CLP(FD) - prohledávání

Vestavěné predikáty pro labeling

- Instanciace proměnné `Variable` hodnotami v její doméně

  `indomain( Variable )`

  hodnoty jsou instanciovány při backtrackingu ve vzrůstajícím pořadí

```
?- X in 4..5, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ?

labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-     % výběr nejlevější proměnné k instanciaci
     indomain( Var ),          % výběr hodnot ve vzrůstajícím pořadí
     labeling( Rest ).
```

- `labeling( Options, Variables )`

```
?- A in 0..2, B in 0..2, B#< A, labeling([], [A,B]).
```


Uspořádání hodnot a proměnných

- Při prohledávání je rozhodující **uspořádání hodnot a proměnných**
- Určují je **heuristiky výběru hodnot a výběru proměnných**

```
labeling( [] ).
labeling( Variables  ) :-
     select_variable(Variables,Var,Rest),
     select_value(Var,Value),
     ( Var #= Value,
       labeling( Rest )
     ;
       Var #\= Value ,          % nemusí dojít k instanciaci Var
       labeling( Variables )   % proto pokračujeme se všemi proměnnými včetně Var
     ).
```

- **Statické uspořádání:** určeno už před prohledáváním
- **Dynamické uspořádání:** počítá se během prohledávání

Výběr hodnoty

- Obecný princip výběru hodnoty: **první úspěch *(succeed first)***
  - volíme pořadí tak, abychom výběr nemuseli opakovat
  - `?- domain([A,B,C],1,2), A#=B+C.` optimální výběr A=2,B=1,C=1 je bez backtrackingu
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr hodnoty   př. `labeling([down], Vars)`
  - up: doména procházena ve vzrůstajícím pořadí (default)
  - down: doména procházena v klesajícím pořadí
- Parametry `labeling/2` řídící, jak je výběr hodnoty realizován
  - `step`: volba mezi `X #= M, X #\= M` (default)
    - viz dřívější příklad u "Uspořádání hodnot a proměnných"
  - enum: vícenásobná volba mezi všemi hodnotami v doméně
    - podobně jako při `indomain/1`
  - `bisect`: volba mezi `X #=< Mid, X #> Mid`
    - v jednom kroku labelingu nedochází nutně k instanciaci proměnné

Výběr proměnné

- Obecný princip výběru proměnné: ***first-fail***
  - výběr proměnné, pro kterou je nejobtížnější nalézt správnou hodnotu
    pozdější výběr hodnoty pro tuto proměnnou by snadněji vedl k failu
  - vybereme proměnnou **s nejmenší doménou**
  - `?- domain([A,B,C],1,3), A#<3, A#=B+C.` nejlépe je začít s výběrem A
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr proměnné
  - `leftmost`: nejlevější (default)
  - `ff`: s (a) nejmenší velikostí domény `fd_size(Var,Size)`
    (b) nejlevější z nich
  - `ffc`: s (a) nejmenší velikostí domény
    (b) největším množstvím omezením „čekajících" na proměnné `fd_degree(Var,Size)`
    (c) nejlevější z nich
  - `min/max`: s (a) nejmenší/největší hodnotou v doméně proměnné
    (b) nejlevnější z nich `fd_min(Var,Min)/fd_max(Var,Max)`

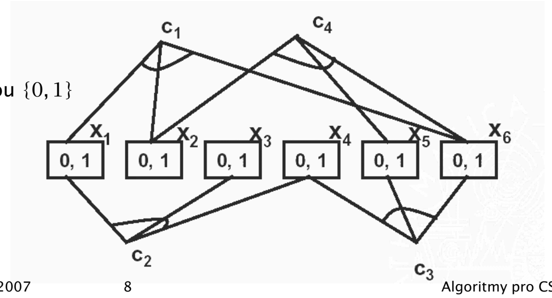
Hledání optimálního řešení (předpokládejme minimalizaci)

- Parametry `labeling/2` pro optimalizaci: `minimize(F)/maximize(F)`
  - `Cena #= A+B+C, labeling([minimize(Cena)], [A,B,C])`
- **Metoda větví a mezí *(branch&bound)***
  - uvažujeme nejhorší možnou cenu řešení UB (např. cena už nalezeného řešení)
  - počítáme dolní odhad LB ceny částečného řešení
    LB je tedy nejlepší možná cena pro rozšíření tohoto řešení
  - procházíme strom a vyžadujeme, aby prozkoumávaná větev měla cenu $LB < UB$
    pokud je $LB \geq UB$, tak víme, že v této větvi není lepší řešení a odřízneme ji

