# Algoritmus řazení slučovÆním (funkc. verze)

```
mergeSort      ::  [Int] → [Int]
mergeSort []    =  []
mergeSort [x]   =  [x]
mergeSort s     =  merge (mergeSort u) (mergeSort v)
                   where (u,v) = splitAt (n `div` 2) s
                         n     = length s

merge s []           =  s
merge [] t           =  t
merge (x:u) (y:v)    =  if x ≤ y  then  x : merge    u  (y:v)
                                  else  y : merge (x:u)    v
```

## Příklad:

```
MS [4,3,1,6,7,2,8,5]

mr (MS [4,3,1,6]) (MS [7,2,8,5])

mr (mr (MS [4,3]) (MS [1,6])) (mr (MS [7,2]) (MS [8,5]))

mr (mr (mr (MS [4])(MS [3]))(mr (MS [1])(MS [6]))) (mr (mr (MS [7])(MS [2]))(mr (MS [8])(MS [5])))

mr (mr (mr [4] [3]) (mr [1] [6])) (mr (mr [7] [2]) (mr [8] [5]))

mr (mr [3,4] [1,6]) (mr [2,7] [5,8])

mr [1,3,4,6] [2,5,7,8]

[1,2,3,4,5,6,7,8]
```

**Věta:** Nechť *In* $=$ *Out* je množina všech seznamů (posloupností) celých čísel, $\varphi(s) \equiv s$ je konečný, $\psi(s,t) \equiv t$ je permutací seznamu $s$ a $t$ je neklesající. Pak `mergeSort` je totálně korektní vzhledem k podmínkám $\varphi$, $\psi$.

**Lemma:** Časová složitost pomocné funkce `merge` je $T_{\texttt{merge}} \in \Theta(n)$.

**Věta:** Časová složitost funkce `mergeSort` je $T_{\texttt{mergeSort}} \in \Theta(n \cdot \log n)$.

Důkaz totÆlní korektnosti: Konvergence i parciÆlní korektnost se dokÆže indukcí podle dØlky seznamu $s$, parciÆlní korektnost pomocnØ funkce `merge` se dokÆže indukcí podle součtu dØlek obou slučovaných seznamů.

LineÆrní složitost funkce `merge` je zřejmÆ: konstantní dØlka porovnÆní a připojení menšího prvku na začÆtek posloupnosti se dohromady provede tolikrÆt, kolik je součet dØlek obou vstupních posloupností (argumentů funkce `merge`).

Odvození složitosti funkce `mergeSort` je na nÆsledujících stranÆch.

# Algoritmus řazení slučovÆním (imp. verze)

```
type Elem = Integer;  Posl = array [1..MAX] of Elem;

procedure mergeSort (n:Integer; var A:Posl);

  var B : Posl; { pomocné pole }

  procedure msort (p,r:Integer); { seřadí pole od p do r }
     var q : Integer;
     begin if p < r then begin
                           q := ⌊(p+r)/2⌋ ;
                           msort (p,q) ;
                           msort (q+1,r) ;
                           merge (p,q,r)
                         end
     end
```

```
procedure merge (p,q,r:Integer);
   { sloučí úsek A[p],...,A[q] s úsekem A[q+1],...,A[r] }
   var i,j : Integer;
   begin
     i := p ;  j := q + 1 ;
     for k := p to r do
       if        (i≤q) && (j≤r) && (A[i]≤A[j]) || (j>r)
         then     begin B[k] := A[i] ; i := i+1 end
         else if (i≤q) && (j≤r) && (A[i]>A[j]) || (i>q)
         then     begin B[k] := A[j] ; j := j+1 end ;
     for k := p to r do  A[k] := B[k]
   end


begin { mergeSort }
   msort (1,n)
end   { mergeSort }
```

**PoznÆmka:** Podmíněný příkaz v těle cyklu for procedury `merge` lze ekvivalentně zapsat kratčeji takto (dokažte)

```
if ( i≤q ) && ( j>r || A[i]≤A[j] )
   then  begin B[k] := A[i] ; i := i+1 end
   else  begin B[k] := A[j] ; j := j+1 end ;
```

# ČasovÆ složitost algoritmuřazení slučovÆním

## Analýza nejhoršího případu

Pro danou velikost $n$ je dØlka výpočtu vždy stejnÆ.

## ČasovÆ složitost

$$T(1) = a$$
$$T(n) = b + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + D(n), \quad D \in \Theta(n)$$

$$T'(1) = a$$
$$T'(n) = b + 2\,T'(n/2) + n \cdot c, \quad T' \in \Theta(T).$$

Analýza nejhoršího případu je zde triviÆlní: pro každou vstupní posloupnost dØlky $n$ algoritmus dělÆ stejnou prÆci. Pro složitost $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tedy platí, že $T(n)$ je rovno dØlce výpočtu na *libovolnØ* vstupní posloupnosti dØlky $n$.

Je-li $n \leq 1$, pak $T(n) = a$, kde $a$ je konstanta.

