

14. ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE A PODPROSTORY

Budeme pokračovat ve studiu euklidovských prostorů s cílem podat kvantitativní popis vzájemné polohy afinních podprostorů v takovémto prostoru pomocí dvou základních parametrů – jejich *vzdálenosti* a *odchylky (úhlu)*. Naším hlavním nástrojem při tom budou lineární operátory *kolmého průmětu*, zvané též *ortogonální projekce*, vektorů do lineárních podprostorů.

V závěru kapitoly předvedeme aplikace rozpracovaných pojmů a metod.

14.1. Ortokomplement a ortogonální projekce

Relace ortogonality (kolmosti) má několik následujících zřejmých vlastností.

Tvrzení 1. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $c, d \in \mathbb{R}$ platí:

$$(a) \mathbf{x} \perp \mathbf{0};$$

$$(b) \mathbf{x} \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$(c) \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} \perp \mathbf{x};$$

$$(d) (\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \ \& \ \mathbf{x} \perp \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \perp (c\mathbf{y} + d\mathbf{z}).$$

Ortogonalním doplňkem nebo též *ortokomplementem* libovolné množiny $X \subseteq V$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem nazveme množinu

$$X^\perp = \{\mathbf{y} \in V; (\forall \mathbf{x} \in X)(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})\}$$

všech vektorů $\mathbf{y} \in V$ kolmých na každý vektor $\mathbf{x} \in X$.

Tvrzení 2. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro všechny množiny $X, Y \subseteq V$ platí:

$$(a) \emptyset^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = V, \quad V^\perp = \{\mathbf{0}\};$$

$$(b) X^\perp = [X]^\perp = [X^\perp];$$

$$(c) X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp;$$

$$(d) X \subseteq X^{\perp\perp};$$

$$(e) X^{\perp\perp\perp} = X^\perp;$$

$$(f) X \cap X^\perp = \{\mathbf{0}\}, \text{ pokud } \mathbf{0} \in X, \text{ a } X \cap X^\perp = \emptyset, \text{ pokud } \mathbf{0} \notin X;$$

$$(g) (X \cup Y)^\perp = (X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp.$$

Z podmínky (b) mimo jiné plyne, že X^\perp je lineární podprostor ve V pro každou podmnožinu $X \subseteq V$.

Nechť $S \subseteq V$ je lineární podprostor prostoru so skalárním součinem V a $\mathbf{x} \in V$. Říkáme, že vektor $\mathbf{z} \in S$ je *kolmým průmět* nebo též *ortogonální projekce* vektoru \mathbf{x} do podprostoru S , pokud $\mathbf{x} - \mathbf{z} \in S^\perp$. Tento vektor (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{z} = \text{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S$.

Věta 3. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem, $S \subseteq V$ je jeho konečně rozměrný lineární podprostor a $\mathbf{x} \in V$. Potom

(a) kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do podprostoru S existuje a je jednoznačně určený rovností

$$\text{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i,$$

kde $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná ortonormální báze podprostoru S ;

(b) pro libovolný vektor $\mathbf{y} \in S$ platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\mathbf{y} = \mathbf{x}_S$;

(c) pokud $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a $S \neq \{\mathbf{0}\}$, tak pro libovolný vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in S$ platí

$$\frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory \mathbf{x}_S , \mathbf{y} jsou lineárně závislé.

Důsledek 4. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $S, T \subseteq V$ jsou jeho konečně rozměrné lineární podprostory. Potom

$$(a) \quad S = S^{\perp\perp}, \quad (S \cap T)^{\perp} = S^{\perp} + T^{\perp} \quad \text{a} \quad V = S \oplus S^{\perp};$$

(b) $\text{pr}_S : V \rightarrow V$ je lineární operátor;

(c) $(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \text{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x})$;

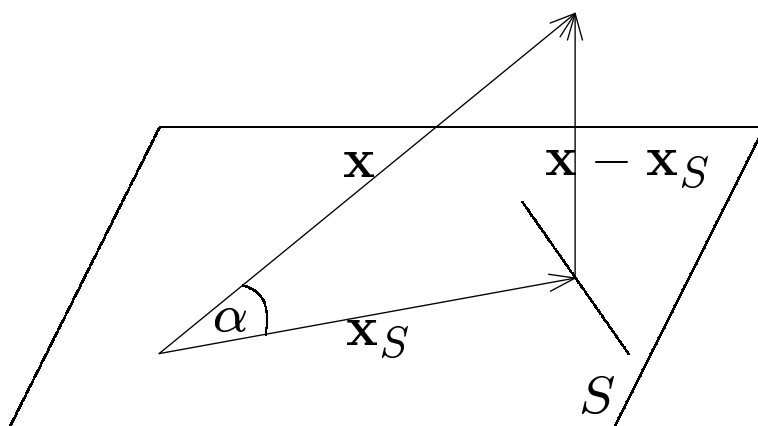
(d) $\text{Impr}_S = S$ a $\text{Kerpr}_S = S^\perp$;

(e) $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do podprostoru S^\perp .

