Demonstrativní cvičení MB101

(Pozměněný text doc. Hilschera)

Obsah

1. Demonstrativní cvičení
17. 9. 2008

Příklad 1. Kolik různých náhrdelníků lze získat navléknutím (právě) 7 navzájem odlišitelných korálků na úzký řemínek? (Konce řemínku svážeme tak, aby bylo možné přes vzniklý uzel korálky přesouvat.)

[*Výsledek je* 360]

Příklad 2. K vytrvalostnímu závodu, v němž běžci vybíhají jeden po druhém s danými časovými odstupy, se přihlásilo n závodníků; mezi nimi také tři kamarádi. Stanovte počet startovních listin, v rámci kterých žádní dva z trojice kamarádů nestartují těsně po sobě. (Uvažujeme $n \geq 5$.)

Řešení. Ostatních $n-3$ závodníků můžeme seřadit $(n-3)!$ způsoby. Pro uvažované tři kamarády pak máme $n-2$ míst (začátek, konec a $n-4$ mezer), na které je můžeme rozmístit $(n-2)_3$ způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu je tak výsledek

$$(n-3)!(n-2)(n-3)(n-4) = (n-2)!(n-3)(n-4).$$

□

Příklad 3. Kolika způsoby lze umístit k různých vlajek na n stožárů v řadě? (Zřejmě jsou tedy také stožáry rozlišitelné. Na jednom stožáru může být více vlajek, přičemž různá pořadí vlajek na jednom stožáru představují různé možnosti.)

$[n \cdot (n+1) \cdots (n+k-1)]$

Příklad 4. Padá při házení dvěma kostkami častěji součet 6, nebo 7?

[*Pravděpodobnější je, že padne součet* 7]

Příklad 5. Umisťujeme n rozlišitelných koulí do n rozlišitelných přihrádek. Určete pravděpodobnost, že každá přihrádka bude obsahovat právě jednu kouli.

$[n!/n^n]$

Příklad 6. Stanovte pravděpodobnost, že mezi náhodně vybranými k ($k \leq 365$) osobami, z nichž žádná nemá narozeniny 29. února, se nacházejí alespoň dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den. Proveďte diskusi vzhledem k hodnotě počtu osob k.

$$\left[1 - \frac{v(365,k)}{V(365,k)} = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}\right]$$

Diskuse vzhledem ke k. Jestliže A bude označovat jev „všechny jejich narozeniny jsou v různých dnech“, můžeme např. uvést:

k	$P(A)$	$P(A^c)$
20	0.589	0.411
22	0.524	0.476
23	0.493	0.507
24	0.462	0.538
30	0.294	0.706

Příklad 7. Při pokeru se rozdává 5 karet z celkového počtu 52 (4 barvy, 13 hodnot). Vyčíslete pravděpodobnost, že při rozdávání dostanete 5 karet různých hodnot. (Uvažte, že nezáleží na pořadí karet.)

$[0,5070828331\ldots]$

Příklad 8. Umisťujeme k rozlišitelných koulí do n rozlišitelných přihrádek. Jaká je pravděpodobnost, že určitá (pevně zvolená) přihrádka bude obsahovat právě $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ koulí?

$\left[\binom{k}{i}(n-1)^{k-i}/n^k\right]$

Příklad 9. Házíme 12 kostkami. S jakou pravděpodobností padne každé číslo právě dvakrát?

$$\left[\frac{12!}{2^6 6^{12}}\right]$$

Příklad 10. Nechť mají žárovky 80% spolehlivost (ať už to znamená cokoliv). Určete spolehlivost systému dvou žárovek zapojených (a) sériově; (b) paralelně.

[*Spolehlivost je* (a) 64%; (b) 96%]

Určete spolehlivost systému tří paralelně zapojených žárovek.

[*Spolehlivost činí* $99,2\,\%$]

Příklad 11. V místnosti je n mužů a n žen. Z této skupiny postupně (zcela náhodně) vybereme vždy dvě osoby, které společně místnost opustí, což opakujeme, dokud všichni neodejdou. Spočítejte pravděpodobnost, že všechny vybrané dvojice budou tvořeny mužem a ženou.

$$\left[\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\right]$$

Příklad 12. Dva hráči střídavě házejí mincí. Vyhrává ten, komu padne dřív líc. Nalezněte pravděpodobnost výhry hráče, který začíná.

[2/3]

Příklad 13. Otec chce podpořit synovu zálibu hrát tenis, a proto mu přislíbí hodnotný dar v případě, že syn zvítězí alespoň ve dvou po sobě jdoucích tenisových utkáních (to je v jeho silách, ale nemusí se mu to podařit). Navíc si může vybrat z jedné ze dvou možností: Může hrát postupně

(a) s panem Novákem, s otcem, s panem Novákem;

nebo

(b) s otcem, s panem Novákem, s otcem.

Kterou strategii si chytrý syn zvolí, když ví, že pan Novák hraje tenis mnohem lépe než otec?

Řešení. Nechť A označuje jev, že syn zvolí variantu (a) a vyhraje dvakrát po sobě, a nechť B označuje jev, že vyhraje dvakrát po sobě při zvolení varianty (b). Označme jako p_o a p_N po řadě pravděpodobnosti výhry syna nad otcem a nad panem Novákem. Víme, že $p_N < p_o$. Výčtem 8 možných výsledků v rámci každé série lze (za předpokladu nezávislosti výsledků jednotlivých utkání) obdržet

$$P(A) = p_N p_o p_N + p_N p_o (1 - p_N) + (1 - p_N) p_o p_N = 2 p_o p_N - p_o p_N^2$$

a analogicky

$$P(B) = p_o p_N p_o + p_o p_N (1 - p_o) + (1 - p_o) p_N p_o = 2 p_o p_N - p_o^2 p_N.$$

Neboť

$$P(A) - P(B) = 2 p_o p_N - p_o p_N^2 - 2 p_o p_N + p_o^2 p_N = p_o p_N (p_o - p_N) > 0,$$

vybere si chytrý syn pořadí (a). □

2. Demonstrativní cvičení
24. 9. 2008

Příklad 14. V klobouku máme 5 bílých a 5 černých kuliček. Namátkou postupně vytáhneme tři kuličky. Stanovte pravděpodobnost, že jedna je bílá a dvě černé, když

(a) každou kuličku vrátíme po vytažení zase do klobouku;

(b) vytažené kuličky nevracíme.