Je-li $n > 1$, pak $T(n) = b + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + D(n)$, kde $D$ je složitost zbytku těla procedury `msort` (bez rekursivního volÆní), tedy zejmØna pomocnØ procedury `merge`.

Procedura `merge` je tvořena cyklem s pevným počtem opakovÆní ($n$), takže $D(n) = c \cdot n$, kde $c$ je konstanta. Tedy $D \in \Theta(n)$.

Protože $\lfloor n/2 \rfloor$ a $\lceil n/2 \rceil$ se liší nejvýše o $1$ (tj. o konstantu), můžeme tento rozdíl zanedbat. Takto upravenÆ funkce $T'$ roste stejně rychle jako $T$:

$T'(1) = a$

$T'(n) = b + 2\,T'(\lceil n/2 \rceil) + n \cdot c, \quad T' \in \Theta(T).$

Pro několik hodnot $n$ dostÆvÆme

$$
\begin{array}{lcll}
T'(1) & = & a & \\
T'(2) & = & b + 2 \cdot T'(1) + 2c & = & 2a + b + 2c \\
 & \vdots & & \\
T'(4) & = & b + 2 \cdot T'(2) + 4c & = & 4a + 3b + 8c \\
 & \vdots & & \\
T'(8) & = & b + 2 \cdot T'(4) + 8c & = & 8a + 7b + 24c \\
 & \vdots & & \\
T'(16) & = & b + 2 \cdot T'(8) + 16c & = & 16a + 15b + 64c \\
 & \vdots & & \\
T'(32) & = & b + 2 \cdot T'(16) + 32c & = & 32a + 31b + 160c \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

Všimneme-li si hodnot $T'$ na mocninách dvou, můžeme vyslovit tvrzení

**Věta:** Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$T'(2^k) = 2^k a + (2^k - 1)b + 2^k kc$$

Vyjádřeno pomocí $n$:

$$T'(n) = a \cdot n + b \cdot (n - 1) + c \cdot n \log_2 n$$

Protože lineární funkce $a \cdot n$, $b \cdot n$ rostou nejvýše tak rychle jako $n \cdot \log n$, tak $T' \in \Theta(n \log n)$.

$T$ roste stejně rychle, takže i $T \in \Theta(n \log n)$.

Rovnosti $T(1) = c$
$T(n) = 2\,T(\lceil n/2 \rceil) + d \cdot n$
jsou speciÆlním případem situace, v níž je
$T(1) = c$
$T(n) = a\,T(\lceil n/b \rceil) + f(n)$, kde $a \geq 1, b > 1, c > 0$ a $f$ je kladnÆ funkce. Například pro algoritmus řazení slučovÆním je $a = 2, b = 2, f \in \Theta(n)$, tedy případ „2“ nÆsledující věty.

**Věta:** Nechť $a \geq 1, b > 1$, $f$ je kladnÆ funkce a
$T(1) = c$
$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$
Potom:
1. Pokud $f \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro nějakÉ $\varepsilon > 0$, pak $T \in \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Pokud $f \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Pokud $f \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro nějakÉ $\varepsilon > 0$ a pokud $a \cdot f(n/b) \leq d \cdot f(n)$ pro nějakÉ $d < 1$ a skoro všechna $n$, pak $T \in \Theta(f(n))$.

# Dolní odhad složitosti řadicích algoritmů

**Def:** *Asociativní řadicí algoritmus* je algoritmus, jehož množinu přípustných vstupních dat tvoří všechny konečnØ posloupnosti celýchčísel, a takový, že jeho výsledkem je neklesající permutace vstupní posloupnosti.

**PoznÆmka:** Asociativní řadicí algoritmus tedy nemůže předpoklÆdat nic o velikosti řazených prvků a jedinou možností testovÆní je srovnÆvatprvky mezi sebou.

**Věta:** Každý sekvenční asociativní řadicí algoritmus mÆ složitost v$\Omega(n \log n)$.

**PoznÆmka:** Věta říkÆ, že*dolní odhad* (časovØ) složitosti problØmu asociativního řazení je v množině $\Omega(n \log n)$. Protože však znÆme konkrØtnířadicí algoritmy s touto složitostí, vidíme, že tento odhad je dokonce *těsný*: ČasovÆ složitost problØmu asociativního řazení je v množině $\Theta(n \log n)$.

Např. složitost řazení vkládáním, výběrem, bublinkami či rozdělováním je $\Theta(n^2) \subseteq \Omega(n \log n)$, složitost řazení slučováním či haldou je $\Theta(n \log n) \subseteq \Omega(n \log n)$.

Pro určení složitosti uvažujeme zápis algoritmu v jednoduchém funkcionálním nebo imperativním jazyce, tj. ekvivalentní *sekvenční* implementaci RAMem.

# Důkaz Věty o dolním odhadu složitosti

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že prvky uspořádané posloupnosti jsou navzájem různé: chceme-li nejhorší případ, musíme seřazovat co nejvíce prvků. Dokonce se můžeme omezit jen na permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$: asociativní algoritmus si všímá jen srovnání dvojic prvků.

