MB102 – 5. demonstrovaná cvičení
Řady a mocninné řady

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18.3. 2008

Plán přednášky

Příklad 1. *Určete definiční obor a zderivujte následující funkce:*

1. x^x,
2. x^{x^x},
3. $\frac{e^x}{x}$,
4. $x^2 \arccos(\frac{2}{x})$,

u první funkce určete intervaly monotónnosti.

Příklad 1. *Určete definiční obor a zderivujte následující funkce:*

1. x^x,
2. x^{x^x},
3. $\frac{e^x}{x}$,
4. $x^2 \arccos(\frac{2}{x})$,

u první funkce určete intervaly monotónnosti.

Řešení.

1. $x^x(\ln x + 1)$,
2. $x^{x^x}\left\{x^{(x-1)} + \ln x\left[x^x(\ln x + 1)\right]\right\}$,
3. $\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$,
4. $2x\left(\arccos(\frac{2}{x}) + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$.

□

Příklad 2. *Určete první a druhé derivace následujících funkcí:*

1. $e^{-x}\ln(x)$,
2. $e^{-2x}\sin(3x)$.

Řešení.

1. $e^{-x}\ln(x) - \frac{2e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}$,
2. $-5e^{-2x}\sin(3x) - 12e^{-2x}\cos(3x)$.

$\square$

Příklad 3.

- *Udejte příklad funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *která je na celém* $\mathbb{R}$ *hladká, pouze v jednom bodě je jenom dvakrát diferencovatelná.*

Příklad 3.

- *Udejte příklad funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, která je na celém* $\mathbb{R}$ *hladká, pouze v jednom bodě je jenom dvakrát diferencovatelná.*
- *Udejte příklad hladké funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, která je globálně invertovatelná a přitom* f^{-1} *není všude na svém definičním oboru diferencovatelná.*

Plán přednášky

1. Domácí úlohy z minulého týdne
2. Návodné úlohy

Kriteria konvergence řad.

Kriteria konvergence řad.

Harmonická řada a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Leibnitzovo kriterium konvergence. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak **alternující řada** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Leibnitzovo kriterium konvergence. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak **alternující řada** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Důsledek. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje.

Leibnitzovo kriterium konvergence. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak **alternující řada** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Důsledek. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje.

L'Hospitalovo pravidlo

Příklad *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$,

Příklad *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

Příklad *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2},$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}},$$

Příklad *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+i)^n}$.

Příklad *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} x^n$,

Příklad *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} x^n,$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n,$

Příklad *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} x^n,$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n,$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n,$

Příklad *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} x^n,$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n,$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n,$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+i)^n} x^n.$

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$.