[(a) 3/8; (b) 5/12]

Příklad 15. Populace 1000 lidí, složená ze 400 žen a 600 mužů, obsahuje 50 barvoslepých osob, a to 40 žen a 10 mužů. Nechť

A označuje jev „náhodně vybraná osoba je barvoslepá“,

H označuje jev „náhodně vybraná osoba je žena“.

Doplňte (vyčíslete)

$$P(A \cap H) = \dots \quad \text{a} \quad P(A/H) = \dots$$

$[P(A \cap H) = 0,04;\ P(A/H) = 0,1]$

Příklad 16. Uvažujme rodiny se dvěma dětmi a předpokládejme, že všechny možnosti v množině
$$\Omega = \{kk, kh, hk, hh\},$$
kde k značí „kluk“ a h znamená „holka“ při zohlednění stáří dětí, jsou stejně pravděpodobné. Zaveďme náhodné jevy
$$H - \text{ „rodina má kluka“}, \quad A - \text{ „rodina má 2 kluky“}.$$
Vypočtěte $P(A/H)$.

[1/3]

Příklad 17. V osudí je 9 červených a 7 bílých koulí. Postupně vytáhneme 3 koule (bez vracení). Určete pravděpodobnost, že první dvě budou červené a třetí bílá.

$[0, 15]$

Příklad 18. V každém pytli s 1000 zlaťáky z mincovny v Kutné Hoře jsou 2 falešné a z mincovny v Praze 3 falešné. V pokladně je 50 pytlů z Kutné Hory a 10 z Prahy. Náhodně vybereme pytel a z něho zlaťák. Jaká je pravděpodobnost, že zlaťák je z Kutné Hory, jestliže je pravý?

[4990/5987]

Příklad 19. V žaláři je vězeň odsouzený k trestu smrti. Výstřední žalářník mu však dá šanci. Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček a dvě urny, do kterých musí těchto 24 kuliček nějak rozdělit. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku (žádná urna nesmí být prázdná). Bude-li vytažená kulička bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán. Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

[*Do jedné z uren vloží pouze 1 bílou kuličku*]

Příklad 20. Podobně jako v Příkladu 16 uvažujme rodiny se 3 dětmi. Nyní je tedy

$$\Omega = \{kkk, kkh, khk, hkk, khh, hkh, hhk, hhh\}.$$

Jestliže

$$H - \text{ „rodina má kluka i holku“}, \quad A - \text{ „rodina má nejvýše jednu holku“},$$

rozhodněte o (ne)závislosti náhodných jevů A a H.

[*Jevy jsou nezávislé*]

Poznámka. Pro rodiny se 2 nebo 4 dětmi je $P(A \cap H) \neq P(A) \cdot P(H)$.

Příklad 21. Kolik nezávislých pokusů s pravděpodobností úspěchu $p = 0,01$ (a neúspěchu $q = 0,99$) musíme uskutečnit, aby pravděpodobnost, že alespoň jeden pokus skončí úspěchem, převýšila $50\,\%$?

[*Alespoň* 69]

Příklad 22. Buffonova úloha o jehle. Na rovinu rozdělenou linkami (rovnoběžkami) o konstantní vzdálenosti d hodíme „jehlu“ délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou linku?

$[2l/\pi d]$

Poznámka. Tento výpočet lze testovat empiricky za pomoci aproximace

$$P(A) \approx \frac{m(A)}{N},$$

kde

$m(A)$ udává počet příznivých pokusů (jehla protne některou linku),

N udává celkový počet pokusů.

Pro $N >> 1$ je

$$\frac{m(A)}{N} \approx \frac{2l}{\pi d}, \quad \text{tedy} \quad \pi \approx \frac{2lN}{dm(A)}.$$

(Např. Volf v roce 1850 obdržel $\pi \sim 3,1596$ při $N = 5068$; Smith $\pi \sim 3,1553$ při $N = 3204$; Fuchs $\pi \sim 3,1419$ při $N = 1120$; Lazanne $\pi \sim 3,1415829$ při $N = 3408$.)

Příklad 23. Tyč dlouhá 3 metry se náhodně rozlomí na tři části. Určete pravděpodobnost, že z takto vzniklých tří kusů lze sestrojit trojúhelník. (Součet délek dvou libovolných částí musí být větší než délka zbývající části.)

[1/4]

3. Demonstrativní cvičení
1. 10. 2008

Příklad 24. Za pomoci určení determinantu dvojrozměrné matice spočtěte obsah čtyřúhelníku vymezeného jeho vrcholy $[0, -2]$, $[1, -1]$, $[-1, 1]$ a $[1, 5]$.

[8]

Příklad 25. Najděte konvexní obal bodů $[0,0]$, $[-2,-2]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[0,2]$, $[1,4]$ a $[2,1]$. Poté nalezněte strany obdrženého mnohoúhelníku, které jsou viditelné z pozice bodu $[3,\pi-2]$.

[*Vidět jsou dvě strany výsledného čtyřúhelníku určené vrcholy* $[-2,-2],[2,1]$ *a* $[2,1],[3,3]$]

Příklad 26. Dokažte, že maximální počet částí, na které $n \geq 2$ přímek dělí rovinu, je
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

[*Důkaz lze provést indukcí*]

Příklad 27. Stanovte počet všech podmnožin množiny $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$[2^n]$

Stanovte počet všech relací na A.

$\left[2^{n^2}\right]$

Příklad 28. Kolik existuje injektivních *zobrazení množiny* $X = \{1, 2, 3\}$ *do* množiny $Y = \{a, b, c, d\}$?

[24]

Kolik existuje surjektivních *zobrazení množiny* Y *na* množinu X?

[36]

Příklad 29. Určete počet B_n relací ekvivalence na množině $\{1, \dots, n\}$ pro $n = 1, 2, 3, 4$.

$[1, 2, 5, 15]$

Poznámka. Všimněte si, že číslo B_n (tzv. Bellovo číslo) udává právě počet možností, jak lze umístit n rozlišitelných koulí do n nerozlišitelných přihrádek. Doplňme, že Bellova čísla lze vypočítat užitím rekurentní formule

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \qquad B_0 = 1. \tag{$*$}$$

Ze vzorce $(*)$ „bezprostředně“ dostáváme

$$B_0 = 1, \quad \cdots \quad B_5 = 52, \quad B_6 = 203, \quad B_7 = 877, \quad B_8 = 4140, \quad \dots$$

Příklad 30. Nechť je na množině $\{a, b, c, d\}$ dána relace R. Rozhodněte, zda je R relací uspořádání (příp. zda se jedná o úplné uspořádání) nebo relací ekvivalence, je-li

(a) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, a], [b, c], [b, d]\}$;
(b) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [d, a], [a, d]\}$;
(c) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$;
(d) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, a], [a, b], [b, c], [c, b]\}$;
(e) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [b, a], [a, b], [b, c], [c, b], [a, c], [c, a]\}$;
(f) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d], [c, d]\}$.