Poněvadž existuje celkem $n!$ možných permutací a pro každou takovou permutaci na vstupu musí podle toho algoritmu proběhnout jiný výpočet, existuje aspoň $n!$ různých výpočtů. Ve všech těchto výpočtech je aspoň $n! - 1$ binárních testů, jejichž výsledky odliší jednotlivé výpočty. Ale to znamená, že v *nejdelším* výpočtu (jde nám o nejhorší případ) musí být aspoň $\lfloor \log_2 n! \rfloor$ testů. Pro složitost $T$ *každého* algoritmu tedy musí platit $T(n) \geq \lfloor \log_2 n! \rfloor$. To znamená, že $T \in \Omega(\log n!) = \Omega(n \log n)$

**Cvičení:** V důkazu věty o dolním odhadu složitosti řadicích algoritmů se mlčky předpokládá, že složitost jednoho porovnání dvou čísel $a_i$ a $a_j$ je konstantní. Můžete uvést lepší (realističtější) odhad časové složitosti jednoho porovnání?

**Cvičení:** Ukažte, že $\log\left(n \cdot \log n\right) \in \Theta\left(\log n\right)$.

**Cvičení:** Uvážíme-li realistickou složitost jednoho porovnání, jak vyjde dolní odhad složitosti řadicích algoritmů? Je v rozporu s dokázanou větou? Je jejím zesílením?

# Algoritmus řazení rozdělovÆním

(funkcionÆlní verze)

```
quickSort :: [Int] → [Int]
quickSort []    =  []
quickSort (p:t) =  quickSort lt ++ [p] ++ quickSort ge
                   where lt = [ x | x←t, x<p ]
                         ge = [ x | x←t, x≥p ]
```

**Věta:** Nechť *In* $=$ *Out* je množina všech seznamů (posloupností) celých čísel,

$\varphi(s) \equiv$ „$s$ je konečný“,

$\psi(s,t) \equiv$ „$t$ je permutací seznamu $s$ a $t$ je neklesající“.

Pak `quickSort` je totÆlně korektní vzhledem k podmínkÆm $\varphi$, $\psi$.

**Věta:** ČasovÆ složitost algoritmu `quickSort` je v $\Theta(n^2)$.

Důkaz korektnosti: Konvergence i parciÆlní korektnost seukÆže indukcí vzhledem k dØlce seznamu $s$.

# Řazení rozdělovÆním (imperativní verze)

```
type  Element = Integer;
      Posl = array [1..MAX] of Element;

procedure QuickSort (n:Integer, var A:Posl);

  procedure Q (l,r:Integer);
    var p: Integer;
    begin if l<r then begin p := Part (l,r);
                            Q (l,p-1);  Q (p+1,r)
                      end
    end;

  procedure Part (l,r:Integer);
    var i,j: Integer; x,y: Element;
    begin x := A[r];  i := l - 1;
          for j:=l to r-1 do
              if A[j]≤x then begin i := i+1;
                                   y := A[i];  A[i] := A[j];  A[j] := y;
                             end;
          y := A[i+1];  A[i+1] := A[r];  A[r] := y
          Part := i + 1
    end;

begin  Q (1,n)  end
```

# Řazení rozdělovÆním (modif. imp. verze)

```
type  Element = Integer;
      Posl = array [1..MAX] of Element;

procedure QuickSort (n:Integer, var A:Posl);

  procedure Q (l,r:Integer);
    var p: Integer;
    begin if l<r then begin p := Part (l,r);
                            if p-l<r-p then begin Q (l,p-1);  Q (p+1,r) end
                                       else begin Q (p+1,r);  Q (l,p-1) end
                      end
    end;

  procedure Part (l,r:Integer);
    var i,j: Integer; x,y: Element;
    begin x := A[r];  i := l - 1;
          for j:=l to r-1 do
              if A[j]≤x then begin i := i+1;
                                   y := A[i];  A[i] := A[j];  A[j] := y;
                             end;
          y := A[i+1];  A[i+1] := A[r];  A[r] := y
          Part := i + 1
    end;

begin  Q (1,n)  end
```

**Věta:** Algoritmus řazení rozdělovÆním mÆ složitost v množině $\Theta(n^2)$.

**PoznÆmka:** *PrůměrnÆ dØlka* výpočtu podle algoritmu řazení rozdělovÆním (tzv. *průměrnÆ* nebo *očekÆvanÆ časovÆ složitost*) je v množině $\Theta(n \log n)$.

Důkaz věty o kvadratickØ složitosti: Není těžkØ zjistit, že dØlka výpočtu cyklu (repeat) je $c \cdot n$ (celØ pole se projde jedním průchodem a výměna prvků trvÆ konstantní dobu).