Algoritmy pro řešení problému splňování podmínek (CSP)

Grafová reprezentace CSP

- **Reprezentace podmínek**
  - intenzionální (matematická/logická formule)
  - extenzionální (výčet k-tic kompatibilních hodnot, 0-1 matice)
- **Graf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje dva vrcholy)
- **Hypergraf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje množinu vrcholů)
- Reprezentace CSP pomocí **hypergrafu podmínek**
  - vrchol = proměnná, hyperhrana = podmínka
- Příklad
  - proměnné $x_1, \ldots, x_6$ s doménou $\{0, 1\}$
  - omezení $c_1 : x_1 + x_2 + x_6 = 1$
    $c_2 : x_1 - x_3 + x_4 = 1$
    $c_3 : x_4 + x_5 - x_6 > 0$
    $c_4 : x_2 + x_5 - x_6 = 0$

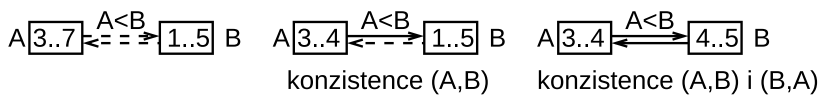


Binární CSP

- **Binární CSP**
  - CSP, ve kterém jsou pouze binární podmínky
  - unární podmínky zakódovány do domény proměnné
- **Graf podmínek** pro binární CSP
  - není nutné uvažovat hypergraf, stačí graf (podmínka spojuje pouze dva vrcholy)
- **Každý CSP lze transformovat na "korespondující" binární CSP**
- Výhody a nevýhody binarizace
  - získáváme unifikovaný tvar CSP problému, řada algoritmů navržena pro binární CSP
  - bohužel ale značné zvětšení velikosti problému
- Nebinární podmínky
  - složitější propagační algoritmy
  - lze využít jejich sémantiky pro lepší propagaci
    - příklad: `all_different` vs. množina binárních nerovností

Vrcholová a hranová konzistence

- **Vrcholová konzistence *(node consistency)* NC**
  - každá hodnota z aktuální domény V_i proměnné splňuje všechny unární podmínky s proměnnou V_i
- **Hranová konzistence *(arc consistency)* AC** pro **binární CSP**
  - **hrana** (V_i, V_j) **je hranově konzistentní**, právě když pro každou hodnotu x z aktuální domény D_i existuje hodnota y tak, že ohodnocení $[V_i = x, V_j = y]$ splňuje všechny binární podmínky nad V_i, V_j.
  - hranová konzistence je **směrová**
    - konzistence hrany (V_i, V_j) nezaručuje konzistenci hrany (V_j, V_i)



  - **CSP** je **hranově konzistentní**, právě když jsou všechny jeho hrany (v obou směrech) hranově konzistentní

Je hranová konzistence dostatečná?

- Použitím AC odstraníme mnoho nekompatibilních hodnot
  - Dostaneme potom řešení problému? NE
  - Víme alespoň zda řešení existuje? NE
- `domain([X,Y,Z],1,2), X#\= Y, Y#\= Z, Z#\= X`
  - hranově konzistentní
  - nemá žádné řešení
- Jaký je tedy význam AC?
  - někdy dá řešení přímo
    - nějaká doména se vyprázdní ⇒ řešení neexistuje
    - všechny domény jsou jednoprvkové ⇒ máme řešení
  - v obecném případě se alespoň zmenší prohledávaný prostor

Řešení nebinárních podmínek

- S n-árními podmínkami se pracuje přímo
- Podmínka je **obecně hranově konzistentní (GAC)**, právě když pro každou proměnnou V_i z této podmínky a každou hodnou $x \in D_i$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - `A + B = C, A in 1..3, B in 2..4, C in 3..7` je obecně hranově konzistentní
- Využívá se sémantika podmínek
  - speciální typy konzistence pro globální omezení
    - viz `all_distinct`
  - konzistence mezí
    - propagace pouze při změně nejmenší a největší hodnoty v doméně proměnné
- Pro různé podmínky lze použít různý druh konzistence
  - A#<B: hranová konzistence, konzistence mezí

Konzistenční algoritmus pro nebinární podmínky

- Algoritmus s **frontou proměnných** (někdy též nazýván AC-8)
  - opakovaně se provádí revize podmínek, dokud se mění domény

```
procedure Nonbinary-AC-3-with-Variables(Q)
while Q non empty do
      vyber a smaž V_j ∈Q
      for ∀C takové, že V_j ∈ scope(C) do
          W := revise(V_j,C)
             // W je množina proměnných jejichž, doména se změnila
          if ∃ V_i ∈ W taková, že D_i = ∅ then return fail
          Q := Q ∪ {W}
end  Non-binary-consistency
```

