Drsná matematika II – 7. přednáška
Vlastnosti diferencovatelných funkcí, II.

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 4. 2008

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Literatura
2. Analytické a hladké funkce
3. Popis lokálního chování funkcí

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

Theorem (Taylorova věta)

Nechť je $f(x)$ funkce k–krát diferencovatelná na intervalu (a, b) a spojitá na $[a, b]$. Pak pro každé $x \in (a, b)$ existuje číslo $c \in (a, x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k \\ &= T_{k-1} f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-a)^k. \end{aligned}$$

Je-li f v bodě a hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je $S(x) = f(x)$ na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme **analytické funkce** v bodě a. Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.

Je-li f v bodě a hladká, pak můžeme napsat formálně mocninnou řadu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^n.$$

Taylorova věta nám říká, že pokud tato mocninná řada má nenulový poloměr konvergence, pak je $S(x) = f(x)$ na příslušném intervalu. Takovým funkcím říkáme **analytické funkce** v bodě a. Funkce je analytická na intervalu, je-li analytická v každém jeho bodě.

Ne všechny hladké funkce jsou ale analytické. Ve skutečnosti lze dokázat, že pro každou posloupnost čísel a_n umíme najít hladkou funkci, jejiž derivace řádů k budou tato čísla a_k.

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\,.$$

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\,.$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body $x \neq 0$.

Abychom si alespoň představili podstatu problému, ukážeme si funkci, která má v nule všechny derivace nulové, je však všude kromě tohoto bodu nenulová:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} .$$

Je dobře definovaná hladká funkce pro všechny body $x \neq 0$. Derivací dostaneme $f'(x) = f(x) \cdot 2x^{-3}$ a iterovanou derivací dostaneme součet konečně mnoha členů tvaru $C \cdot f(x) \cdot x^{-k}$, kde C je nějaké celé číslo a k je přirozené číslo. Pro takové výrazy lze opakovanou aplikací L'Hospitalova pravidla zjistit, že jdou limitně k nule, při x jdoucím k nule. Dodefinujeme-li tedy hodnoty všech derivací naší funkce v nule rovnicí

$$f^{(k)} = 0,$$

získáme hladkou funkci na celém $\mathbb{R}$. Je vidět, že skutečně jde o nenulovou funkci všude mimo $x = 0$, všechny její derivace v tomto bodě jsou ale nulové. Samozřejmě to tedy není analytická funkce v bodě $x_0 = 0$.

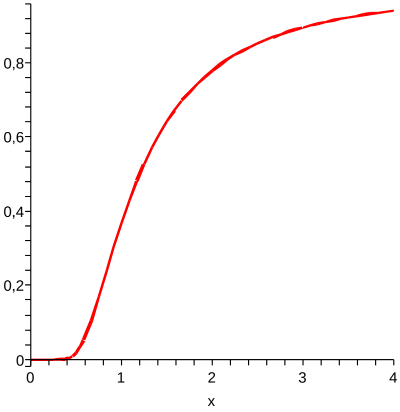
Snadno teď můžeme naši funkci modifikovat takto:

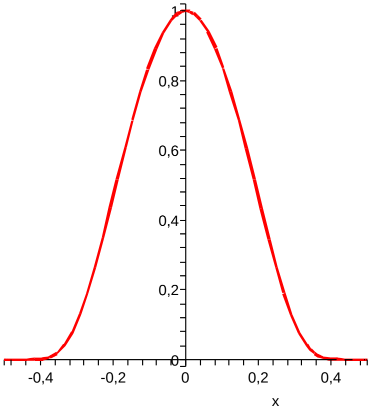
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{je-li } x > 0 \end{cases}.$$

Opět jde o hladkou funkci na celém $\mathbb{R}$. Další úpravou můžeme získat funkci nenulovou ve všech vnitřních bodech intervalu $[-a, a]$, $a > 0$ a nulovou jinde:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

Tyto funkce je hladké na celém $\mathbb{R}$. Poslední dvě funkce jsou na obrázcích, vpravo je použit parametr $a = 1$.



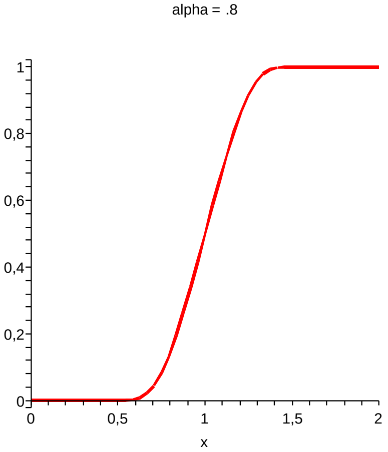


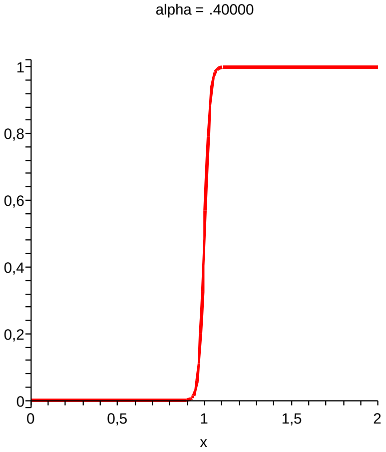
Nakonec ještě ukážeme, jak lze dostat hladké analogie Heavisideových funkcí. Pro dvě pevně zvolená reálná čísla $a < b$ definujeme funkci $f(x)$ s použitím výše definované funkce g takto:

$$f(x) = \frac{g(x-a)}{g(x-a)+g(b-x)}.$$

Zjevně je pro každé $x \in \mathbb{R}$ jmenovatel zlomku kladný (pro každý z intervalů určených čísly a a b je totiž alespoň jeden ze sčítanců jmenovatele nenulový a tedy je celý jmenovatel kladný). Dostáváme z našeho definičního vztahu proto hladkou funkci $f(x)$ na celém $\mathbb{R}$. Při $x \leq a$ je přitom jmenovatel zlomku přímo dle definice funkce g nulový, při $x \geq b$ je čitatel i jmenovatel stejný.

