Příklady matematických důkazů

Zkoušejte hledat řešení (důkazy) pro následující příklady. Řešte je pokud možno po pořadí, nejprve po týdnu zveřejním první půlku řešení, pak teprve druhou...

Mnoho zdaru!

Příklad 1. Co je špatného na následujícím "důkaze"?
Ukážeme, že platí $2 = -2$: Umocněním na druhou vzejde $2^2 = 4 = (-2)^2$, což je platná rovnost, a proto i původní vztah $2 = -2$ je platný.

Příklad 2. Co je špatného na následujícím "důkaze"?
Nechť a, b jsou celá čísla. Vyjdeme z předpokladu $a = b$ a ukážeme, že $a = -b$. (Tj. po dosazení $a = b = 2$ opět vyjde $2 = -2$.) Umocněním výchozího předpokladu $a = b$ získáme $a^2 = b^2$, neboli $0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a-b)$. Pak je i $0 \cdot (a-b) = 0 = (a+b)(a-b)$ a dále po zkrácení $0 = a+b$, tedy $a = -b$.

Příklad 3. Dokažte indukcí podle $k \geq 0$, že číslo $(2^{6k} - 1)$ je dělitelné sedmi.

Příklad 4. Každá n-prvková množina má právě 2^n podmnožin (včetně prázdné). Formálně

$$\left|2^X\right| = 2^{|X|} .$$

Příklad 5. Počet všech permutací n-prvkové množiny je $n!$, pro každé $n \geq 0$.

Návod pro následující – metoda dvojího počítání:
Nechť každý případ nějakého (složeného) výběru lze dále rozlišit (*zjemnit*) na stejný počet ℓ zjemněných možností. Dále nechť získaný zjemněný výběr má celkem m různých možností (které jsme schopni spočítat). Potom počet všech možností původního výběru *je dán podílem m/ℓ*.

Příklad 6. Počet všech k-prvkových variací z n-prvkové množiny je $\frac{n!}{(n-k)!}$, pro každé $n \geq k \geq 0$.

Příklad 7. Počet všech k-prvkových kombinací z n-prvkové množiny je $\binom{n}{k}$, pro každé $n \geq k \geq 0$.

Příklad 8. Dokažte platnost následujícího vztahu pro všechna přirozená $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot 3^i = (n-1)\cdot 3^{n+1} + 3$$

(Matematickou indukcí.)

Návod pro následující – Dirichletův princip:
Rozmístíme-li $\ell + 1$ (nebo více) objektů do ℓ přihrádek, v některé přihrádce musí být aspoň dva objekty.

Příklad 9. Mezi čtyřmi přirozenými čísly vždy najdeme dvě, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 3.

Příklad 10. Na letním táboře 29 dětí stráví celkem 16 dní a 15 nocí. Každou noc jsou dva z táborníků na hlídce. Dokažte, že některé z dětí musí jít na hlídku za celý tábor aspoň dvakrát.

Příklad 11. 8 kamarádů jelo na 9 dní dovolené. Každý den některá (jedna) trojice z nich šla na výlet. Dokažte, že někteří dva z nich ani jednou nebyli spolu na výletě.