  - **rozsah omezení** $scope(C)$: množina proměnných, na nichž je C definováno
- Implementace
  - u každé proměnné je seznam **vybraných podmínek** pro propagaci
  - REVISE procedury pro tyto podmínky definuje uživatel v závislosti na typu podmínky

Revize podmínky pro hranovou konzistenci

- Jak udělat podmínku $c(V_j, V_i)$ na hraně (V_j, V_i) hranově konzistentní vůči V_j?
- Z domény D_j vyřadím takové hodnoty x, které nejsou konzistentní s aktuální doménou D_i (pro x neexistuje žádá hodnoty y v D_i tak, aby ohodnocení $V_j = x$ a $V_i = y$ splňovalo binární podmínku $c(V_j, V_i)$ mezi V_j a V_i)
- procedure revise(V_j,$c(V_j,V_i)$)

```
Deleted := false
for ∀x in D_j do
    if neexistuje y ∈ D_i takové, že (x,y) je konzistentní
    then D_j := D_j  −  {x}
         Deleted := true
    end if
return Deleted
end revise
```

- domain([V_1,V_2],2,4), V_1#< V_2 revise(V_1, V_1#< V_2) smaže 4 z D_1,D_2 se nezmění

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - podmínka má **konzistentní meze (BC)**, právě když pro každou proměnnou V_j z této podmínky a každou hodnou $x \in D_j$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že je podmínka splněna a pro vybrané ohodnocení y_i proměnné V_i platí $\min(D_i) \leq y_i \leq \max(D_i)$
  - stačí propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty (při změně mezí)** v doméně proměnné
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - A #> B => min(A) = min(B)+1, max(B) = max(A)-1
  - příklad: A in 4..10, B in 6..18, A #> B
    min(A) = 6+1 ⇒ A in 7..10
    max(B) = 10-1 ⇒ B in 6..9
  - podobně: A #< B, A #>= B, A #=< B

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A #= B + C => min(A) = min(B)+min(C), max(A) = max(B)+max(C)
  min(B) = min(A)-max(C), max(B) = max(A)-min(C)
  min(C) = min(A)-max(B), max(C) = max(A)-min(B)
  - změna min(A) vyvolá pouze změnu min(B) a min(C)
  - změna max(A) vyvolá pouze změnu max(B) a max(C), ...
- Příklad: A in 1..10, B in 1..10, A #= B + 2, A #> 5, A #\= 8
  A #= B + 2 ⇒ min(A)=1+2, max(A)=10+2 ⇒ A in 3..10
  ⇒ min(B)=1-2, max(B)=10-2 ⇒ B in 1..8
  A #> 5 ⇒ min(A)=6 ⇒ A in 6..10
  ⇒ min(B)=6-2 ⇒ B in 4..8 (nové vyvolání A #= B + 2)
  A #\= 8 ⇒ A in (6..7) \/ (9..10) (meze stejné, k propagaci A #= B + 2 nedojde)
- Vyzkoušejte si: A #= B - C, A #>= B + C

Globální podmínky

- Propagace je lokální
  - pracuje se s jednotlivými podmínkami
  - interakce mezi podmínkami je pouze přes domény proměnných
- Jak dosáhnout více, když je silnější propagace drahá?
- Seskupíme několik podmínek do jedné tzv. **globální podmínky**
- Propagaci přes globální podmínku řešíme
  speciálním algoritmem navrženým pro danou podmínku
- Příklady:
  - `all_different` omezení: hodnoty všech proměnných různé
  - `serialized` omezení:
    rozvržení úloh zadaných startovním časem a dobou trvání tak, aby se nepřekrývaly

Propagace pro `all_distinct`

- **U = {X2, X4, X5}, dom(U) = {2, 3, 4}**:
  `{2,3,4}` nelze pro `X1, X3, X6`
  `X1 in 5..6, X3 = 5, X6 in {1} \/ (5..6)`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	**3**	**4**
Anna	2	5
Ota	**2**	**4**
Eva	**3**	**4**
Marie	1	6