Označíme-li $T(n)$ složitost seřazení pole dØlky $n$, dostaneme

$$T(n) = c \cdot n + \max\{T(q) + T(n-q-1) \mid 0 \leq q < n\}$$

Při nevyvÆženØm dělení posloupnosti na podposloupnosti dØlek $n-1, 0$ je dØlka výpočtu kvadratickÆ. Tedy $T \in \Omega(n^2)$. Ale výraz $T(q) + T(n-q-1)$ nabude maxima pro $q = 0$ nebo $q = n-1$ (o tomto případu víme, že je kvadratický) – druhÆ derivace $T(n)$ vzhledem ke $q$ pro kvadratický odhad $T(n) \leq cn^2$ je kladnÆ.
Dohromady, $T \in \Omega(n^2)$, $T \in O(n^2)$, tj. $T \in \Theta(n^2)$.

Neformální zdůvodnění poznámky o průměrné složitosti:
Při každém vyvolání procedury Q se posloupnost délky $n$ rozdělí na dva úseky délek $q$ a $n - q - 1$. Předpokládáme-li rovnoměrné rozložení čísel (položek) v seřazované posloupnosti, pak pravděpodobnost, že $q < rn$, je rovna číslu $r$, $0 \leq r \leq 1$. Tedy pravděpodobnost, že se při výpočtu „nepříznivá“ hodnota hranice $q$ vybere ve významném počtu případů, klesá s číslem $r$ k nule. Proto stačí uvažovat jen případy, kdy se posloupnost dělí na úseky délek větších než $n/r_0$ pro nějaké pevné $r_0 > 0$ (ostatní případy mají nevýznamnou pravděpodobnost). Ale pak je největší hloubka zanoření rovna $\log_{\frac{1}{r_0}} n = -\log_{r_0} n$. Součet délek seřazovaných úseků v každé hloubce je nejvýše $n$, takže *průměrná* délka výpočtu je nejvýše $-c \cdot n \cdot \log_{r_0} n$, tedy v $O(n \log n)$. Dále se snadno ověří (například pro $r_0 = 1/2$), že $n \log n$ je i dolním odhadem, takže průměrná délka výpočtu je v $\Theta(n \log n)$.

# ProstorovÆ složitostřadicích algoritmů

Definujeme *prostorovou složitost* algoritmu analogicky jako časovou složitost, ale za míru složitosti místo počtu kroků výpočtu zvolíme maximÆlní množství paměti, kterÆ bude během výpočtu obsazena.

**Def:** ProstorovÆ složitost algoritmu $A$ je funkce, kterÆ pro každou velikost vstupních dat je rovna velikosti obsazenØ paměti při výpočtu, jenž tØto paměti spotřebuje nejvíc.

**PoznÆmka:** Označíme-li $\rho(A, \sigma_x)$ množství paměti spotřebovanØ výpočtem podle algoritmu $A$ z počÆtečního stavu $\sigma_x$ (odpovídajícího umístění dat $x$ na vstupu), potom prostorovÆ složitost algoritmu $A$ je

$$S_A(n) = \max\{\rho(A, \sigma_x) \mid |x| = n\}$$

Prostorová složitost všech zmiňovaných řadicích algoritmů je lineární, tj. $S \in \Theta(n)$. Důvod je ten, že součástí dat, s nimiž algoritmus pracuje, je samařazená posloupnost, a ta má délku $n$. Ostatní data (mimo tuto posloupnost, tj. „extrasekvenční“) mají v uvážených algoritmech velikost nejvýše $O(n)$.

**Def:** Zavedeme *extrasekvenční* prostorovou složitost řadicího algoritmu jako funkci zobrazující dØlky vstupní posloupnosti na velikost paměti obsazenØ při výpočtu v nejhorším případě, ale *nezapočítÆvÆme paměť obsazenou seřazovanou posloupností*.

Řadicí algoritmy, kterØ mají extrasekvenční prostorovou složitost konstantní, se nazývají *in situ*.

Řazení rozdělovÆním není *in situ*.

**Věta:** První varianta algoritmu `quickSort` mÆ extrasekvenční prostorovou složitost $\Theta(n)$, druhÆ (modifikovanÆ) varianta tohoto algoritmu mÆ extrasekvenční prostorovou složitost $\Theta(\log n)$.

**PoznÆmka:** Hovořit o řadicích algoritmech, zda jsou in situ, a zavÆdět jejich extrasekvenční prostorovou složitost mÆ praktický význam jen tehdy, je-li posloupnost reprezentovÆna polem a uložena v souvislØm œseku paměti. Při jiných datových reprezentacích posloupnosti (např. seznamem) se extrasekvenční prostorovÆ složitost nezavÆdí.

