14. ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE A PODPROSTORY

Budeme pokračovat ve studiu euklidovských prostorů s cílem podat kvantitativní popis vzájemné polohy afinních podprostorů v takovémto prostoru pomocí dvou základních parametrů – jejich *vzdálenosti* a *odchylky (úhlu)*. Naším hlavním nástrojem při tom budou lineární operátory *kolmého průmětu*, zvané též *ortogonální projekce*, vektorů do lineárních podprostorů.

V závěru kapitoly předvedeme aplikace rozpracovaných pojmů a metod.

14.1. Ortokomplement a ortogonální projekce

Relace ortogonality (kolmosti) má několik následujících zřejmých vlastností.

Tvrzení 1. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $c, d \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $\mathbf{x} \perp \mathbf{0}$;

(b) $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(c) $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y} \perp \mathbf{x}$;

(d) $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\&\; \mathbf{x} \perp \mathbf{z}) \;\Rightarrow\; \mathbf{x} \perp (c\mathbf{y} + d\mathbf{z})$.

Ortogonálním doplňkem nebo též *ortokomplementem* libovolné množiny $X \subseteq V$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem nazveme množinu

$$X^{\perp} = \{\mathbf{y} \in V;\ (\forall\, \mathbf{x} \in X)(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})\}$$

všech vektorů $\mathbf{y} \in V$ kolmých na každý vektor $\mathbf{x} \in X$.

Tvrzení 2. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro všechny množiny $X, Y \subseteq V$ platí:

(a) $\emptyset^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\perp} = V, \quad V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X^{\perp} = [X]^{\perp} = [X^{\perp}]$;

(c) $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$;

(d) $X \subseteq X^{\perp\perp}$;

(e) $X^{\perp\perp\perp} = X^{\perp}$;

(f) $X \cap X^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, pokud $\mathbf{0} \in X$, a $X \cap X^{\perp} = \emptyset$, pokud $\mathbf{0} \notin X$;

(g) $(X \cup Y)^{\perp} = (X + Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}$.

Z podmínky (b) mimo jiné plyne, že $X^{\perp}$ je lineární podprostor ve V pro *každou podmnožinu* $X \subseteq V$.

Nechť $S \subseteq V$ je lineární podprostor prostoru so skalárním součinem V a $\mathbf{x} \in V$. Říkáme, že vektor $\mathbf{z} \in S$ je *kolmým průmět* nebo též *ortogonální projekce* vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru S, pokud $\mathbf{x} - \mathbf{z} \in S^{\perp}$. Tento vektor (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{z} = \mathrm{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S$.

Věta 3. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem, $S \subseteq V$ je jeho konečně rozměrný lineární podprostor a $\mathbf{x} \in V$. Potom

(a) kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru S

existuje a je jednoznačně určený rovností

$$\mathrm{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i,$$

kde $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je libovolná ortonormální báze podprostoru S;

(b) pro libovolný vektor $\mathbf{y} \in S$ platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\mathbf{y} = \mathbf{x}_S$;

(c) pokud $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a $S \neq \{\mathbf{0}\}$, tak pro libovolný vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in S$ platí

$$\frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{x}_S$, $\mathbf{y}$ jsou lineárně závislé.

Důsledek 4. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $S, T \subseteq V$ jsou jeho konečně rozměrné lineární podprostory. Potom

(a) $S = S^{\perp\perp}$, $(S \cap T)^{\perp} = S^{\perp} + T^{\perp}$ a $V = S \oplus S^{\perp}$;

(b) $\mathrm{pr}_S : V \to V$ je lineární operátor;

(c) $(\forall\, \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \in S \iff \mathrm{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x})$;

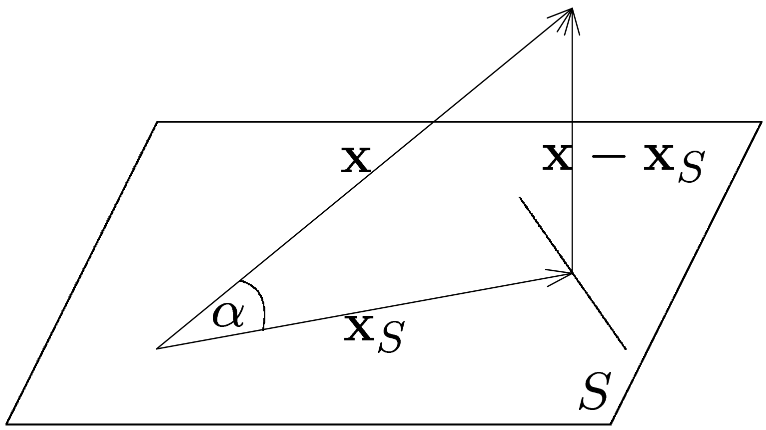
(d) $\mathrm{Im}\,\mathrm{pr}_S = S$ a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}_S = S^{\perp}$;

(e) $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do podprostoru $S^{\perp}$.