Lineární operátor pr_S nazýváme *ortogonální projekcí* na podprostor S .

Předpokládejme, že kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do lineárního podprostoru S existuje. Vysvětlíme si, jak můžeme za tohoto předpokladu definovat vzdálenost i odchylku vektoru \mathbf{x} od každého z podprostorů S, S^\perp .

Situace je znázorněná na následujícím obrázku.



Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je kolmý na každou přímku v podprostoru S , speciálně trojúhelník tvořený vektory $\mathbf{x}, \mathbf{x}_S, \mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je pravoúhlý, s pravým úhlem při „konci“ vektoru \mathbf{x}_S .

Podmínka (b) věty 3 nás oprávnňuje nazvat délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ *vzdáleností* vektoru \mathbf{x} od podprostoru S . Budeme ji značit

$$\text{dist}(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \mathbf{y} \in S\}.$$

Vzhledem k podmínce (e) důsledku 4 je vzdálenost (anglicky *distance*) vektoru \mathbf{x} od podprostoru S^\perp daná vztahem

$$\text{dist}(\mathbf{x}, S^\perp) = \|\mathbf{x}_S\|.$$

Podobně, protože kosinus je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesající funkce, podmínka (c) věty 3 nás oprávněně nazvat výraz

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \arccos \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \min\{\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in S\}$$

odchylkou vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ od podprostoru $S \neq \{\mathbf{0}\}$, případně *úhlem* vektoru \mathbf{x} a podprostoru S .

Odchylka $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$ je tedy jednoznačně určena jako takové reálné číslo $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, pro které platí

$$\cos \alpha = \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{t. j.} \quad \sin \alpha = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Zřejmě opět půjde o *neorientovaný úhel*. Pokud $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$, tak $\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}_S)$; pokud $\mathbf{x}_S = \mathbf{0}$, t.j. pokud $\mathbf{x} \in S^\perp$, tak samozřejmě $\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \pi/2$.

Úhel dvou vektorů nabývá hodnoty z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, hodnoty, které nabývá úhel vektoru a podprostoru, jsou omezené na interval $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Z podmínky věty 3 (e), pokud $S^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$, tak odchylka vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ od podprostoru S^\perp je daná vztahem

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S^\perp) = \arccos \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \arcsin \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Z části (a) věty 3 máme přímý návod, jak najít kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do *konečně rozměrného* podprostoru $S \subseteq V$, a tím i vzdálenosti $\text{dist}(\mathbf{x}, S)$, $\text{dist}(\mathbf{x}, S^\perp)$ a odchylky $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$, $\sphericalangle(\mathbf{x}, S^\perp)$.

Tvrzení 5. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem, S je jeho konečně rozměrný lineární podprostor s bazí $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ a $\mathbf{x} \in V$. Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když \mathbf{c} je řešením soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{G}(\alpha) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^T,$$

kde $\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$ označuje řádkový vektor

$$(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle) \in \mathbb{R}^k.$$

Rozšířená matice $(\mathbf{G}(\alpha) \mid \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}})$ uvedené soustavy je Gramovou maticí $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x})$ řádu $k + 1$, ze které jsme vynechali poslední řádek.

Je-li α ortonormální báze, tak $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{I}_k$, t.j. příslušná soustava je už ve vyřešeném tvaru $\mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}}$, t.j. ve shodě s podmínkou (a) věty 3.

Totiž

$$\text{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}} \cdot \alpha = \mathbf{c} \cdot \alpha.$$

Příklad 6. V \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem je daný vektor $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^T$ a rovina $S = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, kde $\mathbf{u} = (0, -1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v} = (1, -2, 1, -3)^T$.

Najdeme kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do roviny S a vypočítáme vzdálenost $\text{dist}(\mathbf{x}, S)$ a odchylku $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$.

