LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení*** , které nám umožní porovnávat struktury různých vektorových prostorů nad tímž tělesem.

Obsah přednášky

Obsah

Lineární zobrazení I

6 Lineární zobrazení

6.1 Lineární zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Říkáme, že $\varphi : V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku, t. j. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení II

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, t. j. pro lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad tělesem K zobrazení $\mathbf{0} : V \to U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Lineární zobrazení III

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Lineární zobrazení IV

Tvrzení 6.1.1 *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory nad tělesem* K *a* $\varphi : V \to U$ *je libovolné zobrazení. Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) φ *je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ *platí* $\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y})$;

(iii) *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *a všechna* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in K$ *platí* $\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n)$.

Lineární zobrazení V

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou: kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 6.1.2 *Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení. Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární zobrazení.*

Lineární zobrazení VI

Tvrzení 6.1.3 *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory nad tělesem* K *a* $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení.*

(a) *Je-li* S *lineární podprostor prostoru* V, *tak i* $\varphi(S)$ *je lineární podprostor prostoru* U.

(b) *Je-li* T *lineární podprostor prostoru* U, *tak* $\varphi^{-1}(T)$ *je lineární podprostor prostoru* V.

Lineární zobrazení VII

Příklad 6.1.4 *Nechť K je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká, že pro pevn $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n\times p} \to K^{m\times p}$.*

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p\times m} \to K^{p\times n}$.

Lineární zobrazení VIII

Speciálně pro $p = 1$ *je takto definované lineární zobrazení* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ *mezi sloupcovými vektorovými prostory* $K^n \to K^m$*, resp. lineární zobrazení* $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ *mezi řádkovými vektorovými prostory* $K^m \to K^n$*.*

Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad K má v podstatě takovýto tvar.

Lineární zobrazení IX

Příklad 6.1.5 *Nechť* K *je těleso. Pro* $m, n \in \mathbb{N}$ *a pevné* $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ *jsou předpisy* $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ *definovaná lineární zobrazení* $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ *resp.* $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$*.*

Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ *je lineární zobrazení* $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$*.*

Lineární zobrazení X

Příklad 6.1.6 *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.*

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkce f, t. j. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$.

Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúžení $f \mapsto f \restriction Y$ lineární zobrazení $V^X \to V^Y$.

Lineární zobrazení XI

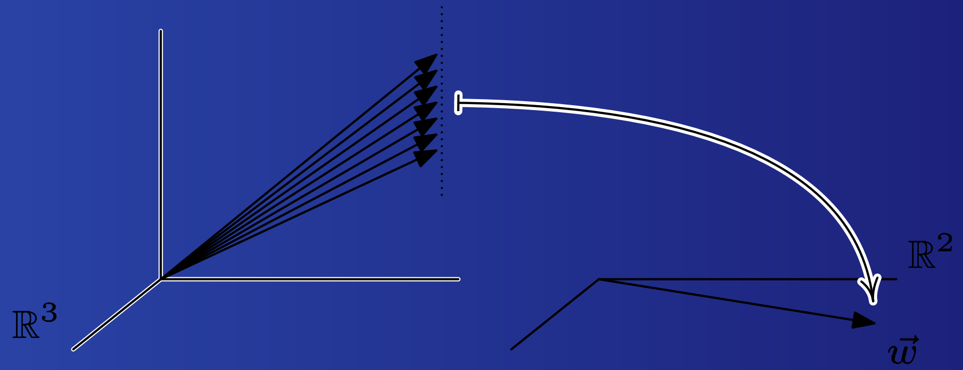
Příklad 6.1.7 *Označme V množinu všetch konvergentních posloupností reálných čísel. Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.*

Pak zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineární.

Lineární zobrazení XII

Příklad 6.1.8 *Uvažujme projekci* $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



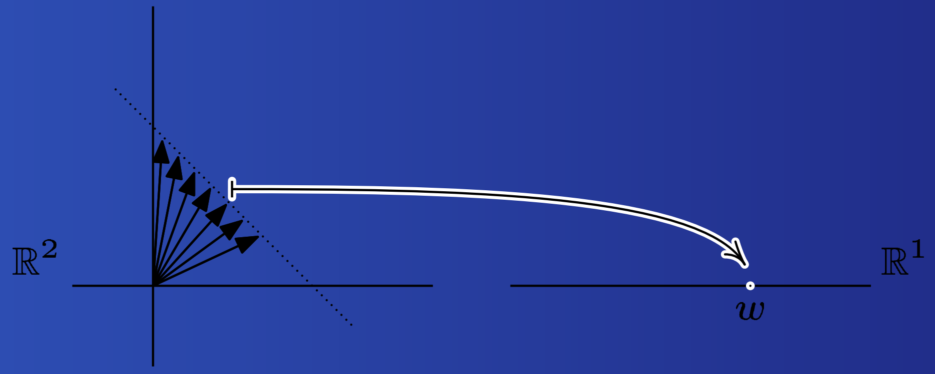
Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní. Totiž vzor nějakého vektoru v $\mathbb{R}^2$ *je vertikální přímka vektorů z* $\mathbb{R}^3$*.*

