Demonstrované cvičení k přednášce Matematika I

15.5.2006

Příklad 1. *Dokažte, že reálný vektorový prostor všech funkcí* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je nekonečně dimenzionální.*

Řešení. Nechť má konečnou dimenzi k. Pak funkce 1, x,$\dots x^k$ tvoří lineárně nezávislou množinu o $k+1$ vektorech. Spor. $\square$

Příklad 2. *Napište nějakou bázi reálného vektorového prostoru matic* 3×3 *nad* $\mathbb{R}$ *s nulovou stopou (součet prvků na diagonále) a napište souřadnice matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

v této bázi.

Příklad 3. *Zaveďte nějaký skalární součin na vektorovém prostoru matic z předchozího příkladu. Spočítejte normu matice z předchozího příkladu, která je indukovaná Vámi zavedeným součinem.*

Příklad 4. *Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nalezněte nějakou ortonormální bází podprostoru* $V \subset \mathbb{R}$, *kde* $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

Příklad 5. *Určete matici standardního skalárního součinu v* $\mathbb{R}^3$ *v bázi dané vektory* $(1, 5, 1)$, $(2, 3, 0)$, $(1, 0, -1)$.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 27 & 17 & 0 \\ 17 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Označíme-li matici přechodu od dané báze ke standardní jako P, pak je to $P^T P$. $\square$

Příklad 6. *Uvažme skalární součin daný tím, báze tvořená vektory* $(1,5,1)$, $(2,3,0)$, $(1,0,-1)$ *je v něm ortonormální. Napište matici tohoto skalárního součinu ve standardní bázi.*

Řešení. $(P^{-1})^T P^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 43/16 & -11/8 & 55/16 \\ -11/8 & 3/4 & -15/8 \\ 55/16 & -15/8 & 83/16 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 7. *Nechť A je čtvercová matice $n \times n$. Dokažte, že matice $A^T A$ je symetrická.*

Příklad 8. *V jisté zemi vysílají jisté dvě televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom roce přejde* $1/6$ *diváků první stanice ke druhé stanici,* $1/5$ *diváků druhé stanice přejde k první stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces, napište jeho matici, nalezněte její vlastní čísla a vlastní vektory.*

Řešení.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Dominantní vlastní hodnota 1, příslušný vlastní vektor $(\frac{6}{5}, 1)$. Poměr diváků se ustálí na $6 : 5$. $\square$

Příklad 9. *Rozhodněte, zda leží bod* $[1, 4, 2]$ *uvnitř konvexního obalu bodů* $[1, 5, 2]$, $[6, 2, 0]$, $[5, 0, 1]$, $[0, 1, 3]$.

Příklad 10. *Určete příčku mimoběžek*

$$p: \; [2,5,4]+t(1,1,1) \quad a \quad q: \; [3,3,-1]+r(2,1,0),$$

procházející bodem $[1,3,1]$.

Příklad 11. *Parametricky vyjádřete rovinu* $\rho \in \mathbb{R}^4$, *která je dána rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Příklad 12. *Vyjádřete afinní zobrazení* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dané ve standardní afinní bázi v* $\mathbb{R}^2$ *jako*

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

v bázi $([1,0],(1,2),(-1,1))$.