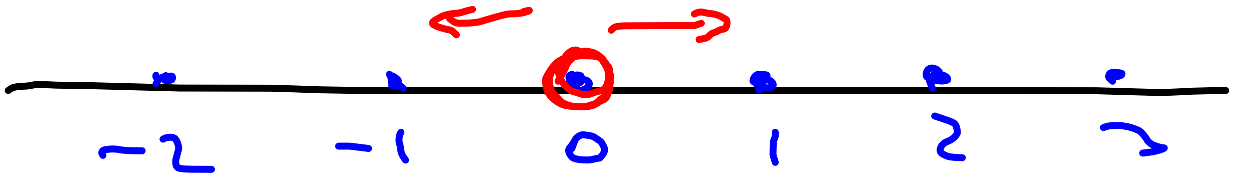
Náhodné procházky



S_t poloha v čase $0, 1, \dots$

$$P(S_{t+1} - S_t = 1) = P(S_{t+1} - S_t = -1) = 1/2$$

$$\Omega = \{0,1\}^n$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_2^n$$

$$\Omega = \{(0, s_1, s_2, \dots, s_n), \ |s_{j+1} - s_j| = 1\}$$

pokud: t-krát vpravo, $n-t$ vlevo

$$\Rightarrow S_n = t - (n-t) = 2t - n$$

$$P(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} 2^{-n}$$

střední hodnota S_n = $E(S_n) = 0$

(ze symetrie hustoty.)

$$P(S_{2n} = 0) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}(1 + \delta_n) \qquad \delta_n \to 0$$

(Stirling: $n! = \boxed{n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}} \cdot (1 + \varepsilon_n)$)

Pozn. Pravděpodobnost, že pro $n = 1, \dots, \infty$

bude $S_n > a$ pro jedno (aspoň) $a \in \mathbb{R}$

je jedna

Rozdělení náhodných veličin:

X náhodná veličina

$$P(a \le X \le b)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \sum_{x_i \le x} p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{cases}$$

nespojitá fce ($P(X = x_i) = p(x_i)$)

spojitá veličina

$f(t) = F'(t)$

normální rozdělení

$$\varphi(x) = \boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}}$$

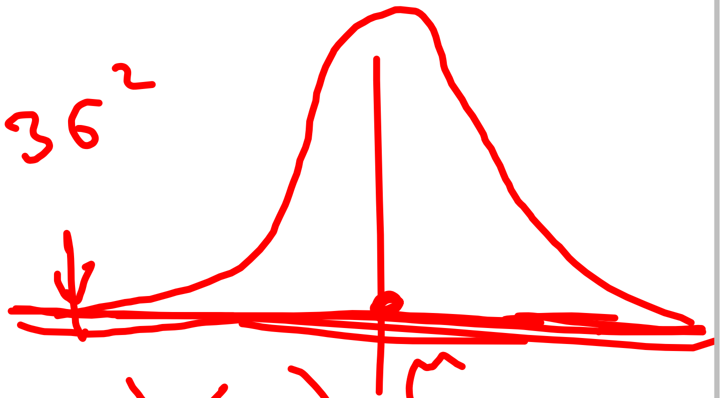
$$\Phi(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

$N(0,1)$

$\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$

$X \mapsto Y = \mu + \sigma X$

$\cdot\, 3\sigma^2$



$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\mu + \sigma X < y)$$

$$= P\left(X < \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \qquad z = \mu + \sigma t$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{= f_Y(z)}\, dz$$

