Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	4	$\sum$
Počet bodů:					

Skupina A

Příklad 1. *V prostoru reálných funkcí na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, je dán vektorový podprostor $\langle \sin(x), x\rangle$. Doplňte funkci x na jeho ortogonální bázi a určete projekci funkce $\frac{1}{2}\sin(x)$ na tento podprostor (ve skalárním součinu uvažovaném na přednášce).*

Řešení. x, $-\frac{3}{\pi^2}x + \sin(x)$, projekce funkci $\frac{1}{2}\sin(x)$ nezmění, neboť leží v prostoru samotném. □

Příklad 2. *Určete konvoluci $f_1 * f_2$ funkcí*

$$f_1 = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Řešení.

$$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^{t+2}(1+t-x)x^2\,\mathrm{d}x & = \int_{-2}^{t}(1-x)(t-x)^2\,\mathrm{d}x & = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{28}{3}t + \frac{20}{3} & \text{pro } t \in \langle -2, -1\rangle \\ \int_0^{1}(1+t-x)x^2\,\mathrm{d}x & = \int_{t-1}^{t}(1-x)(t-x)^2\,\mathrm{d}x & = -\frac{t}{3} + \frac{7}{12} & \text{pro } t \in \langle -1, 1\rangle \\ \int_{t-1}^{1}(1+t-x)x^2\,\mathrm{d}x & = \int_{t-1}^{1}(1-x)(t-x)^2\,\mathrm{d}x & = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} & \text{pro } t \in \langle 1, 2\rangle \\ 0 & & & \text{jinak} \end{cases}$$

□

Příklad 3. *Rozviňte do Furierovy řady funkci $\sin^2(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.*

Řešení. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. □

Příklad 4. *Určete vzdálenost bodu $[3, -1] \in \mathbb{R}^2$ od paraboly $y = x^2 - x + 1$.*

Řešení. Nejbližší bod $[1, 1]$, vzdálenost $2\sqrt{2}$. □