Na dalších dvou obrázcích jsou právě funkce $f(x)$ a to s parametry $a = 1 - \alpha$, $b = 1 + \alpha$, kde nalevo je $\alpha = 0.8$ a napravo $\alpha = 0.4$.





Plán přednášky

Už jsme se setkali s významem druhé derivace při popisu kritických bodů. Teď zobecníme diskusi kritických bodů pro všechny řády. Budeme v dalším uvažovat funkce s dostatečným počtem spojitých derivací, aniž bychom tento předpoklad přímo uváděli.
Řekneme, že bod a v definičním oboru funkce f je **kritický bod řádu** k, jestliže platí

$$f'(a) = \cdots = f^{(k)}(a) = 0, \quad f^{(k+1)}(a) \neq 0.$$

Předpokládejme, že $f^{(k+1)}(a) > 0$. Pak je tato spojitá derivace kladná i na jistém okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a.

Taylorův rozvoj se zbytkem nám v takovém případě dává pro všechna x z $\mathcal{O}(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}.$$

Je proto změna hodnot $f(x)$ v okolí bodu a dána chováním funkce $(x-a)^{k+1}$. Je-li přitom $k+1$ sudé číslo, jsou nutně hodnoty $f(x)$ v takovém okolí větší než hodnota $f(a)$ a zjevně je proto bod a bodem lokálního minima.

Pokud je ale k sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než než $f(a)$, extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato si můžeme všimnout, že graf funkce $f(x)$ protíná svoji tečnu $y = f(a)$ bodem $[a, f(a)]$.

Pokud je ale k sudé číslo, pak jsou hodnoty vlevo menší a vpravo větší než než $f(a)$, extrém tedy ani lokálně nenastává. Zato si můžeme všimnout, že graf funkce $f(x)$ protíná svoji tečnu $y = f(a)$ bodem $[a, f(a)]$.
Naopak, je-li $f^{(k+1)}(a) < 0$, pak ze stejného důvodu jde o lokální maximum při lichém k a extrém opět nenastává pro k sudé.

Říkáme, že funkce f je v bodě a **konkávní** v bodě a, jestliže se její graf nachází v jistém okolí celý pod tečnou v bodě $[a, f(a)]$, tj.

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

Říkáme, že funkce f je **konvexní** v bodě a, jetliže naopak je její graf nad tečnou v bodě a, tj.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Funkce je konvexní nebo konkávní na intervalu, jestliže má tuto vlastnost v každém jeho bodě.

Z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem dostáváme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je $f''(a) > 0$, a je konkávní, kdykoliv $f''(a) < 0$. Pokud je druhá derivace nulová, můžeme použít derivace vyšších řádů.

Z Taylorova rozvoje druhého řádu se zbytkem dostáváme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2.$$

Proto je zjevně funkce konvexní, kdykoliv je $f''(a) > 0$, a je konkávní, kdykoliv $f''(a) < 0$. Pokud je druhá derivace nulová, můžeme použít derivace vyšších řádů.
Bod a nazýváme **inflexní bod** funkce f, jestliže graf funkce f přechází z jedné strany tečny na druhou.

Napišme si Taylorův rozvoj třetího řádu se zbytkem:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(c)(x-a)^3.$$

Je-li a nulový bod druhé derivace takový, že $f'''(a) \neq 0$, pak je třetí derivace nenulová i na nějakém okolí a jde proto zjevně o inflexní bod. Znaménko třetí derivace nám v takovém případě určuje, zda graf funkce přechází tečnu zdola nahoru nebo naopak.

Poslední dobrou pomůckou pro náčrtek grafu funkce je zjištění **asymptot**, tj. přímek, ke kterým se blíží hodnoty funkce f. Asyptotou v nevlastním bodě ∞ je proto taková přímka $y = ax + b$, pro kterou je

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

Pokud asymptota existuje, platí

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$$

a tedy existuje i limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a.$$

Pokud ovšem existují poslední dvě limity, existuje i limita z definice asymptoty, jde proto i o podmínky dostatečné. Obdobně se definuje a počítá asymptota i v nevlastním bodě $-\infty$.

Tímto způsobem dohledáme všechny potenciální přímky splňující vlastnosti asymptot s konečnou reálnou směrnicí. Zbývají nám případné přímky kolmé na osu x: Asymptoty v bodech $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky $x = a$ takové, že funkce f má v bodě a alespoň jednu nekonečnou jednostrannou limitu.
Např. racionální funkce lomené mají v nulových bodech jmenovatele, které nejsou nulovými body čitatele, asymptotu.

Spočtěme aspoň jeden jednoduchý příklad: Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ má za asymptoty přímky $y = x$ a $x = 0$ (ověřte podrobně!). Derivací obdržíme

$$f'(x) = 1 - x^{-2}, \quad f''(x) = 2x^{-3}.$$

Funkce $f'(x)$ má dva nulové body ± 1. V bodě $x = 1$ má funkce lokální minimum, v bodě $x = -1$ lokální maximum. Druhá derivace nemá nulové body v celém definičním oboru $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, f tedy nemá žádný inflexní bod.