[(a) *uspořádání*; (b) *ekvivalence*; (c) *uspořádání i ekvivalence*; (d) *není tranzitivní*; (e) *není reflexivní*; (f) *úplné uspořádání*]

Příklad 31. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $\left(2^A, \subseteq\right)$ (graf uspořádání $\subseteq$ na systému $P(A)$ všech podmnožin dané množiny A) pro

$$A = \{\} = \emptyset, \quad A = \{1\}, \quad A = \{1,2\}, \quad A = \{1,2,3\}, \quad \ldots$$

[*Diagram vytváří n-dimenzionální krychli pro n-prvkovou množinu A*]

Příklad 32. Nechť je libovolně dáno prvočíslo p. Sestrojte *nenulový* mnohočlen (polynom) s koeficienty v $\mathbb{Z}_p$, tj. výraz

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{Z}_p$ ($i \in \{0, \ldots, k\}$), $a_k \neq 0$, který na množině $\mathbb{Z}_p$ nabývá pouze nulových hodnot.

$[x^p - x]$

4. Demonstrativní cvičení
8. 10. 2008

Příklad 33. Vypočtěte

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

[$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$]

Příklad 34. Pomocí Gaussovy (případně „Gauss-Jordanovy“) eliminační metody vyřešte systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -8, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

[$x_1 = -5/3 + 2t/3,\ x_2 = -2/3 + 2t/3,\ x_3 = -1 + t,\ x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$]

Poznámka. Množinu řešení budeme zapisovat ve tvaru

$$\left\{ \left(2t - \frac{5}{3},\ 2t - \frac{2}{3},\ 3t - 1,\ 3t\right),\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Příklad 35. Užitím Gaussovy („Gauss-Jordanovy“) metody určete řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3, \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\
3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 8, \\
-2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0.
\end{array}$$

[*Soustava uvedených rovnic nemá řešení*]

Příklad 36. Uveďte (všechna) řešení homogenního systému

$$x + y = 2z + v, \quad z + 4u + v = 0, \quad -3u = 0, \quad z = -v$$

4 lineárních rovnic 5 (reálných) proměnných x, y, z, u, v.

$[(x, y, z, u, v) = (-t - s, t, -s, 0, s)\,,\ t, s \in \mathbb{R}]$

Příklad 37. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & ax_2 & - & 2x_3 & = & b, \\ x_1 & + & (1-a)x_2 & & & = & b-3, \\ x_1 & + & (1-a)x_2 & + & ax_3 & = & 2b-1 \end{array}$$

(a) právě 1 řešení;

(b) žádné řešení;

(c) alespoň 2 řešení?

[(a) $a \neq 0$; (b) $a = 0, b \neq -2$; (c) $a = 0, b = -2$]

Poznámka. Doplňme, že pro $a = 0$, $b = -2$ dostáváme množinu řešení

$$\{(-2+2t,\ -3-2t,\ t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$$

a pro $a \neq 0$ lze dostat

$$\left\{\left(\frac{-3a^2 - ab - 4a + 2b + 4}{a},\ -\frac{2b+3a+4}{a},\ \frac{b+2}{a}\right)\right\}.$$

Příklad 38. Zjistěte počet řešení soustav

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & \sqrt{5}x_2 & + & 11x_3 & = & -9, \\ x_1 & & & - & 5x_3 & = & -9, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & -7; \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 12x_3 & = & 0, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 4; \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 12x_3 & = & 0, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

[*Správná odpověď je* (a) 1; (b) 0; (c) *nekonečně mnoho*]

Příklad 39. Nalezněte (libovolný) lineární homogenní systém, kterému vyhovuje uspořádaná čtveřice

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 3, 4).$$

[*Např.* $x_1 = x_2$]

Najděte (libovolný) lineární systém, jehož množina řešení je

$$\{(t+1, 2t, 3t, 4t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

[*Např.* $2x_1 = x_2 + 2,\ 2x_2 = x_4,\ 4x_3 = 3x_4$]

Příklad 40. Vyřešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\left[X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

Vyřešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\left[X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 41. Určete všechny mocniny matice

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

tj. vypočtěte $A^n(\varphi) := (A(\varphi))^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

$[A^n(\varphi) = A(n\varphi),\ n \in \mathbb{N}\ (n \in \mathbb{Z})]$

Příklad 42. Napište matice tří lineárních zobrazení – rotací o úhel φ v kladném smyslu kolem jednotlivých os x, y a z v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Při rotaci libovolného bodu kolem dané osy se příslušná (odpovídající té ose) souřadnice daného bodu nemění. V rovině vymezené dvěma zbylými osami je pak již rotace dána maticí z Příkladu 42.

Rotace kolem osy z je proto určena maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rotace kolem osy x maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

a rotace kolem osy y potom maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

U matice rotace kolem osy y musíme dávat pozor na znaménka. Rotace kolem uvažované osy je v kladném smyslu: otáčení probíhá <u>proti</u> směru pohybu hodinových ručiček při pohledu proti směru kladné poloosy. □

Příklad 43. Stanovte matici rotace v kladném smyslu o úhel $\pi/3$ kolem přímky procházející počátkem s orientovaným směrovým vektorem $(1,1,0)$.

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto 3 zobrazení:

- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\frac{\pi}{3}$ v kladném smyslu podle osy x;
- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvnímu zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo.

Takto obdržíme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících 3 zobrazení:

- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\frac{\pi}{3}$ v kladném smyslu podle osy y;
- rotace o $\frac{\pi}{4}$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

5. Demonstrativní cvičení
15. 10. 2008

Příklad 44. Firma zabývající se velkoplošnými nátěry si objednala 810 litrů barvy, která má obsahovat stejné množství červené, zelené a modré barvy (tj. 810 litrů černé barvy). Obchod může splnit tuto zakázku smícháním běžně prodávaných barev (má skladem jejich dostatečné zásoby), a to

- *načervenalé barvy* – obsahuje 50 % červené, 25 % zelené a 25 % modré barvy;
- *nazelenalé barvy* – obsahuje 12,5 % červené, 75 % zelené a 12,5 % modré barvy;
- *namodralé barvy* – obsahuje 20 % červené, 20 % zelené a 60 % modré barvy.