# Řazení haldou

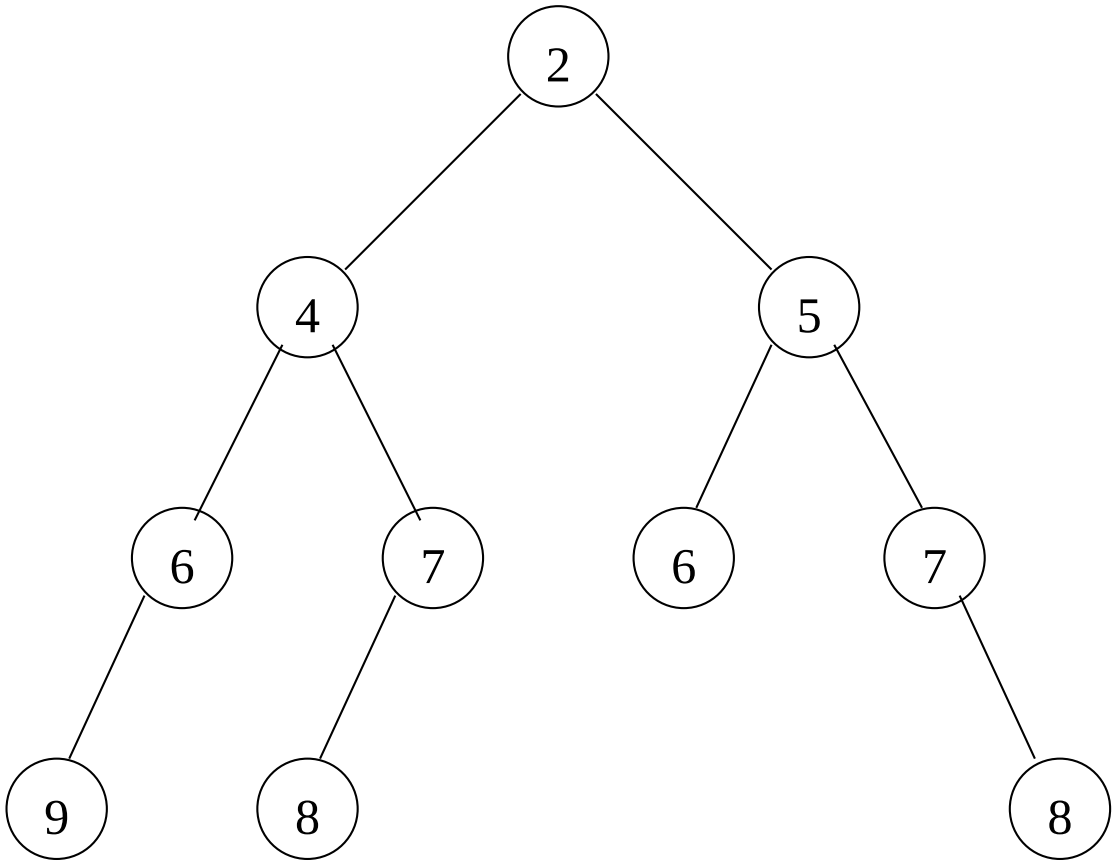
**Def:** Nechť $K$ je úplně uspořádaná množina tzv. *klíčů* (typicky množina čísel s přirozeným uspořádáním $\leq$). *Binární halda* je binární strom, jehož uzly jsou ohodnoceny prvky množiny $K$, a který splňuje tyto vlastnosti:

1. Délky všech větví se liší nejvýše o 1: mají délku $k$, případně $k-1$. Číslu $k$ pak říkáme *hloubka* haldy.
2. Hodnoty uzlů na každé větvi jsou vzestupně (sestupně) uspořádány.

Jsou-li hodnoty uzlů na každé větvi seřazeny vzestupně (čím dále od kořene, tím větší hodnoty), je v kořenu haldy nejmenší prvek. Hovoříme pak o *minimové* haldě (*min-heap*).

Jsou-li hodnoty uzlů na každé větvi seřazeny sestupně (čím dále od kořene, tím menší hodnoty), je v kořenu haldy největší prvek. Hovoříme pak o *maximové* haldě (*max-heap*).

Ve funkcionÆlní implementaci algoritmuřazení haldou, kde se pracuje s explicitní haldou (datovou strukturou binÆrní strom), použijeme minimovou haldu. Naopak v imperativní implementaci, kde se pracuje s implicitní haldou (reprezentovanou polem), je výhodnější použít maximovou haldu.


2
4
5
6
7
6
7
9
8
8

# Operace s binÆrní haldou

```
data Heap = Empty | Node Elem Heap Heap
```

ZÆkladní operace – konstruktory a selektory – mají konstantní složitost.