Lineární operátor pr_S nazýváme *ortogonální projekcí* na podprostor S.

Předpokládejme, že kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do lineárního podprostoru S existuje. Vysvětlíme si, jak můžeme za tohoto předpokladu definovat vzdálenost i odchylku vektoru $\mathbf{x}$ od každého z podprostorů S, $S^{\perp}$.

Situace je znázorněná na následujícím obrázku.



Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je kolmý na každou přímku v podprostoru S, speciálně trojúhelník tvořený vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_S$, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ je pravoúhlý, s pravým úhlem při „konci" vektoru $\mathbf{x}_S$.

Podmínka (b) věty 3 nás oprávňuje nazvat délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ *vzdáleností* vektoru $\mathbf{x}$ od podprostoru S. Budeme ji značit

$$\mathsf{dist}(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|;\ \mathbf{y} \in S\}.$$

Vzhledem k podmínce (e) důsledku 4 je vzdálenost (anglicky *distance*) vektoru $\mathbf{x}$ od podprostoru $S^\perp$ daná vztahem

$$\mathsf{dist}(\mathbf{x}, S^\perp) = \|\mathbf{x}_S\|.$$

Podobně, protože kosinus je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesající funkce, podmínka (c) věty 3 nás opravňuje nazvat výraz

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \arccos \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \min\{\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in S\}$$

odchylkou vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ od podprostoru $S \neq \{\mathbf{0}\}$, případně *úhlem* vektoru $\mathbf{x}$ a podprostoru S.

Odchylka $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$ je tedy jednoznačně určená jako takové reálné číslo $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, pro které platí

$$\cos \alpha = \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{t. j.} \quad \sin \alpha = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Zřejmě opět půjde o *neorientovaný uhel*. Pokud $\mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}$, tak $\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}_S)$; pokud $\mathbf{x}_S = \mathbf{0}$, t. j. pokud $\mathbf{x} \in S^\perp$, tak samozřejmě $\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \pi/2$.

Úhel dvou vektorů nabývá hodnoty z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, hodnoty, které nabývá úhel vektoru a podprostoru, jsou omezené na interval $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Z podmínky věty 3 (e), pokud $S^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$, tak odchylka vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ od podprostoru $S^\perp$ je daná vztahem

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S^\perp) = \arccos \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \arcsin \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Z části (a) věty 3 máme přímý návod, jak najít kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do *konečně rozměrného* podprostoru $S \subseteq V$, a tím i vzdálenosti $\text{dist}(\mathbf{x}, S)$, $\text{dist}(\mathbf{x}, S^{\perp})$ a odchylky $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$, $\sphericalangle(\mathbf{x}, S^{\perp})$.

Tvrzení 5. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem, S je jeho konečně rozměrný lineární podprostor s bazí $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ a $\mathbf{x} \in V$. Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{x}_S = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$ právě tehdy, když $\mathbf{c}$ je řešením soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{G}(\alpha) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}},$$

kde $\langle \mathbf{x}, \alpha \rangle$ označuje řádkový vektor

$(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle) \in \mathbb{R}^k$.

Rozšířená matice $\left(\mathbf{G}(\alpha) \mid \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}}\right)$ uvedené soustavy je Gramovou maticí $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x})$ řádu $k+1$, ze které jsme vynechali poslední řádek.

Je-li α ortonormální báze, tak $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{I_k}$, t. j. příslušná soustava je už ve vyřešeném tvaru $\mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}}$, t.j. ve shodě s podmínkou (a) věty 3.

Totiž

$$\mathrm{pr}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_S = \langle \mathbf{x}, \alpha \rangle^{\mathbf{T}} \cdot \alpha = \mathbf{c} \cdot \alpha.$$

Příklad 6. V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem je daný vektor $\mathbf{x} = (1,1,1,1)^T$ a rovina $S = [\mathbf{u},\mathbf{v}]$, kde $\mathbf{u} = (0,-1,0,1)^T$, $\mathbf{v} = (1,-2,1,-3)^T$.

Najdeme kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do roviny S a vypočítáme vzdálenost $\mathsf{dist}(\mathbf{x}, S)$ a odchylku $\sphericalangle(\mathbf{x}, S)$.