Lineární zobrazení XIII

Příklad 6.1.9 *Následující lineární zobrazení*

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$ *není*

rovněž prosté. Pro pevné $w \in \mathbb{R}^1$ *je totiž jeho vzor* $h^{-1}(w)$ *množina všech vektorů v rovině,*

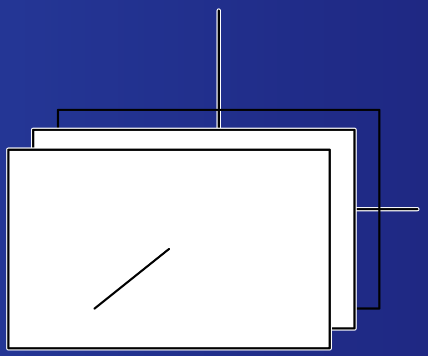


jejichž souřadnice po sečtení dávají právě w.

Lineární zobrazení XIV

Příklad 6.1.10 *Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definované*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



jsou příslušné vzory roviny $x = 0$, $x = 1$, *atd., kolmé k ose* x.

Jádro a obraz I

6.2 Jádro a obraz lineárního zobrazení

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K. Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazývame množinu

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V\}.$$

Jádro a obraz II

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***. Protože $\{0\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení 6.1.3 dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 6.2.1 *Nechť* $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem* K. *Potom* $\mathrm{Ker}\varphi$ *je lineární podprostor prostoru* V *a* $\mathrm{Im}\varphi$ *je lineární podprostor prostoru* U.

Jádro a obraz III

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 6.2.2 *Nechť* $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení. Potom*

(a) φ *je injektivní právě tehdy, když* $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$*;*

(b) φ *je surjektivní právě tehdy, když* $\mathrm{Im}\varphi = U$*.*

Jádro a obraz IV

Věta 6.2.3 *Nechť* $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení, pričemž vektorový prostor* V *je konečně rozměrný. Potom i* $\mathrm{Ker}\varphi$ *a* $\mathrm{Im}\varphi$ *jsou konečně rozměrné prostory a platí*

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Jádro a obraz V

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem*** neboli ***lineární transformací***.

Jádro a obraz VI

Důsledek 6.2.4 *Nechť* $\varphi : V \to V$ *je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru* V. *Potom* φ *je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.*

Lineární izomorfismy I

6.3 Lineární izomorfismy

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad týmž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***. Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \to U$.

Lineární izomorfismy II

Tvrzení 6.3.1 *Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.*

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \to V$ je lineární izomorfismus.*

(c) *Jsou-li $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismy, pak i $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy III

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 6.3.2 *Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:*

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

(c) $W \cong V \,\&\, V \cong U \Rightarrow W \cong U$.

Lineární izomorfismy IV

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***, t. j. je vztahem ***ekvivalence***. Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Příklad 6.3.3 *Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze. Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$.*

Lineární izomorfismy V

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 6.3.4 *Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K. Potom*

$$V \cong U \iff \dim V = \dim U.$$

Lineární izomorfismy VI

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ – je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$.

Matice lineárního zobrazení I

6.4 Matice lineárního zobrazení

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$.
V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m\times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory, t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení II

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice. Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Matice lineárního zobrazení III

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$, při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostoroch U, V, bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ zakódovat pomocí vhodné matice $\mathbf{A}$.

Matice lineárního zobrazení IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_{\boldsymbol{\alpha}}) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze $\boldsymbol{\beta}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$, t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_{\boldsymbol{\alpha}}$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice lineárního zobrazení V

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimněme si obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.)

Matici $\mathbf{A}$ ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat ***matici lineárního zobrazení*** $\varphi : K^n \to K^m$ ***vzhledem na kanonickou bázi*** $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$.

Matice lineárního zobrazení VI

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$.