Kolmý průmět budeme hledat ve tvaru $\mathbf{x}_S = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$, kde $(c, d)^T \in \mathbb{R}^2$ vyhovuje soustavě s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 15 & -3 \end{array} \right).$$

Jejím řešením dostaneme $c = -3/29$, $d = -6/29$, tedy kolmý průmět vektoru \mathbf{x} do roviny $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_S &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/29 \\ -6/29 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{29} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pro vzdálenost \mathbf{x} od S potom dostáváme

$$\text{dist}(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| = \left\| \frac{7}{29}(5, 2, 5, 2)^T \right\| = \frac{7}{29}\sqrt{58}.$$

Pro odchylku \mathbf{x} od S dostaneme

$$\sin \sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{7}{2 \cdot 29} \sqrt{58} = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

S použitím kalkulačky či tabulek můžeme zjistit, že

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \arcsin \frac{7}{\sqrt{58}} \approx 1,1659 \text{ rad} \approx 66^\circ 48' 5''.$$

Příklad 7. Necht' $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, přičemž $m \geq n$ a $h(\mathbf{A}) = n$, t.j. sloupce matice \mathbf{A} jsou lineárně nezávislé vektory v euklidovském prostoru \mathbb{R}^m se standardním skalárním součinem.

Označme $S \subseteq \mathbb{R}^m$ lineární podprostor generovaný sloupci matice \mathbf{A} . Potom ortogonální projekce na podprostor S je lineární operátor $\text{pr}_S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Najděme jeho matici $\mathbf{B} = (\text{pr}_S)_{\varepsilon, \varepsilon} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ vzhledem ke kanonické ortonormální bázi ε prostoru \mathbb{R}^m .

Pokud ztotožníme matici \mathbf{A} s uspořádanou n -ticí jejich sloupců, tak \mathbf{A} je bazí S .

Podle tvrzení 5 obraz $\mathbf{y} = \text{pr}_G(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ dostaneme ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c},$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T.$$

Z nezávislosti sloupců matice \mathbf{A} víme, že $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární matice.

Dále platí $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}$, tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$.

Po dosazení

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{G}(\mathbf{A})^{-1} \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Tedy hledaná matice ortogonální projekce pr_S
je

$$\mathbf{B} = (\text{pr}_S)_{\varepsilon, \varepsilon} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T.$$

14.2. Vzdálenost dvou afinních podprostorů

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a X, Y jsou jeho dvě neprázdné podmnožiny. *Vzdáleností množin X, Y v V* nazýváme číslo

$$\text{dist}(X, Y) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \mathbf{x} \in X \ \& \ \mathbf{y} \in Y\}.$$

Lemma 8. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a M, N jsou jeho afinní podprostory. Potom pro libovolné body $\mathbf{p} \in M, \mathbf{q} \in M$ platí:

$$\text{dist}(M, N) = \text{dist}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \text{Dir}M + \text{Dir}N).$$

Říkáme, že body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ tvoří *příčku* afinních podprostorů M , N , pokud

$$\text{dist}(M, N) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|,$$

t.j. pokud se vzdálenost podprostorů M , N realizuje jako délka vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

Tvrzení 9. Necht' M, N jsou konečně rozměrné afinní podprostory vektorového prostoru se skalárním součinem V . Potom

- (a) body $\mathbf{p} \in M, \mathbf{q} \in N$ tvoří příčku podprostorů M, N právě tehdy, když $\mathbf{p} - \mathbf{q} \in (\text{Dir}M + \text{Dir}N)^\perp$;
- (b) pro libovolné body $\mathbf{p} \in M, \mathbf{q} \in N$ a vektory $\mathbf{u} \in \text{Dir}M, \mathbf{v} \in \text{Dir}N$ platí: body $\mathbf{p} + \mathbf{u}, \mathbf{q} + \mathbf{v}$ tvoří příčku podprostorů M, N právě tehdy, když vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ je kolmým průmětem vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ do lineárního podprostoru $\text{Dir}M + \text{Dir}N$;
- (c) existují body $\mathbf{p} \in M, \mathbf{q} \in N$ tvořící příčku podprostorů M, N .

Důsledek 10. Pro konečně rozměrné afinní podprostory $M, N \subseteq V$ vektorového prostoru se skalárním součinem platí $\text{dist}(M, N) = 0$ právě tehdy, když $M \cap N \neq \emptyset$.