Kolik litrů od každé z uskladněných barev se musí smíchat, aby byly splněny požadavky zákazníka?

[*Je potřeba smísit po řadě* $400\ l, 160\ l, 250\ l$ *uvedených barev*]

Příklad 45. Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů

(a) $(1,5,7)$, $(0,4,-1)$, $(0,2,1)$;
(b) $(1,0,3)$, $(0,2,1)$, $(1,2,-2)$;
(c) $(2,2,3)$, $(4,-1,3)$, $(5,2,-1)$, $(-1,6,-1)$.

[*Vektory jsou* (a) *lineárně nezávislé*; (b) *lineárně nezávislé*; (c) *lineárně závislé*]

Příklad 46. Stanovte lineární obal vektorů

$$u_1 = (-1, 3, -2, 1), \quad u_2 = (2, -1, -1, 2), \quad u_3 = (-4, 7, -3, 0), \quad u_4 = (1, 5, -5, 4)$$

vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i. Poté zjistěte, zda některý z vektorů

$$u_5 = (0, 5, -5, 4), \quad u_6 = (0, -3, 2, -1), \quad u_7 = (0, 0, 0, 1)$$

(ne)patří do tohoto lineárního obalu.

[Span $\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$ = Span $\langle u_1, u_2, u_4\rangle$, $u_5 = 2u_1 + u_2$, $u_6 = u_1 + u_2 - u_4$, $u_7 \notin$ Span $\langle u_1, u_2, u_4\rangle$]

Příklad 47. Vyčíslete $u(aA(B-C)^T)(4I^8+D)u^T$ (kde jsme vynechávali symbol $\cdot$), jestliže

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \sqrt[5]{23}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[(-5\sqrt[5]{23})]$

Příklad 48. Pomocí elementárních řádkových úprav převeďte matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

na nějakou matici C ve schodovitém tvaru a nalezněte takovou matici B, aby platilo $BA = C$.

Řešení. Budeme-li postupně matici A násobit zleva elementárními maticemi

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obdržíme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & -5/12 & 0 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 49. Určete inverzní matici k matici
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix} \right]$$

Nechť je současně dána matice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Víte-li, že (viz skriptum doc. Hilschera)
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$
určete $\left(A^T B\right)^{-1}$.

$$\left[\left(A^T B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -9 & 42 \\ -10 & -5 & 27 \\ 17 & 10 & -49 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 50. Napište inverzní matici k $n \times n$ matici $(n > 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Napovězme, že

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & c & \cdots & c \\ c & b & c & \cdots & c \\ c & c & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c \\ c & c & \cdots & c & b \end{pmatrix}$$

pro jistá čísla $b, c \in \mathbb{R}$.

$[b = 0,\ c = 1/(n-1)]$

Příklad 51. Dvoudenního autobusového zájezdu se zúčastnilo 45 lidí. První den se platilo vstupné na rozhlednu 30 Kč za dospělého, 16 Kč za dítě a 24 Kč za důchodce, celkem 1116 Kč. Druhý den se platilo vstupné do botanické zahrady 40 Kč za dospělého, 24 Kč za dítě a 34 Kč za důchodce, celkem 1542 Kč. Kolik bylo mezi výletníky dospělých, dětí a důchodců?

Napovězme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

[*Zájezdu se zúčastnilo* 22 *dospělých*, 12 *dětí*, 11 *důchodců*]

6. Demonstrativní cvičení
22. 10. 2008

Příklad 52. Užitím Sarrusova pravidla určete determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$[|\, A\,| = -36,\ |\, B\,| = -4]$

Spočtěte determinant matice

$$\left(A \cdot B^{-2}\right)^T \cdot B.$$

[9]

Poznámka. Doplňme, že

$$\left(A \cdot B^{-2}\right)^T \cdot B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -181 & -747 & 115 \\ -257 & -1071 & 167 \\ 174 & 690 & -98 \end{pmatrix}.$$

Příklad 53. Alespoň dvěma různými způsoby stanovte

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

[−10]

Příklad 54. Uveďte, zda existuje inverzní matice k matici

$$A = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

tj. řekněte, zda je matice A (řádkově) ekvivalentní se čtyřrozměrnou jednotkovou maticí I, tedy odpovězte, zda existují elementární matice $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}, E_m$ $(m \in \mathbb{N})$ takové, že

$$E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I.$$

[*Matice* A^{-1} *existuje*]

Příklad 55. Výpočtem determinantu vhodné matice zjistěte, jestli jsou vektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lineárně nezávislé.

[*Jsou lineárně nezávislé*]

Příklad 56. Určete hodnost matice
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$[h(A) = 4]$

Příklad 57. Kolik má soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 4, \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 5, \\ & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

řešení?

[*Právě* 1]

Příklad 58. Napište (všechna) řešení homogenního systému

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

$[x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0]$

Příklad 59. Je podle Frobeniovy věty systém

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 3x_2 & & & = & 1, \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -4, \\
-x_1 & + & x_2 & & & = & -1, \\
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2
\end{array}$$

konzistentní?

[*Je nekonzistentní – nemá žádné řešení*]

Příklad 60. Vyčíslete

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

[*Daný determinant je roven* (a) 24; (b) 0]

Příklad 61. Spočtěte determinanty

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}, \qquad \dots$$

[$d_2 = -2$, $d_n = 0$ pro $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$]

Příklad 62. Je-li $n \geq 2$, stanovte

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\left[(-1)^{n-1}\, n!\right]$

Příklad 63. Vandermondův determinant. Pro $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) vypočítejte

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Řešení. Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků a následným rozvojem podle prvního sloupce obdržíme

$$\begin{aligned} V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vytkneme-li z i-tého řádku $x_{i+1} - x_1$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, dostaneme

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix}.$$

Odečtením od každého sloupce (počínaje posledním a konče druhým) x_1-násobku předcházejícího lze docílit úpravy

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \ldots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Proto

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)\ V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

Neboť je zřejmě

$$V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1},$$

platí (uvažme matematickou indukci)

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i>j}} (x_i - x_j).$$

□

Poznámka. Všimněme si, že tento determinant je různý od nuly, právě když jsou čísla $x_1, \ldots, x_n$ navzájem různá.