Matice lineárního zobrazení VII

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n-rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\mathrm{id}_V)_{\beta,\beta} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Matice lineárního zobrazení VIII

Věta 6.4.1 *Nechť* $\varphi : V \to U$ *je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad číselným tělesem* K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ *a* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *jsou báze prostorů* U *resp.* V. *Potom pre všechna* $\mathbf{x} \in V$ *platí*

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *je jediná matice touto vlastností.*

Matice lineárního zobrazení IX

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 6.4.2 *Nechť* U, V, W *jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem* K, $\boldsymbol{\alpha}$ *je báze* U, $\boldsymbol{\beta}$ *je báze* V *a* $\boldsymbol{\gamma}$ *je báze* W. *Potom pro libovolné lineární zobrazení* $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ *platí*

$$(\varphi \circ \psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Matice lineárního zobrazení X

Příklad 6.4.3 Otočení *roviny okolo počátku o úhel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε *budeme značiť rovněž* $\mathbf{R}_\alpha$, *tedy pre* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ *o úhel* α.

Matice lineárního zobrazení XI

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XII

To znamená, že

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* R_α *je vektor*

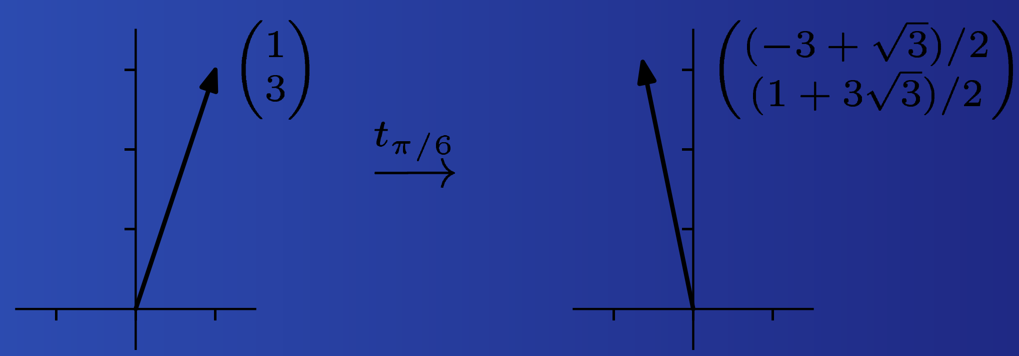
$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XIII

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*



Matice lineárního zobrazení XIV

Příklad 6.4.4 Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $\mathrm{S}_\alpha\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x.*

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i S_α je lineární zobrazení. Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi $\boldsymbol{\varepsilon}$ budeme značit stejně tj. S_α.

Matice lineárního zobrazení XV

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x *je*

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovou souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *můžeme obdržet jako složení otočení* $\mathbf{R}_{-\alpha}$*, osové souměrnosti* $\mathbf{S}_0$ *a otočení* $\mathbf{R}_\alpha$*, t. j.*

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Matice lineárního zobrazení XV

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení XVI

Příklad 6.4.5 Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \operatorname{diag}(c, c)$.

Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n.

Matice lineárního zobrazení XVII

Příklad 6.4.6 Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*
Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.
Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y.

Matice lineárního zobrazení XVIII

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou „vodorovnou vrstvu“ $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$.

Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n.

Prostory lineárních zobrazení I

6.5 Prostory lineárních zobrazení

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ všech ***lineárních*** zobrazení $\varphi : V \to U$ platí $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}^{\mathcal{V}}$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 6.5.1 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K. Potom $\mathcal{L}(V,U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V. Tedy $\mathcal{L}(V,U)$ je vektorový prostor nad K.*

Tvrzení 6.5.2 *Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$. Potom*

$$\mathcal{L}(V,U) \cong K^{m\times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V,U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi $\boldsymbol{\alpha}$ v prostoru U a $\boldsymbol{\beta}$ v prostoru V. Na matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V. Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$, libovolná báze $\boldsymbol{\beta}$ v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$. Platí tedy

Tvrzení 6.5.3 *Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^* \cong V$.*

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze $\boldsymbol{\varepsilon}$ v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $(K^{n\times 1})^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V.

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické, t. j. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**} dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 6.5.4 *Nech V je vektorový prostor nad tělesem K. Potom*

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení $V \to V^{**}$;*

(b) *pokud je V konečně rozměrný, pak $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je lineární izomorfismus $V \to V^{**}$.*

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Konečně rozměrný vektorový priestor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ ***přirozeně*** ztotožnit s duálem prostoru V^*.