## Konstruktory

$\texttt{Empty} : \texttt{Heap}$

$\texttt{Node} : \texttt{Elem} \to \texttt{Heap} \to \texttt{Heap} \to \texttt{Heap}$

## Selektory

$\texttt{rootVal} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Elem}$

$\texttt{leftHeap} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Heap}$

$\texttt{rightHeap} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Heap}$

$\texttt{isEmpty} : \texttt{Heap} \to \texttt{Bool}$

# Další operace pro prÆci s binÆrní haldou

VyhledÆní minimÆlního prvku (v minimovØ haldØ)

$\texttt{minH} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Elem}$

$\texttt{minH} = \texttt{rootVal}$

(složitost $\Theta(1)$)

Odstranění minimÆlního prvku (z minimovØ haldy)

$\texttt{extractMinH} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Heap}$

(složitost $\Theta(\log n)$)

Odstranění maximÆlního prvku (z maximovØ haldy)

$\texttt{extractMaxH} : \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Heap}$

(složitost $\Theta(\log n)$)

Přidání prvku

$\texttt{insertH} : \texttt{Elem} \to \texttt{Heap} \to \texttt{Heap}$

(složitost $\Theta(\log n)$)

Odstranění prvku

$\texttt{removeH} : \texttt{Heap} \to \texttt{Heap} \dashrightarrow \texttt{Heap}$

(složitost $\Theta(\log n)$)

**Věta:** NeprÆzdnÆ binÆrní halda $n$ uzlech mÆ hloubku $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Důkaz indukcí podle $n$.

**Def:** BinÆrní strom, v jehož každØm podstromu se počet uzlů levØho a pravØho podstromu liší nejvýše o jednu, se nazývÆ *uzlově vyvÆžený* binÆrní strom.

**Věta:** Každý uzlově vyvÆžený binÆrní strom je haldou (až na ohodnocení uzlů).

Důkaz: Je třeba dokÆzat, že dØlky všech vìtví uzlově vyvÆženØho stromu se liší nejvýše o jednu.
PředpoklÆdejme sporem, že tvrzení neplatí, a $T$ je nejmenší strom, který tvrzení porušuje. Tedy v každØm podstromu stromu $T$ se počet uzlů vlevo a vpravo liší nejvýše o jednu, ale existují zde dvě větve dØlek $m$ a $k$, přičemž $m \geq k + 2$. Z minimality stromu $T$ plyne, že jedna z těchto dvou větví, řekněme ta delší, dØlky $m$, leží v levØm podstromu $T_l$ stromu $T$, a druhÆ, kratší, dØlky $k$, v pravØm podstromu $T_r$ stromu $T$. Navíc, rovněž z minimality, všechny větve jdoucí do $T_l$ mají dØlku $m$ nebo $m - 1$, všechny větve jdoucí do $T_r$ mají dØlku $k$ nebo $k + 1$. To znamenÆ, že $T_l$ mÆ aspoň o dva uzly víc než $T_r$. Ale podle předpokladu věty mÆ nejvýše o jeden uzel více, což je spor.

# Algoritmus řazení binÆrní haldou (funkcionÆní verze)

```
data Heap  =  Empty  |  Node Int Heap Heap

insHeap :: Int → Heap → Heap
insHeap u Empty          =  Node u Empty Empty
insHeap u (Node v p q)   =  if u ≥ v  then  Node v (insHeap u q) p
                                      else  Node u (insHeap v q) p

toHeap :: [Int] → Heap
toHeap s = foldr insHeap Empty s

toList :: Heap → [Int]
toList Empty = []
toList (Node x l r) = x : merge (toList l) (toList r)

heapSort :: [Int] → [Int]
heapSort  =  toList · toHeap
```

# Korektnost řazení haldou

**Věta:** Algoritmus `heapSort` je totÆlně korektní řadicí algoritmus.

Konvergence algoritmu je zřejmÆ. Důkaz parciÆlní korektnosti vyplývÆ z nÆsledujících lemmat.

**Lemma:** Funkce `toList` vytvoří z haldy $h$ seznam s týmiž prvky jako měla halda $h$, ale uspořÆdaný vzestupně.

**Lemma:** Je-li $u$ číslo a $h$ uzlově vyvÆženÆ halda, pak `insHeap` $u$ $h$ je halda obsahující prÆvě prvky z haldy $h$ a prvek $u$.

**Lemma:** Funkce `toHeap` vytvoří ze seznamu $s$ haldu obsahující tytØž prvky jako seznam $s$.

Důkaz prvního lemmatu indukcí podle velikosti haldy.

Důkaz druhØho lemmatu: indukcí podle počtu prvků v $h$ se ukÆže, že binÆrní strom `insHeap` $u$ $h$ bude opět uzlově vyvÆžený.
Podle věty o binÆrních stromech vyvÆžených vzhledem k počtu uzlů bude výsledek opět halda.
UspořÆdÆní hodnot podØétví vyplývÆ z definice funkce `insHeap`.

Třetí lemma indukcí podle dØlky seznamu a z definice kombinÆtoru `foldr`.

$$\texttt{foldr insHeap Empty [}x_1\texttt{,}x_2\texttt{,...,}x_n\texttt{]}$$
$$= \texttt{insHeap } x_1 \ (\texttt{insHeap } x_2 \ (\ldots(\texttt{insHeap } x_n \texttt{ Empty})\ldots))$$

# Složitost řazení haldou

**Lemma:** Procedura `insHeap` mÆ složitost v $O(\log n)$.

Důkaz: Funkce `insHeap` se rekursivně vyhodnotí prÆvě tolikrÆt, jako je hloubka haldy. Ale ta je logaritmickÆ vzhledem k počtu jejích uzlů, jichž je vždy nejvýše $n$.