Příklad 64. Nalezněte matici adjungovanou a matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 16 \\ 20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & -12 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 65. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 0, \\ & & 3x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0, \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 & & & = & 4, \\ & & 7x_2 & & & + & 8x_4 & = & 0. \end{array}$$

[$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0$]

7. Demonstrativní cvičení
29. 10. 2008

Příklad 66. Nejprve připomeňme, že množina V s význačným prvkem 0 a se dvěma binárními operacemi, a to sčítáním $+ : V \times V \to V$ a násobením reálným číslem $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, tj.

(U1) $u + v \in V$ pro všechny prvky $u, v \in V$;

(U2) $a \cdot u \in V$ pro $u \in V$, $a \in \mathbb{R}$,

se nazývá *vektorový prostor* (nad $\mathbb{R}$), jestliže pro všechna $u, v, w \in V$ a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

(A1) $u + v = v + u$ (komutativnost operace $+$);

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (asociativita operace $+$);

(A3) $0 + u = u$ (existence nulového vektoru $0 \in V$);

(A4) $u + (-u) = 0$ pro nějaké $-u \in V$ (existence opačného vektoru);

(A5) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ (1. distributivní zákon);

(A6) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ (2. distributivní zákon);

(A7) $(a\,b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$ (asociativita operace $\cdot$);

(A8) $1 \cdot u = u$ (normovanost operace $\cdot$).

Dokažte, že je množina $V = \mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel se

sčítáním $\oplus$ definovaným jako $x \oplus y := xy$ pro $x, y \in \mathbb{R}^+$

a

násobením skalárem $\odot$ zavedeným vztahem $a \odot x := x^a$ pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $a \in \mathbb{R}$

vektorovým prostorem, tj. že jsou při výše uvedených položeních splněny podmínky U1, U2 a axiomy A1–A8.

[*Uspořádaná trojice* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *je vektorovým prostorem s nulovým vektorem* $1 \in \mathbb{R}^+$]

Příklad 67. Je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operacemi

$$[x_1, x_2] \oplus [y_1, y_2] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2], \quad [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

$$a \odot [x_1, x_2] := [ax_1, 0], \quad a \in \mathbb{R}, [x_1, x_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem?

[*Není: uvažme axiom* A8]

Příklad 68. Je-li dáno reálné číslo x_0 a označuje-li $\mathcal{F}_c$ množinu reálných funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(x_0) = c$, nalezněte všechna $c \in \mathbb{R}$, pro která je $\mathcal{F}_c$ s „obvyklými" operacemi

sčítáním funkcí $+$, tj. pro $f, g \in \mathcal{F}_c$ klademe $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

násobením funkce reálným číslem $\cdot$, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ pro $f \in \mathcal{F}_c$, $a \in \mathbb{R}$,

vektorovým prostorem.

[*Jedná se o vektorový prostor, právě když* $c = 0$]

Příklad 69. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ je množina reálných matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, jestli je $\mathcal{C}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$, příp. stanovte dimenzi a bázi $\mathcal{C}$.

$$\left[\textit{Splnění podmínek } \mathrm{U1},\ \mathrm{U2} \textit{ již dává } \dim \mathcal{C} = 2,\ \mathcal{C} = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

Poznámka. Vektorový prostor $\mathcal{C}$ lze brát jako <u>model</u> pro množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$, tedy čísel tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$.

Příklad 70. Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 8 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times 2}$.

[*Vektory jsou* (a) *lineárně nezávislé*; (b) *lineárně závislé*]

Příklad 71. Pro jaká čísla $a \in \mathbb{R}$ jsou polynomy

$$ax^2 + x + 2, \qquad -2x^2 + ax + 3, \qquad x^2 + 2x + a$$

lineárně závislé ve vektorovém prostoru $\mathcal{P}_2$ polynomů stupně nejvýše 2?

$$\left[a \in \left\{-1, \ \tfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}\right]$$

Příklad 72. Ukažte, že polynomy

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^n$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně nejvýše n.

[*Zřejmě postačuje dokázat lineární nezávislost, která vyplývá mj. z řešení Příkladu 63*]

Poznámka. Skutečnost, že polynomy $1, x, x^2, \dots, x^n$ jsou lineárně nezávislé, implikuje známou *jednoznačnost* určení koeficientů, tj. z rovnosti dvou polynomů

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \cdots + b_n\,x^n \quad \text{v } \mathcal{P}_n \text{ (tj. pro } x \in \mathbb{R})$$

plyne rovnost jejich koeficientů

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Typickou aplikací tohoto je tzv. *rozklad na parciální zlomky*, který ilustrujeme Příkladem 100.

Příklad 73. Ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{4\times 1} = \mathbb{R}^4$ jsou dány třídimenzionální (trojrozměrné) podprostory

$$U = \mathrm{Span}\,\langle u_1, u_2, u_3\rangle, \qquad V = \mathrm{Span}\,\langle v_1, v_2, v_3\rangle,$$

přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi a libovolnou bázi podprostoru $U \cap V$.

$$\left[\dim U \cap V = 2,\ U \cap V = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right]$$

Příklad 74. Uveďte nějakou bázi podprostoru

$$U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{3\times 2}$. Tuto bázi doplňte na bázi $\mathrm{Mat}_{3\times 2}$.

$$\left[\textit{Např.} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \textit{ doplníme o vektory } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

8. Demonstrativní cvičení
5. 11. 2008

Příklad 75. Nechť jsou v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$ dány báze

$$\underline{e} = (1, x, x^2, x^3), \qquad \underline{u} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3).$$

Nalezněte matice přechodu od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{e}$ a od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{u}$.

$$\left[T_{\underline{e},\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; T_{\underline{u},\underline{e}} = \tfrac{1}{2} T_{\underline{e},\underline{u}} \right]$$

Příklad 76. Napište souřadnice vektoru $5x^3 + 3x^2 - x + 3$ v bázi $\underline{u}$ prostoru $\mathcal{P}_3$ z Příkladu 75.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Příklad 77. Která ze zobrazení

$$F: \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}; \qquad G: \mathrm{Mat}_{3\times 3} \to \mathbb{R}^3; \qquad H: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

určených předpisy

$$F(A) := \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot A - A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2};$$

$$G(A) := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{tr}\ A \\ |A| \end{pmatrix}, \ A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}; \quad H(p) := p(0),\ p \in \mathcal{P}$$

jsou lineární?

