Př. 33 Gaussova eliminace

pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 11 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

$x_3 = -1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1$

Gauss-Jordan:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_3 = -1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1$

Př. 34 + 35 :

$a=-8$, $\underline{a=8}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & a \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & a \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & a+6 \\ 0 & -3 & 6 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & a+5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a-8 \end{array}\right)$$

(35) nemá řešení

(34)

$x_4 = t$, $t \in R$

$3x_3 - 3t = -3$

$x_3 = t-1$

$3x_2 - 3(t-1) + t = 1 \Rightarrow x_1 = \dots$

$x_2 = \dots$

hodnost mce soustavy je 3

hodnost rozšířené matice je — 4 pro $a \neq -8$ — 3 pro $a=-8$

Př. 37: $a, b \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & +1 & +2 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ \underbrace{0 x_1 + 0 x_2 + a \cdot x_3} & & & b+2 \end{array}\right)$$

a) $a \neq 0$

b) $a = 0, b \neq -2$

c) $a = 0, b = -2$

Př. 39

a) $(2,2,3,4)$

$$2x_1 - x_4 = 0$$
$$3x_2 - 2x_3 = 0$$

b) Najděte soustavu s řešením:

$$\{(t+1, 2t, 3t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

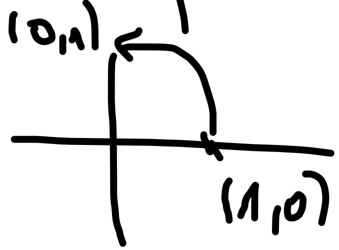
$$x_1 = t+1 \Rightarrow t = x_1 - 1$$
$$x_2 = 2t \Rightarrow x_2 = 2(x_1 - 1)$$
$$x_3 = 3t \Rightarrow x_3 = 3(x_1 - 1)$$
$$x_4 = 4t \Rightarrow x_4 = 4(x_1 - 1)$$

$$2x_1 - x_2 - 2 = 0$$
$$3x_1 - x_3 - 3 = 0$$
$$4x_1 - x_4 - 4 = 0$$

Př 41: $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rotace (x,y) kolem počátku o úhel φ

$\varphi = 90^\circ$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1)$



$$(A(\varphi))^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Dkaže $(A(\varphi))^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

Indukcí: I. $n = 1, 2$ ✓

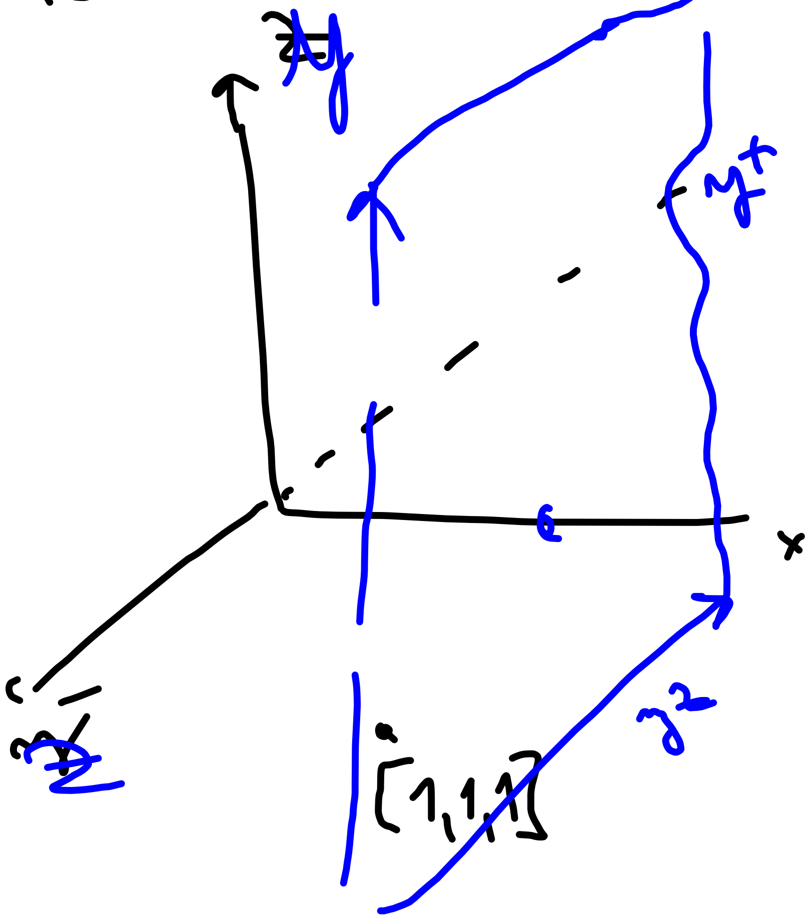
II. platí pro n, dokážeme pro $n+1$:

$$\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\cos n\varphi \cos\varphi} - \underline{\sin n\varphi \sin\varphi} & -\sin\varphi \cos n\varphi - \cos\varphi \sin n\varphi \\ \sin\varphi \cos n\varphi + \cos\varphi \sin n\varphi & -\sin\varphi \sin n\varphi + \cos\varphi \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\cos(n\varphi + \varphi)} & -\sin(n\varphi + \varphi) \\ \sin(n\varphi + \varphi) & \cos(n\varphi + \varphi) \end{pmatrix}$$ ✓

