Demonstrované cvičení k přednášce Matematika I

2.5.2006

Příklad 1. *Napište dvě homogenní diferenční rovnice druhého řádu takové, že posloupnosti, které vyhovují oběma rovnicím, tvoří jednodimenzionální vektorový prostor.*

Příklad 2. *V* $\mathbb{R}^3$ *určete matici rotace o* 60° *v kladném smyslu kolem osy* y *v bázi dané vektory* $(1,0,1)$, $(0,-1,1)$, $(0,1,0)$.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\sqrt{3} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Příklad 3. *Rozhodněte, zda zobrazení dané následující maticí je ortogonální. Pokud ano, určete osu otáčení a úhel, o který se otáčí.*

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Otáčení o 60° kolem osy $(1, 1, -1)$. $\square$

Příklad 4.

1. *Jak můžeme zapsat stav Markovovského procesu po n-krocích, je-li proces dán maticí A a výchozí stav vektorem x_0?*

2. *Dokažte, že matice Markovovského procesu nemůže být nilpotentní.*

Příklad *Určete nějakou ortonormální bázi vektorového prostoru* $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

Příklad *Jaké posloupnosti utlumí lineární filtr* $T : x_n{}_{n=1}^{\infty} \mapsto z_n{}_{n=1}^{\infty}$, $z_n = x_{n+5} + x_{n+4} + x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$?

Příklad *V jisté zemi vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde* $1/6$ *diváků první stanice ke druhé stanici,* $1/4$ *diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces, napište jeho matici, nalezněte její vlastní čísla a vlastní vektory.*