MB101 Matematika I - 9. demonstrované cvičení

Jan Herman

14. dubna 2009

Obsah

Vektorové podprostory

Příklad 1

Ukažte, že polynomy $1, x, x^2, \dots, x^n$ tvoří bázi vektorového prostoru P_n polynomů stupně nejvýše n.

Příklad 2

Výpočtem determinantu vhodné matice zjistěte, zda jsou vektory $(1, -2, 2, -4), (2, 1, -1, 2), (1, -3, 0, 1), (1, -1, 0, 1)$ lineárně nezávislé.

Vektorové podprostory

Příklad 1

Ukažte, že polynomy $1, x, x^2, \ldots, x^n$ tvoří bázi vektorového prostoru P_n polynomů stupně nejvýše n.

Příklad 2

Výpočtem determinantu vhodné matice zjistěte, zda jsou vektory $(1, -2, 2, -4), (2, 1, -1, 2), (1, -3, 0, 1), (1, -1, 0, 1)$ lineárně nezávislé.

Vektorové podprostory

Příklad 3

Nechť U, V jsou podprostory $\mathbb{R}^4$ s bázemi
$u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$, resp.
$v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, -1)$. Určete bázi a dimenzi podprostorů $U \cap V$ a $U + V$.

Příklad 4 (**)

Dokažte, že množina posloupností reálných čísel, které pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyhovují rekurenci $a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$ tvoří vektorový podprostor prostoru všech reálných posloupností dimenze 2.

Vektorové podprostory

Příklad 3

Nechť U, V jsou podprostory $\mathbb{R}^4$ s bázemi
$u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$, resp.
$v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, -1)$. Určete bázi a dimenzi podprostorů $U \cap V$ a $U + V$.

Příklad 4 (**)

Dokažte, že množina posloupností reálných čísel, které pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyhovují rekurenci $a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$ tvoří vektorový podprostor prostoru všech reálných posloupností dimenze 2.

Vektorové podprostory

Příklad 5

Popište všechny hodnoty parametrů a, b, aby dimenze lineárního obalu vektorů $u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (1, 3, a, b), u_3 = (0, -1, 1 - a, 2), u_4 = (-b, a, 0, a + b + 1)$ byla

a)2

b)3

c)4

Příklad 6

Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mat}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ je množina reálných matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Zjistěte, jestli je $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$, stanovte dimenzi a bázi $\mathcal{C}$.

Vektorové podprostory

Příklad 5

Popište všechny hodnoty parametrů a, b, aby dimenze lineárního obalu vektorů $u_1 = (1, 2, 1, 0), u_2 = (1, 3, a, b), u_3 = (0, -1, 1-a, 2), u_4 = (-b, a, 0, a+b+1)$ byla

a)2

b)3

c)4

Příklad 6

Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mat}_{\in\times\in}(\mathbb{R})$ je množina reálných matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Zjistěte, jestli je $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$, stanovte dimenzi a bázi $\mathcal{C}$.