[*Lineární jsou zobrazení F a H*]

Příklad 78. Stanovte Ker L a Im L lineárního zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ zadaného vztahem

$$L\left((x_1, x_2, x_3)^T\right) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)^T, \qquad (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

$\left[\text{Ker } L = \{a \cdot (1, 1, -2)^T;\ a \in \mathbb{R}\},\ \text{Im } L = \{b \cdot (1, 2, 0)^T + c \cdot (3, 4, 2)^T;\ b, c \in \mathbb{R}\}\right]$

Příklad 79. Jaká lineární zobrazení $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (tj. transformace $\mathbb{R}^2$) jsou reprezentována maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$?

[*Matice A udává projekci na osu x; B projekci na osu y;*
C otočení kolem počátku o úhel $\pi/2$ (v kladném směru);
D otočení kolem počátku o $-\pi/2$ po projekci na osu y;
E kompozici projekce na 2. osu po záměně os x a y;
F zrcadlení vzhledem k přímce $x = y$;
G zrcadlení vzhledem k ose x;
H zrcadlení vzhledem k ose y]

Příklad 80. Je-li definováno lineární zobrazení $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ do $\mathcal{P}_4$ přiřazením

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+2b)\,x^3 + 6cx^2 + ax - b - 3c + 8d, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2},$$

uveďte matici tohoto zobrazení v bázích tvořených po řadě vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad x^4,\, x^3,\, x^2,\, x,\, 1.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 11 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

Příklad 81. O lineárním zobrazení derivace $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ víme, že

$$D(1) = 0, \quad D(x) = 1, \quad D(x^2) = 2x, \quad D(x^3) = 3x^2.$$

Určete matici zobrazení D

(a) ve standardních bázích prostorů $\mathcal{P}_3$ a $\mathcal{P}_2$, tj. v bázích

$$\underline{e} = (1, x, x^2, x^3), \qquad \underline{e} = (1, x, x^2);$$

(b) v bázích (viz také Příklad 75)

$$\underline{u} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3) \text{ prostoru } \mathcal{P}_3, \qquad \underline{v} = (1 + x, 1 - x, x + x^2) \text{ prostoru } \mathcal{P}_2.$$

$$\left[\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \ \text{(b)} \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 82. Uvažujme lineární zobrazení D z Příkladu 81 jako lineární transformaci prostoru $\mathcal{P}_3$, tj. nechť $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$. Napište matici tohoto zobrazení ve standardní bázi $\underline{e}$ a poté v bázi $\underline{u}$.

Zopakujme, že

$$\underline{e} = (1, x, x^2, x^3), \qquad \underline{u} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3).$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ 1/2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 83. Zjistěte, zda jsou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

podobné.

[*Nejsou*]

9. Demonstrativní cvičení
12. 11. 2008

Příklad 84. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ (při obvyklém významu zápisu, tedy vektory $E-A$, $F-B$, $G-C$, $H-D$ jsou kolmé na rovinu určenou vrcholy A, B, C, D) v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Vypočtěte úhel mezi vektory $F-A$ a $H-A$.

$[\pi/3]$

Příklad 85. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$n^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \, .$$

Poté uveďte, kdy nastává rovnost.

Řešení. Postačuje uvážit Cauchyovu nerovnost

$$|\, u \cdot v \,| \leq ||\, u \,|| \cdot ||\, v \,||$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ pro vektory

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^T, \qquad v = \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} \right)^T .$$

Tím dostaneme

$$n \leq \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \cdot \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \tag{$*$}$$

Dokazovanou nerovnost potom obdržíme umocněním $(*)$. Dále víme, že Cauchyova nerovnost přejde v rovnost, právě když bude vektor u násobkem vektoru v, což již implikuje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Příklad 86. Zjistěte, zda jsou podprostory

$$U = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ (na sebe) kolmé. Pokud ano, je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tj. je $U^\perp = V$?

$\left[U \perp V,\ V \neq U^\perp\right]$

Příklad 87. Stanovte jádro Ker A a obraz Im A matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -12 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

Příklad 88. Určete jádro Ker A^T, obraz Im A^T a řádkový prostor $R(A^T)$ pro matici A z Příkladu 87.

$$\left[\operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\7\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\-12\end{pmatrix} \right\rangle, R(A^T) \text{ } \textit{zadává} \text{ } \operatorname{Im} A \right]$$

Příklad 89. Napište nějakou bázi ortogonálního komplementu $W_1^\perp$ podprostoru
$$W_1 = \operatorname{Span}\langle (1, 2, -1, 0, 2)^T,\ (2, -3, 1, -1, -3)^T \rangle$$
v prostoru $\mathbb{R}^5$ a libovolnou bázi ortogonálního doplňku $W_2^\perp$ podprostoru
$$W_2 = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\5\end{pmatrix} \right\rangle$$
v prostoru $\mathbb{R}^4$.

$\big[W_1^\perp = \operatorname{Ker} A^T,\ W_2^\perp = \operatorname{Ker} A$ *pro matici* A *z Příkladu 87* (*viz také Příklad 88*)$\big]$

Příklad 90. Najděte ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T;\ x_1 = x_3, x_2 = x_3 + 6x_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

$$\left[U^\perp = \{a \cdot (1, 0, -1, 0)^T + b \cdot (0, 1, -1, -6)^T;\ a, b \in \mathbb{R}\}\right]$$

Příklad 91. Každým dvěma maticím

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

z vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ přiřadíme reálné číslo $8\,ag + bf + 3\,ce + dh$. Jedná se o skalární součin?

[*Ne*]

Příklad 92. Je-li ve vektorovém prostoru $\mathcal{P}_2$ pro libovolné dva polynomy stupně nejvýše 2

$$p = a_2(p) \cdot x^2 + a_1(p) \cdot x + a_0(p), \qquad q = a_2(q) \cdot x^2 + a_1(q) \cdot x + a_0(q)$$

definován jejich skalární součin vztahem

$$\langle\, p,\, q \,\rangle := 3\, a_2(p)a_2(q) + 4\, a_1(p)a_1(q) + 6\, a_0(p)a_0(q),$$

jakou má vektor $3x^2 + 2x + 1$ délku?