42. rotace o φ kolem x, y, z v $\mathbb{R}^3$



rotace kolem osy x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

rotace kolem z

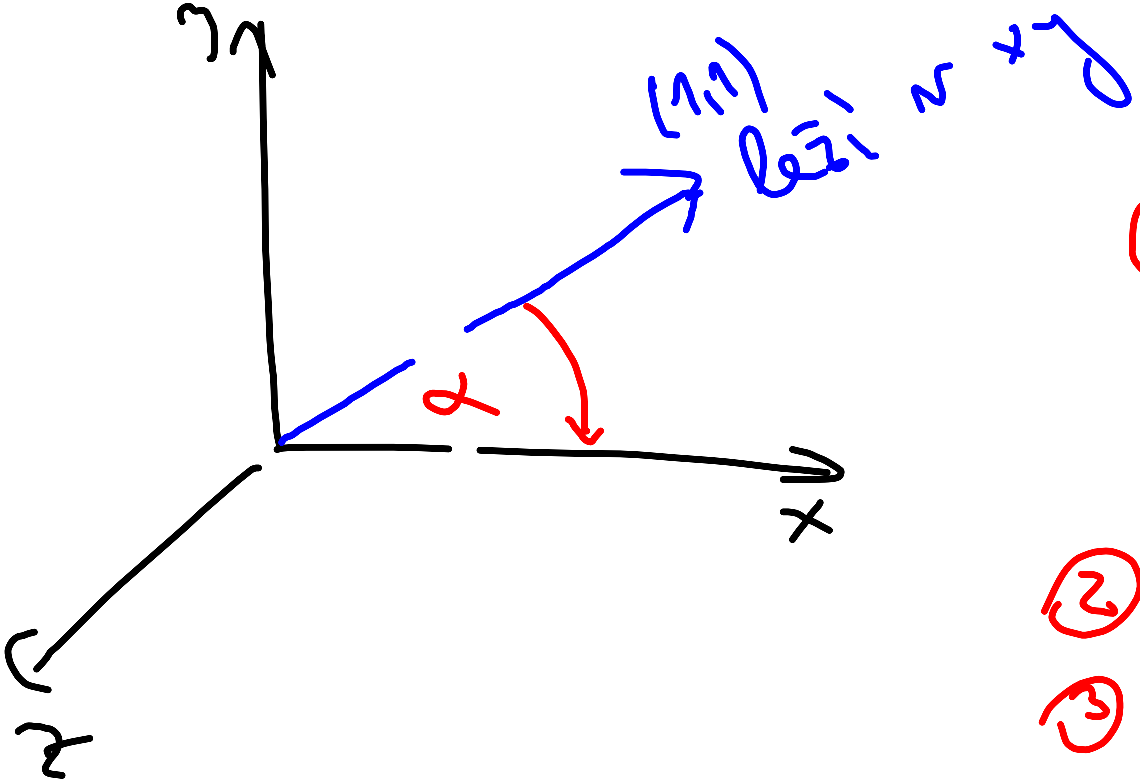
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotace kolem y

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = 90°$

Př 43:



složení 3 rotací:

(1) rotace o $\frac{\pi}{4}$ v záp. smyslu kolem počátku v rovině $z=0$

(2) rotace kolem x

(3) inverze k (1)

MB101_DL_p08.pdf - Adobe Reader

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto 3 zobrazení:

- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\frac{\pi}{3}$ v kladném smyslu podle osy x;
- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvnímu zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo.

cos $\frac{\pi}{4}$ 2. krok záp. smysl 1. krok

Takto obdržíme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

cos $\frac{\pi}{3}$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících 3 zobrazení:

- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\frac{\pi}{3}$ v kladném smyslu podle osy y;
- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

rotace kolem y

Př: 47:

$$V = u\left(a A (B-C)^T\right)\left(4E^8 + D\right)u^T$$

$u = (1,1)$ $a = \sqrt[5]{23}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$V = (1,1)\sqrt[5]{23}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T}_{\text{asociativita}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{násobení}} =$$

$$= \sqrt[5]{23}\begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt[5]{23}\begin{pmatrix} -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt[5]{23} \cdot (-5)$$

Př. 48: $\underbrace{\cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1}_{B} A = C$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & 27 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & 27 & 3 \\ 0 & 8 & 18 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -5 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \\ -3 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

... atd.

Lze postupovat jako při hledání inverze, tj. matici B nahrazujeme použitím elem. úprav na matici E.

ERROR ?!

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{36} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{9} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 11 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \frac{3}{2} & 0 & 5 & -11 & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 & 2 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 11 & -9 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{2} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 11 & -9 \end{array}\right)$$