Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
6. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) ano — ne Pro výběr z normálního rozdělení platí, že se zvyšováním požadované spolehlivosti $1-\alpha$ se zvětšuje i interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(b) ano — ne Grupa $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ nemá žádnou netriviální konečnou podgrupu.

(c) ano — ne Grupa symetrií pravidelného pětiúhelníka má 10 prvků a obsahuje podgrupu izomorfní s grupou $(Z_5, +)$.

(d) ano — ne Množina všech matic typu 2 krát 2 nad racionálními čísly tvoří grupu.

(e) ano — ne Žádný polynom nad $\mathbb{C}$ stupně většího než 2 není ireducibilní.

(f) ano — ne Je-li rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X roven 1, pak je rozptyl veličiny $2 \cdot X - 1$ roven 4.

Příklady:

1. (6 bodů) Uvažte grupu $(\mathbb{S}_9, \circ)$ permutací na devítiprvkové množině a její prvky $f = (1,7) \circ (2,8) \circ (3,5,6,4,9)$ a $g = (3,8,4,5,7) \circ (1,6,9,3,4)$.

(a) Ve tvaru součinu **nezávislých** cyklů zapište permutace: $f^{-1}, g^{10}, (f^9 \circ g^{-5})^{20}$.

(b) Permutace f a g zapište jako součin transpozic a určete jejich paritu.

(c) Rozhodněte, zda existuje $h \in \mathbb{S}_9$ tak, že $(h \circ (1,2,3))^2 \circ (h \circ (2,3,4))^2 = (1,2,3,4)$. Uveďte příklad h nebo důkaz.

2. (6 bodů) Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$$

a zapište rozklad f na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}$.

3. (6 bodů) Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:

(a) první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,

(b) osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.

4. (6 bodů) Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů: $M_1 = 34,23$, $M_2 = 35,73$, $S_1^2 = 1,76$, $S_2^2 = 1,81$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$, resp. $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1-\mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO; b) NE – $\{-1, 1\}$; c) ANO; d) NE – singulární matice nemají inverzi; e) ANO – platí dokonce i pro $\mathbb{R}$; f) ANO

1. a) $f^{-1} = (1, 7) \circ (2, 8) \circ (9, 4, 6, 5, 3)$, $g^{10} = (3, 5, 7)$, $(f^9 \circ g^{-5})^{20} = (1, 9, 6)(4, 5, 7)$. c) neexistuje – plyne z úvah o paritách permutací

2. $(x - 1)^3(x + 2)^2(2x - 1)^2$

3. Příklad na geometrickou pravděpodobnost, stačí zaznamenat možné časy příchodu obou osob na osy x, y. a) $1 - (5/6)^2$; b) $\frac{3}{8}/\frac{1}{2}$.

4. Dosadíme do vztahu $M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m + n - 2)$ hodnoty $M_1 - M_2 = -1,5$, $S_* = 1,3323$ a dostaneme interval $(-2,5377; -0,4623)$. Do tohoto intervalu 0 nepatří, proto je rozdíl $\mu_1 - \mu_2$ statisticky významně různý od nuly.

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
6. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ±1 bod: tj. správně 1 bod, chybně −1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano** — **ne** Řád každého prvku v grupě $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ je nejvýše 2.

(b) **ano** — **ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě trojky, pokud je známo, že součet je dělitelný šesti, je menší než 1/4.

(c) **ano** — **ne** Neexistuje žádný surjektivní homomorfismus $(Z_{30}, +) \to (Z_8, +)$.

(d) **ano** — **ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že zvětšováním rozsahu výběru se zmenšuje interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(e) **ano** — **ne** Pro všechna $n > 2$ je $\varphi(n)$ sudé číslo.

(f) **ano** — **ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 1, pak je i střední hodnota náhodné veličiny $2 \cdot X - 1$ rovna 1 (bez ohledu na rozdělení X).

Příklady:

1. (6 bodů) Uvažte grupu $(\mathbb{S}_9, \circ)$ permutací na devítiprvkové množině a její prvky $f = (1, 7) \circ (2, 8) \circ (3, 5, 9, 4, 6)$ a $g = (1, 3, 2, 4, 5) \circ (3, 4, 7, 9, 6)$.

(a) Ve tvaru součinu **nezávislých** cyklů zapište permutace: $f^{-1}, g^{27}, (f^9 \circ g^{-3})^{30}$.

(b) Permutace f a g zapište jako součin transpozic a určete jejich paritu.

(c) Rozhodněte, zda existuje $k \in \mathbb{S}_9$ tak, že $k^2 \circ (1, 2) \circ k^2 = (1, 2) \circ k^2 \circ (1, 2)$. Uveďte příklad k nebo důkaz.

2. (6 bodů) Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen $1 - 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte jej na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$.

3. (6 bodů) V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(-1, 0), (1, 0)$ a $(0, \sqrt{3})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete

(a) rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,

(b) rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.

4. (6 bodů) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením $N(6\text{g}; 1,196\text{g}^2)$. Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Návod k řešení:

Teorie: a) ANO; b) ANO – 1/6 ; c) ANO 8 není dělitel 30; d) ANO – viz vzorec; e) ANO – viz vzorec; f) ANO

1. a) $f^{-1} = (6,4,9,5,3) \circ (1,7) \circ (2,8)$, $g^{27} = (2,7,6,4,9)$, $(f^9 \circ g^{-3})^{30} = (1,5,9)(7,3,8)(4,6,2)$.; c) neexistuje – důkaz plyne z úvah o paritách permutací.

2. $(x+1/2)[(x-(1-2i))(x-(1+2i))]^2 = (x+1/2)(x^2-2x+5)^2$.

3. Geometrická pravděpodobnost – pravděpodobnost $P(R \leq r)$, že dítě je od zvolené strany (nejlépe osa x) vzdáleno nejvýše r, se vypočte jako podíl obsahu množiny bodů vzdálené od x nejvýše r (rovnoramenný lichoběžník) a obsahu trojúhelníka ($\sqrt{3}$).

a) $P(R \leq r) = \frac{2}{\sqrt{3}}r - \frac{r^2}{3}$ (pro $r \leq \sqrt{3}$).

b) Analogicky – rozdělením trojúhelníka na 3 stejné s vrcholem v těžišti původního.

$P(R \leq r) = 2\sqrt{3}r - 3r^2$ pro $r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 100) = P(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i \leq \frac{100}{16}) = P(M \leq \frac{100}{16}) = P\left(\frac{M-6}{\sigma/\sqrt{16}} \leq \frac{\frac{100}{16}-6}{\sigma/\sqrt{16}}\right) =$$

$$= P\left(U \leq \frac{1/4}{\sigma/4}\right) = P(U \leq 1/\sigma) = P(U \leq 0,9144) \approx 0,818.$$