[7]

Příklad 93. Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z Příkladu 79 jako vektory vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ se „standardním“ skalárním součinem

$$\langle\, X, Y \,\rangle = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22}, \quad X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}\,.$$

Spočtěte úhly, které svírají matice

(a) A, B; (b) A, G; (c) B, G; (d) C, D;
(e) C, E; (f) D, H; (g) F, H; (h) G, H.

[(a) $\pi/2$; (b) $\pi/4$; (c) $3\pi/4$; (d) $3\pi/4$; (e) $\pi/4$; (f) $\pi/2$; (g) $\pi/2$; (h) π]

10. Demonstrativní cvičení – doplňující příklady
19. 11. 2008

Příklad 94. Je-li na množině $X = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$, kde $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ jsou zobrazení

$$f_1(x) = |\,x\,| - 4, \qquad f_2(x) = |\,x\,| - 3, \qquad f_3(x) = |\,x\,| - 2,$$
$$f_4(x) = |\,x + 2\,|, \qquad f_5(x) = -|\,x\,|, \qquad f_6(x) = -|\,x\,| + 3,$$

dána relace uspořádání R pro $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ takto:

$$([f_i, f_j] \in R) \iff (f_i(x) \leq f_j(x),\ x \in [-2, 2]),$$

přičemž uspořádané dvojici $[a, b] \in R$ přísluší nerovnost $a \leq b$, určete (v množině X)

$$\sup X; \quad \sup\{f_1, f_3, f_4\}; \quad \sup\{f_2, f_5\}; \qquad \inf X; \quad \inf\{f_3, f_4, f_5\}; \quad \inf\{f_4, f_6\}.$$

[$\sup\{f_1, f_3, f_4\} = f_4$; $\inf X = \inf\{f_3, f_4, f_5\} = f_1$; $\sup X$, $\sup\{f_2, f_5\}$, $\inf\{f_4, f_6\}$ *neexistují*]

Příklad 95. Pro libovolnou matici druhého řádu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

platí

$$A^2 = (a + d)\, A - (ad - bc)\, I. \tag{$*$}$$

Tato formule je známa ve tvaru

$$A^2 = \operatorname{tr} A \cdot A - |\, A \,| \cdot I,$$

kde $\operatorname{tr} A := a + d$ je *stopa* („trace“) matice A, $|\, A \,|$ její determinant a I dvojrozměrná jednotková matice.

Využijte vzorce $(*)$ k výpočtu matic A^2, A^3, A^4, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Doplňme, že vynásobením rovnice $(*)$ maticí A dostáváme

$$A^3 = (a + d)\, A^2 - (ad - bc)\, A.$$

Podobně (pomocí matematické indukce) lze ukázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každou 2×2 matici A je

$$A^{n+2} = (a + d)\, A^{n+1} - (ad - bc)\, A^n.$$

$$\left[A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, \; A^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 96. Orientovaný graf je tvořen množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) a množinou hran $H \subseteq \{[i, j];\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Lze jej zadat maticí $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$ definovanou tak, že položíme $a_{ij} = 1$, pokud $[i, j] \in H$, a $a_{ij} = 0$, jestliže $[i, j] \notin H$. Cestou délky k se rozumí posloupnost vrcholů $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které platí $[i_1, i_2], [i_2, i_3], \ldots, [i_{k-1}, i_k], [i_k, i_{k+1}] \in H$. Označíme-li pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ prvky matice A^k jako $a_{ij}(k)$ (tj. $A^k = (a_{ij}(k))$, zvláště $a_{ij} = a_{ij}(1)$), bude přirozené číslo $a_{ij}(k)$ udávat počet cest z vrcholu i do vrcholu j délky k.

Ověřte tuto skutečnost pro některé prvky matic

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 15 & 12 & 13 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 9 \\ 9 & 8 & 10 & 6 & 12 \\ 18 & 10 & 15 & 12 & 13 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[*Např. pro* $a_{23}(3) = 3$ *jsou těmi* 3 *cestami* $2, 3, 2, 3$; $2, 3, 1, 3$ *a* $2, 5, 2, 3$]

Příklad 97. Jako A, B označujme čtvercové matice řádu $n \geq 2$.

(i) (a) Udejte příklad matic A a B, pro které

$$(A+B)\cdot(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

$$\left[\textit{Kupř. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

(b) Dokažte, že matice A a B komutují (tj. $AB = BA$), právě když je

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2.$$

[*Tvrzení plyne z rovnosti* $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$]

(ii) (a) Udejte příklad matic A a B, pro které

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

$$\left[\textit{Kupř. opět } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

(b) Dokažte, že matice A a B komutují tehdy a jenom tehdy, když platí

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

[*To vyplývá z identity* $(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$]

Příklad 98. Nechť symboly A, B označují čtvercové matice druhého řádu. Využitím vzorce $(*)$ z Příkladu 95, tj.

$$A^2 = \operatorname{tr} A \cdot A - |\,A\,| \cdot I,$$

najděte

(a) všechny matice A splňující

$$A^2 = I;$$

(b1) všechny matice A, které mají nuly na hlavní diagonále a pro které je

$$A^2 = I;$$

(b2) všechny matice A, které mají nuly na hlavní diagonále a pro které je

$$A^2 = -I;$$

(b3) alespoň jednu dvojici matic A a B s nulami na hlavních diagonálách takovou, aby platilo

$$A^2 \neq 0,\ B^2 \neq 0, \quad A^2 + B^2 = 0;$$

(c) všechny nenulové matice $A \neq I$ s vlastností

$$A^2 = A.$$

$$\left[\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix},\ b \cdot c \leq 1,\ b, c \in \mathbb{R}\right]$$

$$\left[\text{(b1)}\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ \text{(b2)}\ \begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ \text{(b3)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left[\text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a(1-a)}{b} & 1-a \end{pmatrix},\ a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$$

Příklad 99. Určete objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$ s podstavou v rovině $z = 0$ a s hranami zadanými dvojicemi vrcholů $[0,0,0]$, $[-2,3,0]$; $[0,0,0]$, $[4,1,0]$ a $[0,0,0]$, $[5,7,3]$.

[42]

Příklad 100. Najděte koeficienty $A, B, C \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\frac{6x}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}.$$

$[A = 1,\ B = 3,\ C = -4]$

11. Demonstrativní cvičení
26. 11. 2008

Příklad 101. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

nemá řešení. Poté určete řešení odpovídajícího problému nejmenších čtverců.

[$x_1 = 2 - 3t,\ x_2 = x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$]

Příklad 102. Spočtěte vzdálenost vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

od podprostoru

$$\operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$.