**Věta:** Algoritmus řazení haldou mÆ složitost v $\Theta(n \log n)$.

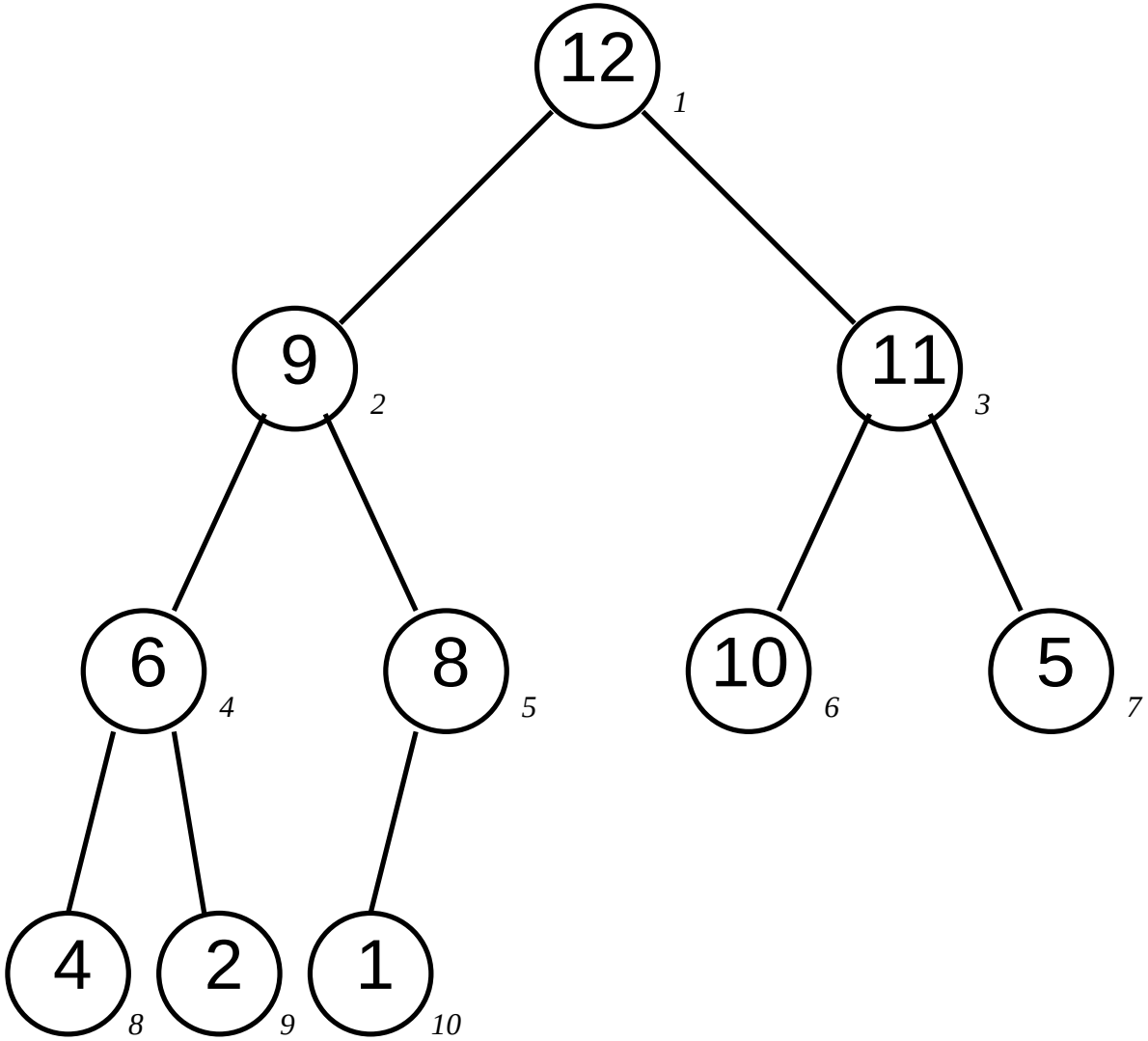
Důkaz: Z předchozího lemmatu vyplývÆ, že složitost funkce `toHeap` je v $O(n \log n)$. Ve funkci `toList` je hloubka rekursivního zanoření logaritmickÆ, protože seznamy se půlí. Složitost pomocnØ funkce `merge` je lineÆrní a celkovou dØlku výpočtu všech volÆní funkce `merge` ve stejnØ hloubce $k$ (tj. se stejně dlouhými seznamy) je $\frac{n}{2^k} \cdot 2^k = n$. Funkce `toList` mÆ tedy složitost takØ v $O(n \log n)$. Celkem je tedy horní odhad složitosti funkce `heapSort` $n \log n$, ale podle Věty o dolním odhadu složitosti řadicích je toto i dolním odhadem.

