Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
27. května 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Množina všech matic typu 2×2 s nulou v levém dolním rohu a jedničkami na diagonále tvoří komutativní grupu vzhledem k operaci násobení matic.

(b) **ano — ne** Pro libovolné přirozené číslo a platí, že a^4 dává zbytek 1 po dělení 5.

(c) **ano — ne** Je-li rozptyl náhodné veličiny X roven 1, pak je rozptyl náhodné veličiny $2 \cdot X$ (bez ohledu na rozdělení) roven 2.

(d) **ano — ne** Těleso neobsahuje dělitele nuly.

(e) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při třech hodech běžnou kostkou padnou tři různá čísla, nepřevyšuje $\frac{1}{2}$.

(f) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že zvětšováním rozsahu výběru se zvětšuje i interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Příklady:

1. (6 bodů) Určete všechny ireducibilní polynomy stupně 5 nad $\mathbb{Z}_2$.

2. (6 bodů) Mějme předpis

$$\alpha : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad \alpha([a]_4) = i^a.$$

Rozhodněte, jestli α zadává zobrazení (tj., jestli je α dobře definované) a v kladném případě rozhodněte, jestli se jedná o (injektivní/surjektivní) homomorfismus grup.

3. (6 bodů) Nechť jsou $x, y \in (0, 1)$ (rovnoměrně) náhodně zvolená čísla. Vypočtěte pravděpodobnost, že je jejich součet menší než 1 a součin větší než 0,09.

4. (6 bodů) Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO – xiomy grupy i komutativita se snadno ověří; b) NE –je to sice Malá Fermatova věta, ale ta má za předpoklad $p \nmid a$ a skutečně tvrzení pro násobky 5 neplatí; c) NE – je roven 4; d) ANO – v tělese má každý nenulový prvek inverzi, takový prvek nemůže být dělitelem nuly; e) NE – pravděpodobnost je 24/36; f) NE – zvětšováním rozsahu výběru se zmenšuje interval spolehlivosti, a tedy zpřesňuje odhad.

1. Ireducibilních polynomů je 6, zjistí se *vyšktáním* těch reducibilních (je potřeba nezapomenout na ty, které nemají kořen, ale dají se rozložit)

2. je to zobrazení (z $[a]_4 = [b]_4$ plyne $i^a = i^b$, neboť $i^4 = 1$; je to homorfismus (přímým ověřením), který je injektivní $i^a = 1 \iff 4|a$ a není surjektivní (obrazem je 4-prvková podgrupa v nekonečné $(\mathbb{C}^*, \cdot)$).

3. Úloha na geometrickou pravděpodobnost – hledaná pravděpodobnost je

$$P = \int_{0,1}^{0,9} 1 - x - \frac{0,09}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0,202.$$

4. Využije se statistika M (výběrový průměr) s intervalem spolehlivosti pro μ rovným

$$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}).$$

Odtud $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \leq 0,25$ a tedy $n \geq 62$.

Matematika 4 $\boxed{\text{B}}$
27. května 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** V grupě $\mathbb{Z}_{2008}$ neexistuje žádný prvek řádu 5.

(b) **ano — ne** Uvažte množinu $I = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\} \cup \{\emptyset\}$ otevřených intervalů pod $\mathbb{R}$. Pak je $(I, \cup)$ komutativní grupa.

(c) **ano — ne** Kvadratický polynom (tj. polynom stupně 2) je nad celými čísly ireducibilní právě tehdy, když má záporný diskriminant.

(d) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 0, pak je rovněž střední hodnota náhodné veličiny X^2 rovna 0 (bez ohledu na rozdělení)

(e) **ano — ne** Pravděpodobnost, že ze tří hodů běžnou kostkou padne alespoň jedna šestka, je aspoň $\frac{1}{2}$.

(f) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že se zvyšováním požadované spolehlivosti $1-\alpha$ se zvětšuje i interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Příklady:

1. (6 bodů) Uvažte grupu $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5, +)$. Nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny všech jejích podgrup uspořádaných inkluzí a rozhodněte, které z nich jsou cyklické (tj. generované jedním prvkem).

2. (6 bodů) Určete všechny racionální kořeny polynomu

$$4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$$

a tento polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.

3. (6 bodů) U zkoušky je 70% studentů, kteří se učili, zbytek se neučil (šli to *zkusit*). Student, který se poctivě učil, zkoušku úspěšně absolvuje s pravděpodobností 90%, student, který se neučil, s pravděpodobností 20%. Určete pravděpodobnosti následujících jevů:

(a) náhodně vybraný student zkoušku udělá;

(b) student, který zkoušku udělal, se na to ani nepodíval;

(c) student, který zkoušku neudělal, se poctivě připravoval.

4. (6 bodů) Televizní stanice, která vysílá seriál *Vražedná čísla*, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem 100 studentů zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO – $5 \nmid 2008$; b) NE – obecně neexistují inverze; c) NE – tvrzení popisuje ireducibilitu nad $\mathbb{R}$, nad $\mathbb{Z}$ je ireducibilní i třeba $x^2 - 2$; d) NE – z $E(X) = 0$ a $E(X^2) = 0$ by plynulo i $D(X) = 0$. $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ platí jen za předpokladu nezávislosti X, Y; e) NE – pravděpodobnost je $1-(5/6)^3 = 1-125/216 < 1/2$; f) ANO – zvyšováním požadované spolehlivosti odhadu je tento odhad méně přesný (je vidět i ze vztahu pro meze intervalu – na výši kvantilu závisí lineárně).

1. Podgrupy $\mathbb{Z}_{30}, 2\mathbb{Z}_{30}, 3\mathbb{Z}_{30}, 5\mathbb{Z}_{30}, 6\mathbb{Z}_{30}, 10\mathbb{Z}_{30}, 15\mathbb{Z}_{30}, 0Z_{30} = \{[0]\}$, cyklické jsou všechny.

2. Pomocí pravidla pro hledání racionálních kořenů celočíselných polynomů $a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ (kořeny mohou být jen r/s, kde $r \mid a_0, s|a_n$) a např. Hornerova schématu zjistíme $f(x) = (2x+1)^2(x+3)(x-2)^2$.

3. a) $70 \cdot 0,9 + 30 \cdot 0,2 = 0,69$; b) $0,3 \cdot 0,2/0,69 \approx 0,087$; c) $0,7 \cdot 0,1/(1-0,69) \approx 0,226$.

4. S využitím statistik M, S dostáváme

$$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right),$$

kde $S = 5, M = 20, n = 100$. Příslušný kvantil t-rozdělení s 99 stupni volnosti v poskytnutých tabulkách nenajdeme, zřejmě je ale aproximace kvantilem rozdělení se 100 volnosti dostatečná (v nejhorším je použitelná i aproximace normálním rozdělením). Dostáváme pak příslušný interval spolehlivosti $(19,01; 20,99)$