Kolmý průmět budeme hledat ve tvaru $\mathbf{x}_S = c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$, kde $(c,d)^T \in \mathbb{R}^2$ vyhovuje soustavě s rozšírenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle & \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle \\ \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{x},\mathbf{v}\rangle \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 15 & -3 \end{array}\right).$$

Jejím řešením dostaneme $c = -3/29$, $d = -6/29$, tedy kolmý průmět vektoru $\mathbf{x}$ do roviny $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/29 \\ -6/29 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{3}{29} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro vzdálenost $\mathbf{x}$ od S potom dostáváme

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, S) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\| = \left\| \frac{7}{29}(5, 2, 5, 2)^T \right\| = \frac{7}{29}\sqrt{58}.$$

Pro odchylku $\mathbf{x}$ od S dostaneme

$$\sin \sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{7}{2 \cdot 29}\sqrt{58} = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

S použitím kalkulačky či tabulek můžeme zjistit, že

$$\sphericalangle(\mathbf{x}, S) = \arcsin \frac{7}{\sqrt{58}} \approx 1,1659\,\mathsf{rad} \approx 66^\circ\,48'\,5''.$$

Příklad 7. Nechť $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$, přičemž $m \geq n$ a $h(\mathbf{A}) = n$, t. j. sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé vektory v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^m$ se standardním skalárním součinem.

Označme $S \subseteq \mathbb{R}^m$ lineární podprostor generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$. Potom ortogonální projekce na podprostor S je lineární operátor $\mathrm{pr}_S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Najděme jeho matici $\mathbf{B} = (\mathrm{pr}_S)_{\varepsilon,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ vzhledem ke kanonické ortonormální bázi ε prostoru $\mathbb{R}^m$.

Pokud ztotožníme matici $\mathbf{A}$ s uspořádanou n-ticí jejich sloupců, tak $\mathbf{A}$ je bazí S.

Podle tvrzení 5 obraz $\mathbf{y} = \mathrm{pr}_S(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ dostaneme ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c},$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T.$$

Z nezávislosti sloupců matice $\mathbf{A}$ víme, že $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární matice.

Dále platí $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}$, tedy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$.

Po dosazení

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{G}(\mathbf{A})^{-1} \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle^T = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Tedy hledaná matice ortogonální projekce pr_S je

$$\mathbf{B} = (\mathsf{pr}_S)_{\varepsilon,\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T.$$

14.2. Vzdálenost dvou afinních podprostorů

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a X, Y jsou jeho dvě neprázdné podmnožiny. *Vzdáleností množin* X, Y v V nazýváme číslo

$$\mathrm{dist}(X,Y) = \inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,;\,\mathbf{x}\in X\ \&\ \mathbf{y}\in Y\}.$$

Lemma 8. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a M, N jsou jeho afinní podprostory. Potom pro libovolné body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in M$ platí:

$$\mathrm{dist}(M,N) = \mathrm{dist}(\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N).$$

Říkáme, že body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ tvoří *příčku* afinních podprostorů M, N, pokud

$$\operatorname{dist}(M, N) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|,$$

t. j. pokud se vzdálenost podprostorů M, N realizuje jako délka vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

Tvrzení 9. Nechť M, N jsou konečně rozměrné afinní podprostory vektorového prostoru se skalárním součinem V. Potom

(a) body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ tvoří příčku podprostorů M, N právě tehdy, když $\mathbf{p} - \mathbf{q} \in (\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N)^{\perp}$;

(b) pro libovolné body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ a vektory $\mathbf{u} \in \mathrm{Dir}M$, $\mathbf{v} \in \mathrm{Dir}N$ platí: body $\mathbf{p} + \mathbf{u}$, $\mathbf{q} + \mathbf{v}$ tvoří příčku podprostorů M, N právě tehdy, když vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ je kolmým průmětem vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ do lineárního podprostoru $\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N$;

(c) existují body $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ tvořící příčku podprostorů M, N.

Důsledek 10. Pro konečně rozměrné afinní podprostory M, $N \subseteq V$ vektorového prostoru se skalárním součinem platí $\mathrm{dist}(M,N) = 0$ právě tehdy, když $M \cap N \neq \emptyset$.

Přímý návod jak najít příčku a vzdálenost libovolných konečně rozměrných afinních podprostorů

Jsou-li $M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$, $N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ zadané parametricky, stačí najít jedno řešení $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m+n})^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ soustavy

$$\mathbf{G}(\gamma) \cdot \mathbf{c} = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \gamma \rangle^{\mathbf{T}},$$

kde $\gamma = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$, a položit

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots c_m\mathbf{u}_m,\ \mathbf{v} = c_{m+1}\mathbf{v}_1 + \ldots + c_{m+n}\mathbf{v}_n.$$

Potom vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v} = \gamma \cdot \mathbf{c}$ je kolmým průmětem vektoru $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ do lineárního podprostoru $\mathrm{Dir}M + \mathrm{Dir}N = [\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ a příčka podprostorů M, N je tvořená body $\mathbf{p} - \mathbf{u}$, $\mathbf{q} + \mathbf{v}$. V důsledku toho

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(M, N) &= \|(\mathbf{p} - \mathbf{u}) - (\mathbf{q} + \mathbf{v})\| \\ &= \|\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{w}\| \,. \end{aligned}$$

Odchylka dvou afinních podprostorů

Odchylku neboli *úhel* dvou *netriviálních konečně rozměrných afinních podprostorů* ve vektorovém prostoru so skalárním součinem V značíme $\sphericalangle(M, N)$ a definujeme ji jako odchylku $\sphericalangle(\text{Dir}M,\ \text{Dir}N)$ jejich zaměření.