- **Konzistence:** $\forall \{X_1, \ldots, X_k\} \subset V : card\{D_1 \cup \cdots \cup D_k\} \geq k$
  stačí hledat **Hallův interval** I: velikost intervalu I je rovna
  počtu proměnných, jejichž doména je v I
- **Inferenční pravidlo**
  - $U = \{X_1, \ldots, X_k\}$, $dom(U) = \{D_1 \cup \cdots \cup D_k\}$
  - $card(U) = card(dom(U)) \Rightarrow \forall v \in dom(U), \forall X \in (V - U), X \neq v$
  - hodnoty v Hallově intervalu jsou pro ostatní proměnné nedostupné
- **Složitost**: $O(2^n)$ – hledání všech podmnožin množiny n proměnných (naivní)
  $O(n \log n)$ – kontrola hraničních bodů Hallových intervalů (1998)

Prohledávání + konzistence

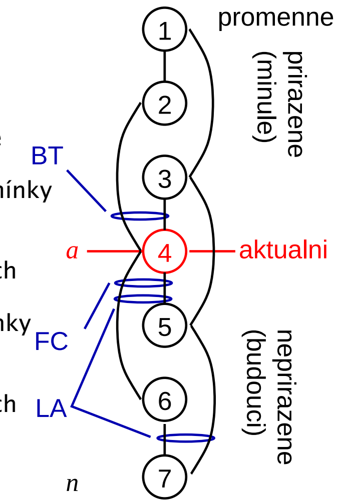
- Splňování podmínek **prohledáváním** prostoru řešení
  - podmínky jsou užívány pasivně jako test
  - přiřazuji hodnoty proměnných a zkouším co se stane
  - vestavěný prohledávací algoritmus Prologu: **backtracking**, triviální: **generuj & testuj**
  - úplná metoda (nalezneme řešení nebo dokážeme jeho neexistenci)
  - zbytečně pomalé (exponenciální): procházím i „evidentně" špatná ohodnocení
- **Konzistenční (propagační) techniky**
  - umožňují odstranění nekonzistentních hodnot z domény proměnných
  - neúplná metoda (v doméně zůstanou ještě nekonzistentní hodnoty)
  - relativně rychlé (polynomiální)
- Používá se **kombinace obou metod**
  - postupné přiřazování hodnot proměnným
  - po přiřazení hodnoty odstranění nekonzistentních hodnot konzistenčními technikami

Prohledávání s navracením

- Základní prohledávací algoritmus pro problémy splňování podmínek
- **Prohledávání stavového prostoru do hloubky**
- Dvě fáze prohledávání s navracením
  - **dopředná fáze**: proměnné jsou postupně vybírány, rozšiřuje se částečné řešení přiřazením konzistení hodnoty (pokud existuje) další proměnné
    - po vybrání hodnoty testujeme konzistenci
  - **zpětná fáze**: pokud neexistuje konzistentní hodnota pro aktuální proměnnou, algoritmus se vrací k předchozí přiřazené hodnotě
- Proměnné dělíme na
  - **minulé** – proměnné, které už byly vybrány (a mají přiřazenu hodnotu)
  - **aktuální** – proměnná, která je právě vybrána a je jí přiřazována hodnota
  - **budoucí** – proměnné, které budou vybrány v budoucnosti

Přehled algoritmů

- **Backtracking (BT)** kontroluje v kroku a podmínky
  $c(V_1, V_a), \ldots, c(V_{a-1}, V_a)$
  z minulých proměnných do aktuální proměnné
- **Kontrola dopředu (FC)** kontroluje v kroku a podmínky
  $c(V_a, V_{a+1}), \ldots, c(V_a, V_n)$
  z aktuální proměnné do budoucích proměnných
- **Pohled dopředu (LA)** kontroluje v kroku a podmínky
  $\forall l(a \le l \le n), \forall k(a \le k \le n), k \ne l : c(V_k, V_l)$
  z aktuální proměnné do budoucích proměnných
  a mezi budoucími proměnnými



Základní algoritmus prohledávání s navracením

- Pro jednoduchost proměnné očíslujeme a ohodnocujeme je v daném pořadí
- Na začátku voláno jako `labeling(G,1)`

```
procedure labeling(G,a)
if a > |uzly(G)| then return uzly(G)
for ∀x ∈ D_a do
    if consistent(G,a) then    % consistent(G,a) je nahrazeno FC, LA, ...
        R := labeling(G,a+1)
        if R ≠ fail then return R
return fail
end labeling
```

