Úlohy o lineárních zobrazeních vektorových prostorů

Úloha 1. Nechť lineární zobrazení $\eta :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je dáno svou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi

$$\mathbf{f}_1 = (2,3,3),\ \mathbf{f}_2 = (1,2,3),\ \mathbf{f}_3 = (1,1,2)$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ a bázi

$$\mathbf{g}_1 = (1,2,2,2),\ \mathbf{g}_2 = (0,1,2,2),$$
$$\mathbf{g}_3 = (0,0,1,2),\ \mathbf{g}_4 = (0,0,0,1)$$

prostoru $\mathbb{R}^4$. Nechť lineární transformace $\vartheta :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je dána svými hodnotami

$$\vartheta((1,0,0,0)) = (0,-1,-1,-1),$$
$$\vartheta((0,1,0,0)) = (1,0,-1,-1),$$
$$\vartheta((0,0,1,0)) = (1,1,0,-1),$$
$$\vartheta((0,0,0,1)) = (1,1,1,0)$$

na vektorech kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$. Přesvědčte se, že ϑ je izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{R}^4$, najděte matici složeného lineárního zobrazení

$$\vartheta^{-1} \circ \eta :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ a napište vztahy, podle nichž se pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ vypočtou složky jeho obrazu $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ v $\mathbb{R}^4$ při uvedeném složeném zobrazení.

Řešení. Lineární transformace ϑ má vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metodou elementárních řádkových úprav zjistíme, zda k této matici existuje matice inverzní:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

K matici B je tedy inverzní maticí matice

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice B je tedy regulární, což znamená, že lineární transformace ϑ je izomorfismus. Maticí inverzního izomorfismu ϑ^{-1} vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je matice B^{-1}.

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$ je matice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tedy inverzní matice S^{-1}. Metodou elementárních řádkových úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ je matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je tedy inverzní matice T^{-1}. Lineární zobrazení η má tudíž vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ matici

$$\left(T^{-1}\right)^{-1} \cdot A \cdot S^{-1} = T \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Vynásobením vyjde, že

$$T \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -1 \\ -4 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Maticí složeného lineárního zobrazení $\vartheta^{-1} \circ \eta$ je pak součin matic

$$B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Vychází tedy, že

$$B^{-1} \cdot T \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Znamená to, že pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a jeho obraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ v $\mathbb{R}^4$ při zobrazení $\vartheta^{-1} \circ \eta$ platí:

$$\begin{aligned} y_1 &= \qquad\; -4x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= 3x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_3 &= \; x_1 - 9x_2 + 6x_3, \\ y_4 &= \qquad\quad 4x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

Úloha 2. Nechť lineární zobrazení $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je dáno svými hodnotami

$$\begin{aligned} \xi((1,-1,0)) &= (0,-1,-1,0), \\ \xi((0,1,-2)) &= (2,2,2,1), \\ \xi((0,0,2)) &= (1,2,3,3) \end{aligned}$$

a nechť lineární zobrazení $\chi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami

$$\begin{aligned} \chi((1,0,0,0)) &= (1,1,0), \\ \chi((1,1,0,0)) &= (0,2,1), \\ \chi((1,1,1,0)) &= (1,0,1), \\ \chi((1,1,1,1)) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Zjistěte, zda složené lineární zobrazení, tedy lineární transformace $\chi \circ \xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je izomorfismus prostoru $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$, a je-li tomu tak, najděte matici inverzní lineární transformace $(\chi \circ \xi)^{-1}$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Vektory

$$\mathbf{f}_1 = (1,-1,0),\ \mathbf{f}_2 = (0,1,-2),\ \mathbf{f}_3 = (0,0,2)$$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a vektory

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_1 = (1,0,0,0),\ \mathbf{g}_2 = (1,1,0,0), \\ &\mathbf{g}_3 = (1,1,1,0),\ \mathbf{g}_4 = (1,1,1,1) \end{aligned}$$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^4$. Lineární zobrazení ξ má vzhledem k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lineární zobrazení χ má vzhledem k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ je matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tedy inverzní matice P^{-1}. Elementárními řádkovými úpravami

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ je matice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ je tedy inverzní matice Q^{-1}. Elementárními řádkovými úpravami

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

zjistíme, že

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticí lineárního zobrazení ξ vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je pak matice $A \cdot P^{-1}$ a maticí lineárního zobrazení χ vzhledem ke kanonickým bazím prostorů $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ je matice $B \cdot Q^{-1}$. Maticí lineární transformace $\chi \circ \xi$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je tudíž součin matic $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$. Vynásobením matic vyjde, že

$$B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodou elementárních řádkových úprav zjistíme, zda k této matici existuje matice inverzní:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

K matici $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$ je tedy inverzní maticí matice

$$\left(B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matice $B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}$ je tedy regulární, což znamená, že lineární transformace $\chi \circ \xi$ je izomorfismus. Maticí inverzního izomorfismu $(\chi \circ \xi)^{-1}$ vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je pak uvedená inverzní matice $\left(B \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P^{-1}\right)^{-1}$.