MB101 Matematika I - 3. demonstrované cvičení

Jan Herman

3. března 2009

Obsah

Podmíněná pravděpodobnost

- udává pravděpodobnost, že nastane jev A za předpokladu, že již nastal jev B
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Příklad 1

Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2?

Podmíněná pravděpodobnost

- udává pravděpodobnost, že nastane jev A za předpokladu, že již nastal jev B
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Příklad 1

Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2?

Podmíněná pravděpodobnost

- udává pravděpodobnost, že nastane jev A za předpokladu, že již nastal jev B
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Příklad 1

Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2?

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 2

V urně je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu (bez vracení) vytáhneme bílou kouli, jestliže jsme v prvním vytáhli taktéž bílou?

Příklad 3

V žaláři je vězeň odsouzený k trestu smrti. Výstřední žalářník mu však dá šanci. Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček a dvě urny, do kterých musí těchto 24 kuliček nějak rozdělit. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku (žádná urna nesmí být prázdná). Bude-li vytažená kulička bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán. Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 2

V urně je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu (bez vracení) vytáhneme bílou kouli, jestliže jsme v prvním vytáhli taktéž bílou?

Příklad 3

V žaláři je vězeň odsouzený k trestu smrti. Výstřední žalářník mu však dá šanci. Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček a dvě urny, do kterých musí těchto 24 kuliček nějak rozdělit. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku (žádná urna nesmí být prázdná). Bude-li vytažená kulička bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán. Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 4

Skříňka má 3 zásuvky. V jedné z nich jsou dvě zlaté mince, v další dvě stříbrné a v poslední zásuvce je jedna mince zlatá a jedna stříbrná. Náhodně vybereme zásuvku a odebereme z ní jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v otevřené zásuvce zbyla zlatá mince, je-li odebraná mince stříbrná?

Příklad 5

V každém pytli s 1000 zlaťáky z mincovny v Kutné Hoře jsou 2 falešné a z mincovny v Praze 3 falešné. V pokladně je 50 pytlů z Kutné Hory a 10 z Prahy. Náhodně vybereme pytel a z něho zlaťák. Jaká je pravděpodobnost, že zlaťák je z Kutné Hory, jestliže je pravý?

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 4

Skříňka má 3 zásuvky. V jedné z nich jsou dvě zlaté mince, v další dvě stříbrné a v poslední zásuvce je jedna mince zlatá a jedna stříbrná. Náhodně vybereme zásuvku a odebereme z ní jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v otevřené zásuvce zbyla zlatá mince, je-li odebraná mince stříbrná?

Příklad 5

V každém pytli s 1000 zlaťáky z mincovny v Kutné Hoře jsou 2 falešné a z mincovny v Praze 3 falešné. V pokladně je 50 pytlů z Kutné Hory a 10 z Prahy. Náhodně vybereme pytel a z něho zlaťák. Jaká je pravděpodobnost, že zlaťák je z Kutné Hory, jestliže je pravý?

Nezávislost jevů

- systém jevů se nazývá nezávislý, je-li pro libovolnou k-tici jevů $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}$:
  $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot A_{i_k}$

Příklad 6

V urně jsou umístěny papírky s binárními kódy 001, 010, 100, 111. Uvažujme náhodné jevy $A_i = \{\text{náhodně vybraný lístek má na i-tém místě } 1\}$. Jsou tyto jevy nezávislé? Jsou po dvou nezávislé?

Nezávislost jevů

- systém jevů se nazývá nezávislý, je-li pro libovolnou k-tici jevů $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k}$:
  $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot A_{i_k}$

Příklad 6

V urně jsou umístěny papírky s binárními kódy 001, 010, 100, 111. Uvažujme náhodné jevy
$A_i = \{\text{náhodně vybraný lístek má na i-tém místě } 1\}$. Jsou tyto jevy nezávislé? Jsou po dvou nezávislé?

Nezávislost jevů

Příklad 7

Uvažme rodiny se 3 dětmi. Nechť A označuje jev, kdy rodina má kluka i holku, B pak jev, kdy rodina má nejvýše jednu holku. Rozhodněte o (ne)závislosti náhodných jevů A a B.

Poznámka

Jak se změní odpověď, budeme-li uvažovat rodiny s jiným počtem dětí?

Nezávislost jevů

Příklad 7

Uvažme rodiny se 3 dětmi. Nechť A označuje jev, kdy rodina má kluka i holku, B pak jev, kdy rodina má nejvýše jednu holku. Rozhodněte o (ne)závislosti náhodných jevů A a B.

Poznámka

Jak se změní odpověď, budeme-li uvažovat rodiny s jiným počtem dětí?

Geometrická pravděpodobnost

- Podobně jako v klasické pravděpodobnosti, kdy pravděpodobnost zkoumaného jevu určujeme jako $\frac{|A|}{|\Omega|}$, tj. počet příznivých elementárních jevů ku konečnému počtu všech elementárních jevů, můžeme zkoumat i pokusy, ve kterých je celkový počet elementárních jevů nekonečný, přesto jsou v jistém (geometrickém) smyslu stejně pravděpodobné (tj. pravděpodobnost libovolného jevu závisí pouze na objemu (obsahu) jím vymezené oblasti, nikoliv na jejím umístění). Pak geometrickou pravděpodobnost jevu A definujeme jako $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$.

Příklad 8

Tyč dlouhou m metrů náhodně rozlomíme na tři části. Určete pravděpodobnost, že z takto vzniklých částí lze sestrojit trojúhelník.

Geometrická pravděpodobnost

- Podobně jako v klasické pravděpodobnosti, kdy pravděpodobnost zkoumaného jevu určujeme jako $\frac{|A|}{|\Omega|}$, tj. počet příznivých elementárních jevů ku konečnému počtu všech elementárních jevů, můžeme zkoumat i pokusy, ve kterých je celkový počet elementárních jevů nekonečný, přesto jsou v jistém (geometrickém) smyslu stejně pravděpodobné (tj. pravděpodobnost libovolného jevu závisí pouze na objemu (obsahu) jím vymezené oblasti, nikoliv na jejím umístění). Pak geometrickou pravděpodobnost jevu A definujeme jako $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$.

Příklad 8

Tyč dlouhou m metrů náhodně rozlomíme na tři části. Určete pravděpodobnost, že z takto vzniklých částí lze sestrojit trojúhelník.

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 9

Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 12:00 a 13:00. Jaká je pravděpodobnost, že X přijde po Y za předpokladu, že Y přijde po 12:30?

Příklad 10

Nechť $x, y \in (0, 1)$ jsou náhodně zvolená čísla. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a součin menší než 0,09?

Příklad 11

Na rovinu rozdělenou linkami (rovnoběžkami) o konstantní vzdálenosti d hodíme jehlu délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou linku?

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 9

Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 12:00 a 13:00. Jaká je pravděpodobnost, že X přijde po Y za předpokladu, že Y přijde po 12:30?

Příklad 10

Nechť $x, y \in (0, 1)$ jsou náhodně zvolená čísla. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a součin menší než 0,09?

Příklad 11

Na rovinu rozdělenou linkami (rovnoběžkami) o konstantní vzdálenosti d hodíme jehlu délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou linku?

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 9

Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 12:00 a 13:00. Jaká je pravděpodobnost, že X přijde po Y za předpokladu, že Y přijde po 12:30?

Příklad 10

Nechť $x, y \in (0, 1)$ jsou náhodně zvolená čísla. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a součin menší než 0,09?

Příklad 11

Na rovinu rozdělenou linkami (rovnoběžkami) o konstantní vzdálenosti d hodíme jehlu délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou linku?