Po přiřazení všech proměnných vrátíme jejich ohodnocení

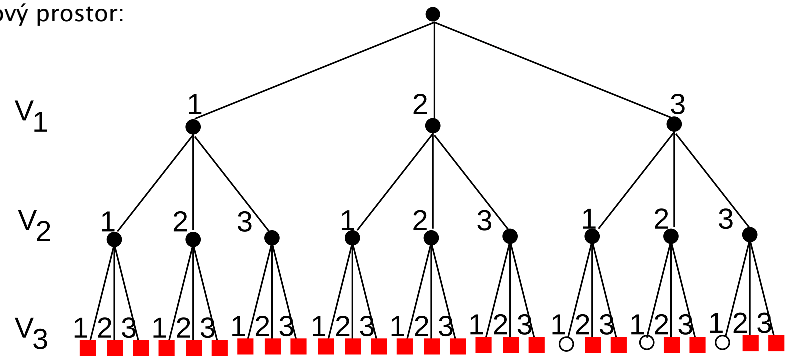
- Procedury `consistent` uvedeme pouze pro binární podmínky

Backtracking (BT)

- Backtracking ověřuje v každém kroku konzistenci podmínek vedoucích z minulých proměnných do aktuální proměnné
- Backtracking tedy zajišťuje konzistenci podmínek
  - na všech minulých proměnných
  - na podmínkách mezi minulými proměnnými a aktuální proměnnou
-
```
procedure BT(G,a)
Q:={(V_i,V_a) ∈ hrany(G), i < a}              % hrany vedoucí do minulých proměnných
Consistent := true
while Q není prázdná ∧ Consistent do
  vyber a smaž libovolnou hranu (V_k,V_m) z Q
  Consistent := not revise(V_k,V_m)     % pokud vyřadíme prvek, bude doména prázdná
return Consistent
end BT
```


Příklad: backtracking

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $\quad V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



  - červené čtverečky: chybný pokus o instanciaci, řešení neexistuje
  - nevyplněná kolečka: nalezeno řešení
  - černá kolečka: vnitřní uzel, máme pouze částečné přiřazení

Kontrola dopředu *(FC – forward checking)*

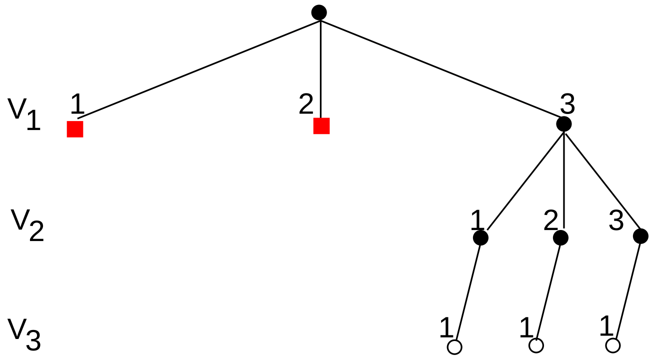
- FC je rozšíření backtrackingu
- FC navíc zajišťuje konzistenci mezi aktuální proměnnou a budoucími proměnnými, které jsou s ní spojeny dosud nesplněnými podmínkami
- procedure FC(G,a)

```
Q:={(V_i,V_a) ∈ hrany(G), i > a}     % přidání hran z aktuální proměnné do budoucích prom.
Consistent := true
while Q není prázdná ∧ Consistent do
      vyber a smaž libovolnou hranu (V_k,V_m) z Q
      if revise((V_k,V_m)) then
         Consistent := (|D_k| > 0)     % vyprázdnění domény znamená nekonzistenci
return Consistent
end FC
```

- Hrany z aktuální proměnné do minulých proměnných není nutno testovat

Příklad: kontrola dopředu

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $\quad V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Pohled dopředu *(LA – looking ahead)*

- LA je rozšíření FC, LA zajišťuje hranovou konzistenci
- LA navíc ověřuje i konzistenci všech hran mezi budoucími proměnnými
- procedure LA(G,a)

```
Q := {(V_i,V_a) ∈ hrany(G), i > a}     % začínáme s hranami do a
Consistent := true
while Q není prázdná ∧ Consistent do
      vyber a smaž libovolnou hranu (V_k,V_m) z Q
      if revise((V_k,V_m)) then
         Q := Q ∪ {(V_i,V_k)|(V_i,V_k) ∈ hrany(G), i ≠ k, i ≠ m, i > a}
         Consistent := (|D_k| > 0)
return Consistent
end LA
```

  - Hrany z aktuální proměnné do minulých proměnných opět netestujeme
  - Tato LA procedura je založena na AC-3, lze použít i jiné AC algoritmy

Příklad: pohled dopředu

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 4$, $\quad V_1\# > V_2$, $\quad V_2\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor: