MB104 – 2. demonstrovaná cvičení
Algebraické struktury

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

26.2. 2007

Příklad 1 *Rozhodněte o následujících množinách a operacích, jaké tvoří struktury (grupoid, pologrupa, zda existují levé (pravé) neutrální prvky, grupa):*

1. *podmnožiny množiny přirozených čísel spolu s operací sjednocení*
2. *přirozená čísla spolu s binární operací největší společný dělitel*
3. *přirozená čísla spolu s binární operací nejmenší společný násobek*
4. *množina všech invertibilních matic* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *spolu se sčítáním*
5. *množina všech matic* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *spolu s násobením matic*
6. *množina všech matic* 2×2 *spolu s odčítáním matic*
7. *množina všech invertibilních matic* 2×2 *nad* $\mathbb{Z}_2$ *s násobením matic*
8. *množina* $\mathbb{Z}_6$ *spolu s násobením (modulo 6)*
9. *množina* $\mathbb{Z}_7$ *spolu s násobením (modulo 7)*

Svá tvrzení zdůvodněte (proč je něco např. pouze grupoid a není pologrupa ...). U třetího příkladu od konce sestavte tabulku dané operace

Řešení.

1. monoid
2. pologrupa (bez neutrálního prvku)
3. monoid (číslo 1 je neutrálním prvkem)
4. není ani grupoid (uvážíme $A + (-A)$ pro nějakou invertibilní matici A)
5. monoid
6. grupoid (není asociativní)
7. grupa
8. pologrupa
9. pologrupa

$\square$

V příkladě 7 má grupa následující prvky: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Potom tabulka operace násobení matic vypadá následovně:

	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	A	E	F	C	D
C	C	D	A	B	F	E
D	D	C	F	E	A	B
E	E	F	B	A	D	C
F	F	E	D	C	B	A

Příklad 2. *Určete grupu symetrií krychle (popište všechny symetrie). Je tato grupa komutativní? Pokuste se sestavit alespoň část tabulky operace skládání symetrií.*

Příklad 2. *Určete grupu symetrií krychle (popište všechny symetrie). Je tato grupa komutativní? Pokuste se sestavit alespoň část tabulky operace skládání symetrií.*

Řešení. Grupa má 48 prvků, z nichž 24 jsou generovány pouze rotacemi. □

Příklad 3. *Rozložte na součin transpozic následující permutaci:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Spočtěte σ^{336}.

Příklad 3. *Rozložte na součin transpozic následující permutaci:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Spočtěte σ^{336}.

Řešení. $\sigma = (1,5,9)(2,8,4,7,3,6) =$
$(1,5) \circ (5,9) \circ (2,8) \circ (8,4) \circ (4,7) \circ (7,3) \circ (3,6)$.
$\sigma^{336} = \mathrm{Id}$ $\square$

Doplňte následující tabulku operace $*$ na množině $\{a, b, c\}$ tak, aby se jednalo o pologrupu.

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

V libovolné grupě platí tzv. zákony o krácení:
$ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$

V libovolné grupě platí tzv. zákony o krácení:
$ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$
Doplňte následující tabulku operace $*$ na množině $\{a, b, c\}$ tak, aby se jednalo o grupu.

	a	b	c
a			
b		a	
c			a

Určete počet všech trojprvkových grupoidů (až na isomorfismus, tj. přejmenování prvků)

Určete počet všech trojprvkových grupoidů (až na isomorfismus, tj. přejmenování prvků)
Určete počet všech trojprvkových grup (až na isomorfismus, tj. přejmenování prvků)

Nalezněte inverzi prvku 13 v $\mathbb{Z}_{171}^{+} = \mathbb{Z}_{171} - \{[\![0]\!]\}$.

Nalezněte inverzi prvku 13 v $\mathbb{Z}_{171}^{+} = \mathbb{Z}_{171} - \{[\![0]\!]\}$.
Bezoutova věta Pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ existují $u, v \in Z$ taková, že

$$ua + bv = (a, b),$$

kde (a, b) značí největšího společného dělitele čísel a a b.

Nalezněte inverzi prvku 13 v $\mathbb{Z}_{171}^{+} = \mathbb{Z}_{171} - \{[\![0]\!]\}$.
Bezoutova věta Pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ existují $u, v \in Z$ taková, že

$$ua + bv = (a, b),$$

kde (a, b) značí největšího společného dělitele čísel a a b.
Tato čísla nalezneme pomocí **Eukleidova algoritmu**

Eulerova funkce φ

Pro dané přirozené číslo n udává počet čísel menších než n.