0. $a \cdot u = 0 \Rightarrow (a = 0$ nebo $u = 0)$

Sporem, předpokládejme $a \cdot u = 0$, ale $a \neq 0$ a $u \neq 0$.

$a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} : \; a \cdot a^{-1} = 1$

$$a \cdot u = 0 \quad / \cdot a^{-1}$$

$$\underbrace{a^{-1}(au)}_{= 1 \cdot u = u} = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

$1 \cdot u = u$ spor s $u \neq 0$

1.) Dokažte, že $1, x, \dots x^n$ je báze P_n.

a) dokážeme, že je to maximální LN množina

i) je LN?

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

jen pro $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow$ LN

ii) je to max. LN množina?

vezmeme $f = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \in P_n$

pak je toto vyjádření f zároveň lineární kombinace vektorů $1, x, \dots x^n$, tudíž $f, 1, x, \dots x^n$ jsou LZ

2.) Zapíšeme matici, kde zadané vektory budou řádky, spočteme determinant.

$$\begin{array}{c} \\ +2\cdot \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(-1)\cdot(-1)^{2+3}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 5 = -10 \neq 0$$

lin. nezávislé $\Leftarrow$

3.) $U=\langle u_1,u_2\rangle,\ V=\langle v_1,v_2\rangle$

$u_1=(1,2,-1,0),\ u_2=(2,-1,0,1)$

$v_1=(1,1,0,1),\ v_2=(1,-1,-1,-1)$

$$U\cap V=\{v\in\mathbb{R}^4:\ \exists a,b,c,d:\ v=a\cdot u_1+b\cdot u_2=\underbrace{=c\cdot v_1+d\cdot v_2\}}_{a\cdot u_1+b\cdot u_2-c v_1-d v_2=0}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\2&-1&-1&1\\-1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\0&-5&1&3\\0&2&-1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\ -2\ \sim\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&-4&8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$d=t,\ c=2t,\ b=t,\ a=t$

$t\cdot u_1+t\cdot u_2=2t\cdot v_1+t\cdot v_2$

$t(3,1,-1,1)=t(3,1,-1,1)$

$U\cap V=\langle(3,1,-1,1)\rangle$

$U+V=\langle u_1,u_2,v_1,v_2\rangle$

$t=1$

víme: $1\cdot u_1+1\cdot u_2=2\cdot v_1+1\cdot v_2$

tedy $v_2=u_1+u_2-2v_1$, proto můžu v_2 „vyhodit" z báze

· nějak ověříme LN u_1,u_2,v_1

$U+V=\langle u_1,u_2,v_1\rangle$, $\dim(U+V)=3$

4.) $a_{n+2} = r \cdot a_{n+1} + s \cdot a_n$

Uvažme polynomiální rovnici

$$x^2 = r \cdot x + s$$

$$x^2 - rx - s = 0$$

má řešení $x_{1,2} = \dfrac{r \pm \sqrt{r^2+4s}}{2}$

Pak $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$ jsou řešením rekurence.

Dosaďme $\{x_i^n\}$ do rekurence ($i = 1, 2$)

$$x_i^{n+2} = r \cdot x_i^{n+1} + s \cdot x_i^n$$

$$x_i^n \underbrace{\left(x_i^2 - r \cdot x_i - s\right)}_{0} = 0 \quad \checkmark$$

Aplikace na Fibonacciho F_n

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tedy $F_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n$, $A, B \in \mathbb{R}$

(1) $1 = F_1 = A \cdot x_1 + B \cdot x_2 = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{5}$

(2) $1 = F_2 = A \cdot x_1^2 + B x_2^2 =$

$$= A\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) + B \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{4} =$$

$$= A \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{3A+3B}{2} + (A-B) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(1)-(2): $0 = -\frac{2A+2B}{2} = -(A+B)$

$$\Downarrow$$

$$A = -B$$

(1) $1 = \frac{-2B}{2}\sqrt{5}$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

---

nástřel důkazu, že $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$ tvoří bázi podprostoru posl. vyhovujících rekurenci

a_1, a_2 zadáno

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = k \cdot x_1^1 + l \cdot x_2^1 \\ a_2 = k \cdot x_1^2 + l \cdot x_2^2 \end{array}\right\}$$

2 rce o 2 neznámých $k, l \Rightarrow \forall$ vyhovující posl. je LK $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$

$u_1=(1,2,1,0);\ u_2=(1,3,a,b);$

$u_3=(0,-1,1-a,2);\ u_4=(-b,a,0,a+b+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a & b \\ 0 & -1 & 1-a & 2 \\ -b & a & 0 & a+b+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ +b \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & b \\ 0 & -1 & 1-a & 2 \\ 0 & a+2b & b & a+b+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1 \\ -(a+2b) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & \boxed{b+(1-a)(a+2b)} & a+b+1-b(a+2b) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & b \\ 0 & 0 & -a^2-2ba+a+3b & -2b^2-ab+a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$$

c) $\dim=4 \iff (b+2\neq 0\ \&\ -a^2-2ba+a+3b\neq 0)$

$-a^2+a\neq 2ba-3b$

$\dfrac{-a^2+a}{2a-3}\neq b$

Tedy je splněno kdykoliv $b\notin\left\{-2,\dfrac{-a^2+a}{2a-3}\right\}$

a) $\dim=2$

$b=-2,\quad -a^2-2ba+a+3b=0,\quad -2b^2-ab+a+b+1=0$

$-a^2+4a+a-6=0 \qquad -8+2a+a-2+1=0$

$a^2-5a+6=0 \qquad 3a-9=0$

$(a-2)(a-3)=0 \qquad a=3$

vyhovuje

pro $a=3,\ b=-2$

b) $\dim=3$

jinak

6.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Dokažte, že C je vekt. podprostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Stačí ověřit uzavřenost na sčítání vektorů, násobení skalárem

i) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{\in C} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{\in C} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}^{\in C}$

ii) $r \in \mathbb{R}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{\in C} = \begin{pmatrix} ra & -rb \\ rb & ra \end{pmatrix} \in C$$

Tedy C je v. podprostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Bazí C je množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Protože $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Dim} C = 2$.

$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc) \cdot i$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$ac - bd + (ad+bc)i$