Přímý návod jak najít příčku a vzdálenost libovolných konečně rozměrných afinních podprostorů

Jsou-li $M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$, $N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ zadané parametricky, stačí najít jedno řešení $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+n})^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ soustavy

$$\mathbf{G}(\gamma) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \gamma \rangle^{\mathbf{T}},$$

kde $\gamma = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, a položit

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_m \mathbf{u}_m, \quad \mathbf{v} = c_{m+1} \mathbf{v}_1 + \dots + c_{m+n} \mathbf{v}_n.$$

Potom vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \gamma \cdot \mathbf{c}$ je kolmým průmětem vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ do lineárního podprostoru $\text{Dir}M + \text{Dir}N = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ a příčka podprostorů M, N je tvořená body $\mathbf{p} - \mathbf{u}, \mathbf{q} + \mathbf{v}$. V důsledku toho

$$\begin{aligned} \text{dist}(M, N) &= \|(\mathbf{p} - \mathbf{u}) - (\mathbf{q} + \mathbf{v})\| \\ &= \|\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{w}\|. \end{aligned}$$

Odchylka dvou afinních podprostorů

Odchylku neboli úhel dvou netriviálních konečně rozměrných afinních podprostorů ve vektorovém prostoru so skalárním součinem V značíme $\sphericalangle(M, N)$ a definujeme ji jako odchylku $\sphericalangle(\text{Dir}M, \text{Dir}N)$ jejich zaměření.

Odchylku neboli úhel $\sphericalangle(S, T)$ dvou netriviálních konečně rozměrných lineárních podprostorů $S, T \subseteq V$ definujeme následovně:

Pro $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$ položíme

$$\sphericalangle(S, T) = 0.$$

Pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, klademe

$$\sphericalangle(S, T) = \inf\{\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S \ \& \ \mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T\}.$$

Pokud bychom takovýmto způsobem definovali odchylku $\sphericalangle(S, T)$, i když $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, libovolný společný nenulový vektor $\mathbf{x} \in S \cap T$ by se postaral o to, aby platilo $\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, což nevypadá příliš rozumně. Tedy pro $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, položíme

$$S_1 = S \cap (S \cap T)^\perp, \quad T_1 = T \cap (S \cap T)^\perp.$$

Zřejmě $S_1, T_1 \subseteq V$ jsou netriviální lineární podprostory a $S_1 \cap T_1 = \{\mathbf{0}\}$ (za předpokladu $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ dokonce platí $S_1 = S$, $T_1 = T$).

Proto můžeme konečně definovat

$$\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle(S_1, T_1).$$

Takto definovaný úhel podprostorů S, T je číslo z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ a platí pro něj $\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle(T, S)$, tedy je to *neorientovaný úhel*.

Tvrzení 11. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem a S, T jsou jeho konečně rozměrné lineární podprostory, přičemž $S \not\subseteq T$ ani $T \not\subseteq S$. Potom

$$\sphericalangle(S, T) = \inf\{\sphericalangle(\mathbf{x}, T); \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S \cap (S \cap T)^\perp\}.$$

Odchylka přímky $[\mathbf{x}]$, kde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, a konečně rozměrného lineárního podprostoru $S \neq \{\mathbf{0}\}$ je daná vztahem

$$\begin{aligned} \sphericalangle([\mathbf{x}], S) &= \sphericalangle(\mathbf{x}, S) \\ &= \arccos \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \begin{cases} \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}_S), & \text{pokud } \mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}, \\ & \text{t. j. } \mathbf{x} \notin S^\perp, \\ \pi/2, & \text{pokud } \mathbf{x}_S = \mathbf{0}, \\ & \text{t. j. } \mathbf{x} \in S^\perp. \end{cases} \end{aligned}$$

Každý $(n - 1)$ -rozměrný lineární podprostor S v n -rozměrném euklidovském prostoru V má tvar $S = [\mathbf{a}]^\perp$ pro vhodný nenulový vektor $\mathbf{a} \in V$.

Každá nadrovina $N \subseteq V$ se zaměřením S má tvar $N = \mathbf{p} + [\mathbf{a}]^\perp$ pro nějaké $\mathbf{p} \in N$.

Vektor \mathbf{a} se nazývá *normála* neboli *normálový vektor* nadroviny N . Normála nadroviny je určena jednoznačně až na skalární násobek.

V euklidovském prostoru \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem vystupuje normálový vektor dané nadroviny přímo v její (obecné) rovnici. Pokud je totiž nadrovina M daná rovnicí

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

tak $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \neq \mathbf{0}$ je její normála a uvedenou rovnici můžeme zapsat ve tvaru $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = b$.

Tvrzení 12. Nechť S je netriviální, vlastní lineární podprostor euklidovského prostoru V a $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in V$. Potom

$$\sphericalangle([\mathbf{a}]^\perp, S) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\mathbf{a}, S) = \sphericalangle(\mathbf{a}, S^\perp).$$

Důsledek 13. Nechť M, N jsou dvě nadroviny v euklidovském prostoru V s normálami \mathbf{a} , resp. \mathbf{b} . Potom

$$\sphericalangle(M, N) = \sphericalangle(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = \min\{\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \sphericalangle(\mathbf{a}, -\mathbf{b})\}.$$