Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
6. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Každá konečná cyklická grupa má prvočíselný řád (tj. počet prvků).

(b) **ano — ne** Každý injektivní homomorfismus okruhů má jednoprvkové jádro.

(c) **ano — ne** Grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka je izomorfní grupě všech permutací na tříprvkové množině.

(d) **ano — ne** Atom A v Booleově algebře K splňuje, že $\forall B \in K : B \neq 0 \implies A \leq B$.

(e) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X i náhodné veličiny Y rovna 1, pak je (bez ohledu na rozdělení veličin X a Y) střední hodnota veličiny $X + Y$ rovna 1.

(f) **ano — ne** Distribuční funkce libovolné náhodné veličiny je spojitá funkce.

Příklady:

1. (6 bodů) Určete všechny alespoň dvojnásobné komplexní kořeny polynomu $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1$ a tento polynom rozložte na součin ireducibilních polynomů nad $\mathbb{Z}$.

2. (6 bodů) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje):

(a) Konečného komutativního okruhu, který není tělesem.
(b) Reálného polynomu stupně 3, který nemá reálný kořen.
(c) Nekomutativní grupy G a její normální podgrupy H, tak, že G/H je komutativní.
(d) Konečné grupy, která má právě 3 podgrupy.
(e) Surjektivního a neinjektivního homomorfismu $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
(f) Komplexního polynomu který nemá v $\mathbb{C}$ kořen.

3. (6 bodů) Odběratel provádí kontrolu jakosti námi dodaných výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\mathrm{mm}; 0,0737\,\mathrm{mm}^2)$. S využitím statistických tabulek určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata.

4. (6 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má hustotu danou funkcí

$$f(x, y) = \frac{1}{a(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby šlo skutečně o hustotu a vypočtěte obě marginální distribuční funkce F_X, F_Y.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$, kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
6. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Součin cyklických grup je vždy cyklická grupa.

(b) **ano — ne** Faktorgrupa komutativní grupy je vždy komutativní.

(c) **ano — ne** Dávají-li 2 čísla stejný zbytek modulo 100, dávají stejný zbytek i modulo 25.

(d) **ano — ne** V Booleově algebře existuje ke každému prvku komplement.

(e) **ano — ne** Střední hodnota součinu libovolné dvojice náhodných veličin X, Y je rovna součinu středních hodnot těchto veličin.

(f) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet 10, víme-li, že součet byl dělitelný 5, je menší než 1/2.

Příklady:

1. (6 bodů) Polynom $4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ má dvojnásobný komplexní kořen $\frac{1}{2}(1+i)$. Určete všechny kořeny tohoto polynomu a rozložte jej na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}$.

2. (6 bodů) Uvažte množinu $M = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ a na ní definovanou operaci $\square$ předpisem $[a,b]\square[c,d] = [ac, ad + b - a]$. Rozhodněte, zda $(M, \square)$ je grupa a své tvrzení dokažte.

3. (6 bodů) Uvažte proces testování skupiny obyvatelstva na přítomnost nemoci, kterou trpí 0,1% populace, s využitím testu s následujícími parametry:

- je-li testovaná osoba nemocná, test to rozpozná s pravděpodobností 0,99;
- je-li testovaná osoba zdravá, test to rozpozná s pravděpodobností 0,95.

Určete pravděpodobnost *false positive* výsledku, tj. výsledku, kdy test ukazuje na onemocnění, přestože byl proveden na zdravém pacientovi a *false negative* výsledku (výsledek testu je negativní, přestože je pacient nemocný).

4. (6 bodů) Na jistém pracovišti bylo náhodně vybráno 6 mužů a 6 žen, jejichž roční příjem (v tis. Kč) činil u mužů: 320, 380, 240, 220, 440, 300 zatímco u žen: 180, 240, 160, 200, 320, 260. Předpokládejte, že jde o realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozdělení se stejným rozptylem a na hladině významnosti 0,05 testujte nulovou hypotézu: *střední hodnota platů mužů není vyšší než střední hodnota platů žen* oproti jednostranné alternativě. Jak by dopadl výsledek při testování nulové hypotézy: *střední hodnota platů mužů a žen se neliší* oproti oboustranné alternativě?

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$, kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975$.

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600