$N(\mu, \sigma^2)$

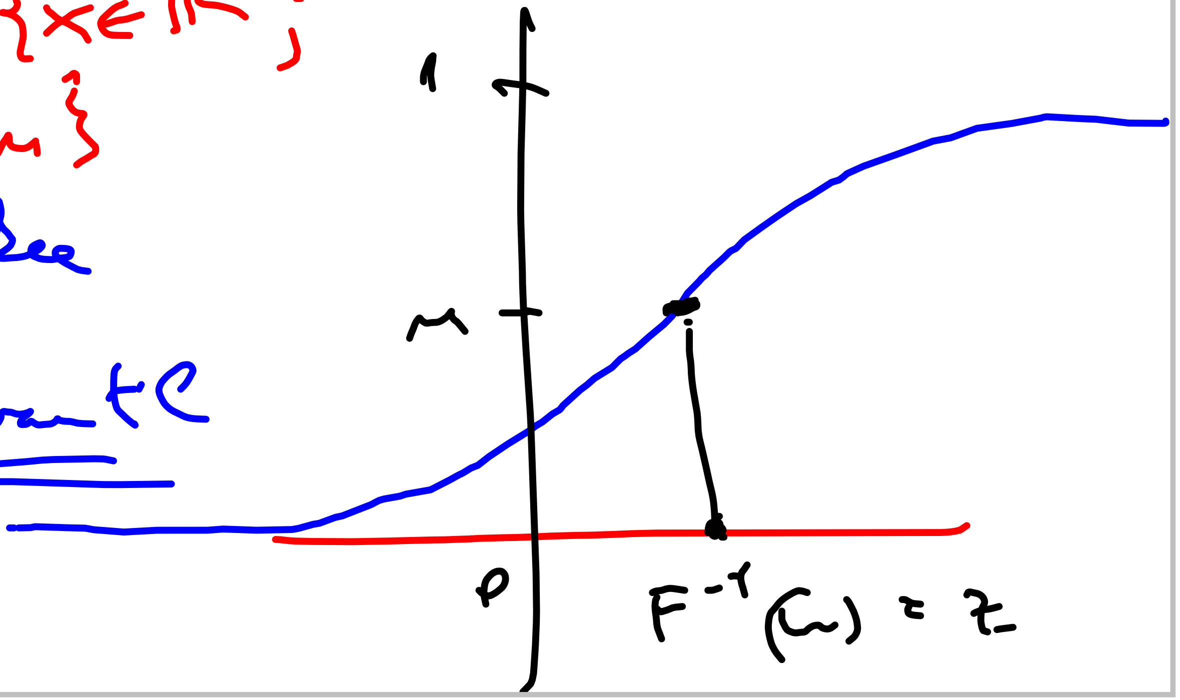
$E(X_i) = 0 \qquad E(Y) = \mu$

$F(x)$ distribuční fce pro X
nelklesající (může být "rostoucí")

$\forall u \in (0,1)$

$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\}$

kvantilová funkce
$\forall\ 0 < \alpha < 1$
$F^{-1}(\alpha)$ je α-kvantil



$F^{-1}(u) = z$

Moivre - Laplace (1801)

$Bi(n,p)$ ... rozdělení, p pevné, $q = 1-p$

$$\max_{0 \le k \le n} \left| \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{n,k}) \right| = o(n^{-1/2})$$

dokážte

kde $x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$Bi(n,p)$ $\qquad$ $N(0,1)$

Náhodný vektor

veličina $X: \omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{P(a<X<b)}$

n-ce veličin $(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{X}$

$\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$

$P(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n)$ existuje

je $\mathbb{X} < \mathbb{Y}$ znamená $\bigcap_{i=1}^{n} X_i < y_i$

$\mathbb{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

$F(\mathbb{Y}) = F(y_1, \dots, y_n) = P(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$

diskrétní rozdělení: (vektor (X,Y))

X ... hodnoty $x_1, x_2, \dots$

Y ... " ... $y_1, y_2, \dots$

$P(X=x_i, Y=y_j) = p(x_i, x_j)$, kde

$$\sum_{x_i}\sum_{y_j} p(x_i, x_j) = 1$$

simultánní (sdružené) rozdělení (X,Y)

pro pevné x_i:

$$P(X=x_i) = \sum_{y_j} p(x_i, y_j)$$

marginální rozdělení náhodné veličiny X

spojité: (X, Y)

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X<x, Y<y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

sdružená (simultánní) distr. f.ce

sdružená hustota

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,dv}_{\text{marginální hustota}}\,du$$

marginální distr. fce

Nezávislost veličin

$X_1, X_2, \dots$ náhodné veličiny

nezávislé, jestliže pro jevy $[X_i < x_i], [X_j < x_j]$

jsou navzájem nezávislé

$\Updownarrow$

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

EX ... střední hodnota náh. veličiny X

$$= \begin{cases} \sum_{x_i} x_i\, p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \end{cases}$$

$$(e^{-z})' = -e^{-z}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

$$\frac{t^2}{2} = z$$

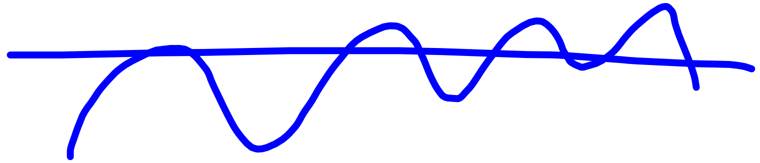
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = -\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$$

$$\underline{\underline{0}} = + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$$

rozptyl (variance)

$$\underbrace{\operatorname{var} X = E(X - EX)^2}$$

σ



směrodatná odchylka:

$\sqrt{\operatorname{var} X}$ $\qquad$ $\sqrt{\sigma}$

$$\underline{\operatorname{var}(a+bX)} = E\left(a+bX - E(a+bX)\right)^2$$
$$= E\left(b(X-EX)\right)^2$$
$$= b^2 E(X-EX)^2 = \underline{b^2 \operatorname{var} X}$$

kovariance

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\,(X-EX)(Y-EY)$$

$\uparrow$ přiřadí se mu ...

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\,(XY - X\,\underbrace{EY}_{\text{konst}} - \underbrace{(EX)}_{\text{konst}}\,Y + (EX)(EY))$$

$$= EXY - (EX)(EY)$$

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y + 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$$

$$\Uparrow$$

X, Y nezávislé

korelační koeficient

normování: $X \longmapsto \dfrac{X - EX}{\sqrt{\operatorname{var} X}}$ $\quad \uparrow \mu = 0,\ \sigma = 1$

$$\rho_{X,Y} = \operatorname{cov}\left(\frac{X-EX}{\sqrt{\operatorname{var}X}}, \frac{Y-EY}{\sqrt{\operatorname{var}Y}}\right)$$

X, Y nezávislé $\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$

$\rho_{X,X} = 1$

$|\rho_{X,Y}| \leq 1$

$X_1, \dots, X_n$, s.v. $\operatorname{var} X_i$

$$\operatorname{var} X = \begin{pmatrix} \operatorname{var} X_1 & \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & & & \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \operatorname{var} X_n \end{pmatrix}$$