5 .

42. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad \mathbb{Z}_7 .

43. Udejte příklad polynomu

- a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá,
- b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
- e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny.

44. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

- a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- e*) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
- f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
- g*) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Eisensteinovo kritérium *

45. Ukažte, že polynom

- a) $x^n + p$, kde $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,
- b) $x^6 + x^3 + 1$,

je ireducibilní nad \mathbb{Q} .

46. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x^2 - n$ je ireducibilní, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

47. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $x^n + n$

- a) byl
 - b) nebyl
- ireducibilní nad \mathbb{Q} .

48. Určete, který z polynomů $f = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad \mathbb{Z} a který lze rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad \mathbb{Z} .

Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost

49. Nalezněte polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je

- a) $x^2 + x - 6$,
- b) $x^2 + x - 2$,
- c) $x^2 + 2x - 3$.

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

50. Nalezněte polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je

- a) $x^2 + x - 2$,
- b) $x^2 + 2x - 3$,
- c) $x^2 - 2x - 3$.

Vyjádřete tento největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

51. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

- a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$
- b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
- c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

Násobné kořeny *

52. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu

- a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,
- b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,
- c) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x + 1$,
- d) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

53. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom

- a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,
- b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.
- c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.
- d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.
- e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.
- f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

54. Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad \mathbb{Q} .

a) $\frac{x^2 - x + 1}{x^6 + 2x^4 + x^2}$

b) $\frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 2}{x^6 - 2x^3 + 1}$

c) $\frac{3x^4 + 3x^2 - 7x - 7}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x - 12}$

d) $\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^6 - 10x^3 + 25}$

e) $\frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8}$

f) $\frac{4x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7}{x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 9x - 18}$

g) $\frac{8x^3 - 9x^2 - 18x + 22}{4x^4 - 16x^3 + 25x^2 - 21x + 9}$

h) $\frac{21x^3 - 16x^2 - 12x + 1}{9x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 11x + 2}$

i) $\frac{3x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 7x - 7}{2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x + 4}$

j) $\frac{8x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 6}{3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 2x - 2}$

k) $\frac{5x^3 + 7x^2 - 6x - 10}{x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x + 16}$

l) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 16}{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$