Demonstrované cvičení k přednášce Matematika I

21.3.2006

Příklad 1. *Na kolik maximálně částí dělí trojrozměrný prostor n koulí?*

Řešení. Maximální počet y_n částí, na které rozdělí n kružnic rovinu je $y_n = y_{n-1} + 2(n-1)$, $y_1 = 2$, tedy $y_n = n^2 - n + 2$.

Pro maximální počet p_n částí, na které potom rozdělí n koulí prostor pak dostáváme rekurentní vztah $p_{n+1} = p_n + y_n$, $p_1 = 2$, tedy celkem $p_n = \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8)$. □

Příklad 2. *Spočítejte obsah trojúhelníka zadaného přímkami*

$$\begin{aligned} p &: \quad y = 2x - 1 \\ q &: \quad 3y = -2x + 21 \\ r &: \quad y = 3. \end{aligned}$$

Řešení. Vrcholy jsou $[2, 3]$, $[6, 3]$, $[3, 5]$, obsah pak 4 čtereční jednotky. $\square$

Příklad 3. *Napište souřadnice vrcholů trojúhelníka, který vznikne otočením rovnostranného trojúhelníka jehož dva vrcholy jsou* $[1,1]$ *a* $[2,3]$ *(třetí pak v polorovině dané přímkou* $[1,1][2,3]$ *a bodem* $[0,0]$*) o* 60° *v kladném smyslu kolem bodu* $[0,0]$.

Řešení. Třetí vrchol trojúhelníka dostaneme např. otočením o 60° jednoho z vrcholů kolem druhého (ve správném smyslu). $[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3}-\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}])$, $[1-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3}+\frac{3}{2}]$. □

Příklad 4. *Kolik je surjektivních zobrazení množiny* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3\}$*?*

Řešení. Principem inkluze a exkluze: $3^5 - 3(2^5 - 2) - 3 = 150$. $\square$

Příklad 5. *Mirek a Marek chodí na obědy do univerzitní menzy. Menza má otevřeno od 11h do 14h. Každý z nich stráví na obědě půl hodiny a dobu příchodu (mezi 11h a 14h) si vybírá náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se na obědě v daný den potkají, sedávají-li oba u stejného stolu?*

Příklad 6. *Sečtěte následující řadu:*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2).$$

Příklad 7. *Co vznikne složením dvou středových souměrností v rovině podle různých středů? Co složením tří středových souměrností podle různých středů? Obecně složením sudého či lichého počtu středových symetrií? Odpovědi zdůvodněte.*

Příklad 8. *Rozhodněte, zda následující relace na množině M jsou relace ekvivalence:*

1. $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(a \sim b) \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
2. $M = \{X | X \subset \mathbb{N}\}$, $(X \sim Y) \Leftrightarrow (X \cup Y$ *je konečná množina*$)$.
3. $M = \{X | X \subset \mathbb{N}\}$, $(X \sim Y) \Leftrightarrow (X \cap Y$ *je konečná množina*$)$.
4. M *je množina čtvercových matic* 2×2, $(A \sim B) \Leftrightarrow AB = BA$.