Odchylku neboli *úhel* $\sphericalangle(S, T)$ dvou *netriviálních konečně rozměrných lineárních podprostorů* S, $T \subseteq V$ definujeme následovně:

Pro $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$ položíme

$$\sphericalangle(S, T) = 0.$$

Pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, klademe

$$\sphericalangle(S, T) = \inf\{\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y});\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S \ \&\ \mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T\}.$$

Pokud bychom takovýmto způsobem definovali odchylku $\sphericalangle(S, T)$, i když $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, libovolný společný nenulový vektor $\mathbf{x} \in S \cap T$ by se postaral o to, aby platilo $\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, což nevypadá příliš rozumně. Tedy pro $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, položíme

$$S_1 = S \cap (S \cap T)^{\perp}, \qquad T_1 = T \cap (S \cap T)^{\perp}.$$

Zřejmě $S_1, T_1 \subseteq V$ jsou netriviální lineární podprostory a $S_1 \cap T_1 = \{\mathbf{0}\}$ (za předpokladu $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ dokonce platí $S_1 = S$, $T_1 = T$).

Proto můžeme konečně definovat

$$\sphericalangle(S, T) = \sphericalangle(S_1, T_1).$$

Takto definovaný úhel podprostorů S, T je číslo z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ a platí pro něj $\sphericalangle(S,T) = \sphericalangle(T,S)$, tedy je to *neorientovaný úhel*.

Tvrzení 11. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem a S, T jsou jeho konečně rozměrné lineární podprostory, přičemž $S \not\subseteq T$ ani $T \not\subseteq S$. Potom

$$\sphericalangle(S,T) = \inf\{\sphericalangle(\mathbf{x},T);\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S \cap (S \cap T)^{\perp}\}.$$

Odchylka přímky $[\mathbf{x}]$, kde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, a konečně rozměrného lineárního podprostoru $S \neq \{\mathbf{0}\}$ je daná vztahem

$$\sphericalangle([\mathbf{x}], S) = \sphericalangle(\mathbf{x}, S)$$

$$= \arccos \frac{\|\mathbf{x}_S\|}{\|\mathbf{x}\|} = \begin{cases} \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{x}_S), & \text{pokud } \mathbf{x}_S \neq \mathbf{0}, \\ & \text{t. j. } \mathbf{x} \notin S^{\perp}, \\ \pi/2, & \text{pokud } \mathbf{x}_S = \mathbf{0}, \\ & \text{t. j. } \mathbf{x} \in S^{\perp}. \end{cases}$$

Každý $(n-1)$-rozměrný lineární podprostor S v n-rozměrném euklidovském prostoru V má tvar $S = [\mathbf{a}]^{\perp}$ pro vhodný nenulový vektor $\mathbf{a} \in V$.

Každá nadrovina $N \subseteq V$ se zaměřením S má tvar $N = \mathbf{p} + [\mathbf{a}]^{\perp}$ pro nějaké $\mathbf{p} \in N$.

Vektor $\mathbf{a}$ se nazývá *normála* neboli *normálový vektor* nadroviny N. Normála nadroviny je určená jednoznačně až na skalární násobek.

V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem vystupuje normálový vektor dané nadroviny přímo v její (obecné) rovnici. Pokud je totiž nadrovina M daná rovnicí

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,$$

tak $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T \neq \mathbf{0}$ je její normála a uvedenou rovnici můžeme zapsat ve tvaru $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = b$.

Tvrzení 12. Nechť S je netriviální, vlastní lineární podprostor euklidovského prostoru V a $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in V$. Potom

$$\sphericalangle([\mathbf{a}]^{\perp}, S) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\mathbf{a}, S) = \sphericalangle(\mathbf{a}, S^{\perp}).$$

Důsledek 13. Nechť M, N jsou dvě nadroviny v euklidovském prostoru V s normálami $\mathbf{a}$, resp. $\mathbf{b}$. Potom

$$\sphericalangle(M, N) = \sphericalangle(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]) = \min\{\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),\ \sphericalangle(\mathbf{a}, -\mathbf{b})\}.$$