V imperativním algoritmu `heapSort` se používÆ maximovÆ halda, tj. binÆrní halda, kterÆ mÆ položky ve vìtvích seřazeny *sestupnì*. Tedy největší položka je vždy v kořeni.

Jelikož algoritmus mÆ haldu efektivnì reprezentovÆnu polem, je zde výhodnìjší uvažovat binÆrní haldu nikoliv uzlovì vyvÆženou, ale naopak s levým podstromem „tìžším“.

**Def:** *Vlevo zarovnanÆ halda* je binÆrní halda, jejíž všechny vìtve dØlky $k$ leží nalevo od vìtví dØlky $k-1$.

# Vlevo zarovnanÆ halda



**Věta:** Reprezentujme vlevo zarovnanou binÆrní haldu na $n$ uzlech posloupností hodnot jejích uzlů $(a_1, \ldots, a_n)$ takto: $a_1$ reprezentuje kořen haldy a je-li uzel $u$ reprezentovÆn prvkem $a_i$, pak levý nÆsledník uzlu $u$ je reprezentovÆn prvkem $a_{2i}$ a pravý nÆsledník uzlu $u$ je reprezentovÆn prvkem $a_{2i+1}$. Pak posloupnost $(a_1, \ldots, a_n)$ je haldou určena jednoznačně.

Věta umožňuje pracovat s vlevo zarovnanou binÆrní haldou reprezentovanou v paměti polem. Vlevo zarovnanÆ binÆrní halda je totØž jako pole rozepsanØ „po vrstvÆch“.

# Algoritmus řazení binÆrní haldou (imp. verze)

```
type  Element = Int;
      Posl = array [1..MAX] of Element;

procedure heapSort (n:Int, var A:Posl);
  var l,r: Int;  x: Element;

  procedure createHeap (l,r:Int);
    { vytvoření haldy A[l]...A[r] ze dvou podhald začínajících A[2*l] a A[2*l+1] }
    var i,j:Int; {pom. indexy}  y:Element; {zařazovaný prvek}  p:Bool; {sestupovat?}
    begin i := l;  j := 2*i;  y := A[i];  p := True;
          while  p  &&  (j≤r) do  { sestupujeme }
            begin if (j<r) && (A[j]<A[j+1]) then j:=j+1;
                  { A[j] je teď větší z kořenů podhald pod A[i] }
                  p := y<A[j];
                  if p then { A[j]>y, takže posuneme A[j] o patro výš }
                            begin
                              A[i] := A[j];
                              i := j;  j := 2*i
                            end
            end;
          A[i] := y  { prvek y zařazen na své místo }
    end {createHeap};
```

```
begin {heapSort}
   { postupně vytvoříme haldu A[1],...,A[n] }
        for l := n div 2 downto 1 do  createHeap(l,n);

   { V kořenu (A[1]) je prvek s největším ohodnocením.}
   { Vyměníme ho s koncem pole, haldu zkrátíme        }
   { a restaurujeme zařazením A[1] na správné místo   }
        for r := n downto 2 do
         begin
            x := A[1];  A[1] := A[r];  A[r] := x;
            createHeap (1,r-1)
         end
end {heapSort};
```

# Korektnost a složitost imperativního algoritmu `heapSort`

**Věta:** Mějme vlevo zarovnanou binÆrní haldu reprezentovanou posloupností $(a_l, \ldots, a_r)$ a nechť oba podstromy pod kořenem splňují podmínky haldy. Pak posloupnost $(a'_l, \ldots, a'_r)$ ve stavu po provedení `createHeap`$(a, l, r)$ splňuje podmínky (vlevo zarovnanØ) binÆrní haldy.

Důkaz indukcí podle hloubky haldy.

**Věta:** Provedení procedury `heapSort`$(A)$ seřadí posloupnost $A$

Idea důkazu: JednoprvkovØ podstromy reprezentovanØ druhou polovinou posloupnosti $A$ jsou triviÆlní podhaldy. První fÆze algoritmu vytvÁÍ z těchto podhald větší podhaldy. Na konci první fÆze je posloupnost$A$ binÆrní haldou.

DruhÆ fÆze algoritmu vytvÁÍ z haldy seřazenou posloupnost. To vyplývÆ z toho, že největší prvek haldy je vždy v jejím kořenu: největší prvky se sklÆdají na konec posloupnosti.

**Věta:** Algoritmus řazení haldou konverguje.

Důkaz: Tvrzení věty vyplývÆ z konečnØ velikosti a hloubky haldy.

**Věta:** Řazení haldou (imperativní algoritmus) mÆ složitost v $\Theta(n \log n)$.

Důkaz: První fÆze (vytvÆření haldy) mÆ složitost $O\left(\frac{n}{2} \log n\right)$, druhÆ fÆze mÆ složitost $O(n \log n)$, obě tedy dohromady $O(n \log n)$.

Podle Věty o dolním odhadu složitosti musí být rovněž v $\Omega(n \log n)$.

Z obou odhadů pak plyne tvrzení.