MB101 Matematika I - 8. demonstrované cvičení

Jan Herman

7. dubna 2009

Obsah

Vektorové prostory

Definice

Nechť $\mathbb{K}$ je pole. Množinu V s polu s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ nazveme vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$, pokud platí:

i) $(V, +)$ je komutativní grupa

ii) $\forall r, s \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$

iii) $\forall r \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V : r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$

iv) $\forall r, s \in \mathbb{K}, \forall v \in V : r \cdot (s \cdot v) = (r \cdot s) \cdot v$

v) $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$.

Vektorové prostory

Příklad 1

Dokažte:

a) $a \cdot u = 0$, právě když $a = 0$ nebo $u = 0$

b) $(-1) \cdot u = -u$

c) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$

d) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$

e) $(\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=1}^{m} v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot v_j$

Příklad 2

Dokažte, že následující množiny tvoří vektorové prostory nad $\mathbb{R}$:

a) množina všech polynomů nad R,

b) množina všech polynomů nad R stupně nejvýše 3,

c) množina všech spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

d) množina všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají v 0 honotu 0,

e) množina všech nekonečných posloupností s členy z $\mathbb{R}$.

Vektorové prostory

Příklad 1

Dokažte:

a) $a \cdot u = 0$, právě když $a = 0$ nebo $u = 0$

b) $(-1) \cdot u = -u$

c) $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$

d) $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$

e) $(\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=1}^{m} v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot v_j$

Příklad 2

Dokažte, že následující množiny tvoří vektorové prostory nad $\mathbb{R}$:

a) množina všech polynomů nad R,

b) množina všech polynomů nad R stupně nejvýše 3,

c) množina všech spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

d) množina všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají v 0 honotu 0,

e) množina všech nekonečných posloupností s členy z $\mathbb{R}$.

Závislost a nezávislost vektorů

Příklad 3

Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů
a) (1, 5, 7), (0, 4,-1), (0, 2, 1),
b) (1, 0, 3), (0, 2, 1), (1, 2,-2),
c) (2, 2, 3), (4,-1, 3), (5, 2,-1), (-1, 6,-1).

Příklad 4

Pro jaká čísla $a \in R$ jsou polynomy $ax^2 + x + 2; -2x^2 + ax + 3; x^2 + 2x + a$ lineárně závislé ve vektorovém prostoru P_2 polynomů stupně nejvýše 2?

Závislost a nezávislost vektorů

Příklad 3

Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů
a) (1, 5, 7), (0, 4,-1), (0, 2, 1),
b) (1, 0, 3), (0, 2, 1), (1, 2,-2),
c) (2, 2, 3), (4,-1, 3), (5, 2,-1), (-1, 6,-1).

Příklad 4

Pro jaká čísla $a \in R$ jsou polynomy
$ax^2 + x + 2; -2x^2 + ax + 3; x^2 + 2x + a$ lineárně závislé ve vektorovém prostoru P_2 polynomů stupně nejvýše 2?

Vektorové podprostory

Příklad 5

Stanovte lineární obal vektorů $u_1 = (-1; 3; -2; 1)$, $u_2 = (2; -1; -1; 2)$, $u_3 = (-4; 7; -3; 0)$, $u_4 = (1; 5; -5; 4)$ vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i.
Poté zjistěte, které z vektorů
$u_5 = (0; 5; -5; 4)$; $u_6 = (0; -3; 2; -1)$; $u_7 = (0; 0; 0; 1)$ patří do tohoto lineárního obalu.

Příklad 6

Ukažte, že polynomy $1, x, x^2, \dots, x^n$ tvoří bázi vektorového prostoru P_n polynomů stupně nejvýše n.

Vektorové podprostory

Příklad 5

Stanovte lineární obal vektorů $u_1 = (-1; 3; -2; 1)$, $u_2 = (2; -1; -1; 2)$, $u_3 = (-4; 7; -3; 0)$, $u_4 = (1; 5; -5; 4)$ vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i.
Poté zjistěte, které z vektorů
$u_5 = (0; 5; -5; 4)$; $u_6 = (0; -3; 2; -1)$; $u_7 = (0; 0; 0; 1)$ patří do tohoto lineárního obalu.

Příklad 6

Ukažte, že polynomy $1, x, x^2, \dots, x^n$ tvoří bázi vektorového prostoru P_n polynomů stupně nejvýše n.

Vektorové podprostory

Příklad 7

Nechť U, V jsou podprostory $\mathbb{R}^4$ s bázemi
$u_1 = (1, 2, -1, 0), u_2 = (2, -1, 0, 1)$, resp.
$v_1 = (1, 1, 0, 1), v_2 = (1, -1, -1, -1)$. Určete bázi a dimenzi podprostorů $U \cap V$ a $U + V$.

Příklad 8 (**)

Dokažte, že množina posloupností reálných čísel, které pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyhovují rekurenci $a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$ tvoří vektorový podprostor prostoru všech reálných posloupností dimenze 2.

Vektorové podprostory

Příklad 7

Nechť U, V jsou podprostory $\mathbb{R}^4$ s bázemi
$u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$, resp.
$v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, -1)$. Určete bázi a dimenzi podprostorů $U \cap V$ a $U + V$.

Příklad 8 (**)

Dokažte, že množina posloupností reálných čísel, které pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyhovují rekurenci $a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$ tvoří vektorový podprostor prostoru všech reálných posloupností dimenze 2.