MB102 – 6. demonstrovaná cvičení
Řady a mocninné řady

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

25.3. 2008

Plán přednášky

Příklad 1. *Sečtěte následující řady (výsledné komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru):*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+2)^n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4i)^n} - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$.

Příklad 1. *Sečtěte následující řady (výsledné komplexní číslo vyjádřete v algebraickém tvaru):*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+2)^n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4i)^n} - \frac{1}{5^{n+1}} \right)$.

Řešení.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+2)^n} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} i$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4i)^n} - \frac{1}{5^{n+1}} \right) = \frac{47}{68} - \frac{4}{17} i$.

□

Příklad 2. *Určete, zda následující řady konvergují či divergují*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^3+4n}{n^5-5n^2-1}}$.

Příklad 2. *Určete, zda následující řady konvergují či divergují*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^3+4n}{n^5-5n^2-1}}$.

Řešení. Obě divergují (odhadněte zespodu harmonickou řadou). □

Příklad 3. *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (2008)^n x^n$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2008 x^n$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$,
4. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Příklad 3. *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2008)^n x^n,$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2008x^n,$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n,$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n.$

Řešení.

1. $\frac{1}{2008},$
2. $1,$
3. $\infty,$
4. $0.$

Plán přednášky

Oscar II, Král Švédský, 1829 – 1907

Problém pohybu n těles
„Je dán systém konečně mnoha hmotných bodů, které na sebe působí podle Newtnova zákonu gravitace. Za předpokladu, že žádné dva body se nikdy nesrazí, nalezněte funkci pro dráhu (danou v souřadnicích) každého z daných bodů. Tato funkce by měla dána moncinnou řadou závisející na čase a měla by stejnoměrně konvergovat.“

Henri Poincaré, franzouzský matematik a fyzik, 1854 – 1912

1889 Článek „O pohybu nebeských těles“

Henri Poincaré, franzouzský matematik a fyzik, 1854 – 1912

1889 Článek „O pohybu nebeských těles“

Určete následující limity:

1. $\lim_{n \to \infty} (n - 4\sqrt{n})$,

Určete následující limity:

1. $\lim_{n \to \infty} (n - 4\sqrt{n})$,
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,

Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které konvergují následující mocninné řady:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$.