Matematika II — jaro 2005 — 2. termín — **A** — 2.6.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem kořen polynomu a jeho násobnost. Zformulujte větu o počtu a násobnosti kořenů polynomu nad tělesem. Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{Q}$, který nemá žádný kořen. Charakterizujte polynomy nad $\mathbb{C}$, které nemají žádný kořen.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(a+bi) = a^2 - b^2$ je homomorfismus okruhů.

(b) **ano — ne** Okruh polynomů nad tělesem $\mathbb{C}$ je okruh s jednoznačným rozkladem.

(c) **ano — ne** Součet dvou lineárních polynomů nad tělesem $\mathbb{R}$ je lineární polynom.

(d) **ano — ne** Jednotková matice je ve schodovitém tvaru.

(e) **ano — ne** Determinant čtvercové matice nad komplexními čísly je reálné číslo.

(f) **ano — ne** Množina $\{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(g) **ano — ne** Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru je maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

(h) **ano — ne** Dimenze vektorového prostoru matic typu 2×2 nad $\mathbb{R}$ je 2.

(i) **ano — ne** Součet dvou řešení nehomogenní soustavy je opět řešení této soustavy.

(j) **ano — ne** Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(x, y, z) = (y, z, x)$ je izomorfismus vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

3. (10 bodů) Určete všechny kořeny polynomu $f = 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + i$ a alespoň jeden racionální kořen. Rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Jsou dány matice typu $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici X typu $n \times n$ takovou, aby $A \cdot X = B$.

6. (10 bodů) V $\mathbb{Z}_5$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 4y & + & z & + & u & = & 4 \\ 4x & + & y & + & 3z & + & 4u & = & 4 \\ x & + & 4y & + & 2z & + & 4u & = & 3 \end{array}$$

Kolik má daná soustava řešení?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ nad tělesem $\mathbb{R}$ doplňte vektor $\mathbf{u}$ do báze

$$\alpha = ((2,1,0,-1),(0,3,1,0),(1,-1,0,1),\mathbf{u})$$

tak, aby vektor $\mathbf{v} = (1,0,1,-3) \in \mathbb{R}^4$ měl v bázi α souřadnice $(1,-1,-1,1)_\alpha$.

Ověřte, že α je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

8. (10 bodů) Nalezněte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ daného předpisem

$$\varphi(f) = (x-2) \cdot f$$

v bazích $\alpha = (x+1, 2x)$, $\beta = (x+2, x^2-x, x^2+3)$.

(Připomeňme, že $\mathbb{R}_1[x]$ a $\mathbb{R}_2[x]$ jsou vektorové prostory všech polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 1, resp. 2.)

Matematika II — jaro 2005 — 2. termín — B — 2.6.2005

1. (10 bodů) Definujte pojemy okruh, obor integrity a těleso. Dejte příklad okruhu, který není těleso. Charakterizujte $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\mathbb{Z}_n$ je těleso.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dané předpisem $f(a+bi) = a-bi$ je homomorfismus okruhů.

(b) **ano** — **ne** Okruh polynomů nad tělesem $\mathbb{Q}$ je okruh s jednoznačným rozkladem.

(c) **ano** — **ne** Součin dvou lineárních polynomů nad tělesem $\mathbb{R}$ je kvadratický polynom.

(d) **ano** — **ne** Jednotková matice je symetrická.

(e) **ano** — **ne** Determinant čtvercové matice nad $\mathbb{Q}$ je racionální číslo.

(f) **ano** — **ne** Množina $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4z = x-y, x,y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(g) **ano** — **ne** Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru je počet vektorů v bázi.

(h) **ano** — **ne** Dimenze vektorového prostoru matic typu 2×3 nad $\mathbb{R}$ je 5.

(i) **ano** — **ne** Rozdíl dvou řešení nehomogenní soustavy je opět řešení této soustavy.

(j) **ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x,y) = (x-y, y-x)$ je izomorfismus vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

3. (10 bodů) Určete všechny kořeny polynomu $f = 2x^5 - 9x^4 + 13x^3 - 7x^2 - 4x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1+i$ a alespoň jeden racionální kořen. Rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x+1)}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Jsou dány matice typu $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici X typu $n \times n$ takovou, aby $B \cdot X = A$.

6. (10 bodů) V $\mathbb{Z}_5$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & + & 2u & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & z & + & 2u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 4z & + & 4u & = & 4 \end{array}$$

Kolik má daná soustava řešení?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ nad tělesem $\mathbb{R}$ doplňte vektor $\mathbf{u}$ do báze

$$\alpha = ((1,0,2,0), (-1,2,0,1), (0,1,1,-1), \mathbf{u})$$

tak, aby vektor $\mathbf{v} = (1,3,1,2) \in \mathbb{R}^4$ měl v bázi α souřadnice $(2,3,1,2)_\alpha$.

Ověřte, že α je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

8. (10 bodů) Nalezněte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ daného předpisem

$$\varphi(f) = (2x+1) \cdot f$$

v bazích $\alpha = (x-2, 1)$, $\beta = (-x^2+1, 3x-1, -x^2+2x)$.

(Připomeňme, že $\mathbb{R}_1[x]$ a $\mathbb{R}_2[x]$ jsou vektorové prostory všech polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 1, resp. 2.)