$\left[2\sqrt{6}\right]$

Příklad 103. Body

$$[-2,2], \quad [-1,2], \quad [0,3], \quad [1,4], \quad [2,3]$$

proložte regresní přímku; poté nalezněte jejich nejlepší kvadratickou aproximaci vzhledem k metodě nejmenších čtverců (tzv. aproximaci parabolou, tj. proložte jimi polynom nejvýše druhého stupně při minimalizování hodnoty součtu obsahů čtverců s délkami stran rovnými velikostem rozdílů souřadnic y pro jednotlivá x).

$[2x/5 + 14/5;\ -x^2/7 + 2x/5 + 108/35]$

Příklad 104. Tvoří vektory

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální bázi $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$?

$[Ano]$

Příklad 105. Stanovte souřadnice vektoru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

v ortonormální bázi $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ příslušné bázi $\underline{v}$ z Příkladu 104.

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

Příklad 106. Je-li ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ zaveden skalární součin

$$\langle\, X, Y\,\rangle = x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22}, \quad X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2},$$

ukažte, že matice (vektory)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zadávají ortogonální bázi $\underline{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ tohoto prostoru, a napište souřadnice matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

v ortonormální bázi $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ příslušné bázi $\underline{A}$.

[*Postačuje uvážit řešení Příkladu 104 a Příkladu 105. Odtud plyne, že* $C = 5B_1 - B_3 + 2B_4$.]

Příklad 107. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\left[A^{-1} = A^T/4\right]$

Příklad 108. Ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ se „standardním“ skalárním součinem z Příkladu 106 určete projekci P_1 matice C na podprostor $W_1 = \mathrm{Span}\,\langle A_1, A_2, A_3\rangle$, projekci P_2 matice C na podprostor $W_2 = \mathrm{Span}\,\langle A_4\rangle$, vzdálenost $v(C, W_1)$ matice C a podprostoru W_1 a odchylku $\varphi(C, W_1)$ matice C od podprostoru W_1.

$$\left[P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ v(C, W_1) = 2,\ \varphi(C, W_1) = \arccos\sqrt{\tfrac{13}{15}}\right]$$

Poznámka. Protože $W_1^{\perp} = W_2$, je

$$C = P_1 + P_2.$$

12. Demonstrativní cvičení
3. 12. 2008

Příklad 109. Pomocí „Gram-Schmidtova“ ortogonalizačního procesu stanovte ortogonální bázi podprostoru

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$.

$$\left[\textit{Ortogonalizací}\ \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\ \textit{lze dostat}\ \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right)\right]$$

Uveďte odlišnou ortogonální bázi podprostoru W.

$$\left[\textit{Např.}\ \left((1,-1,0,0)^T,\ (0,0,1,-1)^T,\ (1,1,-1,-1)^T\right)\right]$$

Příklad 110. Najděte všechny (i komplexní) kořeny (včetně násobností) polynomů

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12; \qquad x^4 + x^3 - 12x^2 - 28x - 16;$$
$$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81; \qquad x^4 + 8x^2 - 9.$$

$\Big[$*Při zachování pořadí polynomů* $-3, 2, \pm\sqrt{2}\,i;\ -2, -2, -1, 4;\ 3, 3, 3, 3;\ \pm 1, \pm 3\,i\Big]$

Příklad 111. Určete charakteristický polynom, vlastní hodnoty a vlastní vektory matice
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\left[p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-9),\ \text{Eigen}\,(2) = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \text{Eigen}\,(9) = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

Příklad 112. Stanovte vlastní hodnoty matice

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

[*Daná matice má pouze jedno vlastní číslo, a to* -1]

Poznámka. Dodejme, že

$$\operatorname{Eigen}(-1) = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Příklad 113. Udejte příklad čtyřrozměrné matice s vlastními hodnotami $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 7$ takové, aby algebraická násobnost λ_2 byla 3 a aby

(a) geometrická násobnost λ_2 byla 3 (tj. $\dim \operatorname{Eigen}(7) = 3$);
(b) geometrická násobnost λ_2 byla 2 (tj. $\dim \operatorname{Eigen}(7) = 2$);
(c) geometrická násobnost λ_2 byla 1 (tj. $\dim \operatorname{Eigen}(7) = 1$).

$$\left[\textit{Kupř.}\ \text{(a)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix};\ \text{(b)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix};\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 114. Víte-li, že čísla 1, -1 jsou vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -21 & 11 & 8 & 2 \\ -9 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

uveďte všechna řešení rovnice $p(\lambda) := |\, A - \lambda\, I \,| = 0$.

Nápověda: Označíme-li kořeny polynomu $p(\lambda)$ jako $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, je

$$|\, A \,| \;=\; \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4, \qquad \operatorname{tr} A \;=\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4.$$

[*Kořen* -1 *polynomu* $p(\lambda)$ *je trojnásobný*]

Poznámka. Lze dopočítat

$$\operatorname{Eigen}(1) = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{Eigen}(-1) = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Příklad 115. Pro libovolnou matici A řádu n je její charakteristický polynom $p(\lambda) := |A - \lambda I|$ stupně n, je tedy tvaru

$$p(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

přičemž navíc platí

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A, \quad c_0 = |\,A\,|.$$

Jestliže je matice A trojrozměrná, obdržíme tak

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr} A)\, \lambda^2 + c_1 \lambda + |\,A\,|. \tag{$*$}$$

Volbou $\lambda = 1$ dostáváme

$$|\,A - I\,| = p(1) = -1 + \operatorname{tr} A + c_1 + |\,A\,|.$$

Odsud a z ($*$) získáváme výsledné vyjádření

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr} A)\, \lambda^2 + (|\,A - I\,| - |\,A\,| + 1 - \operatorname{tr} A)\, \lambda + |\,A\,|.$$

Využijte ho k určení charakteristického polynomu a vlastních hodnot matice

$$A = \begin{pmatrix} 32 & -67 & 47 \\ 7 & -14 & 13 \\ -7 & 15 & -6 \end{pmatrix}.$$

$[p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 47\lambda + 60,\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5]$

Poznámka. Opět doplňme vlastní vektory

$$\text{Eigen}\,(\lambda_1) = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Eigen}\,(\lambda_2) = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{Eigen}\,(\lambda_3) = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Příklad 116. Které z matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou diagonalizovatelné?

$[A, C, D]$

Příklad 117. Vypočítejte A^5 a A^{-3}, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[A^5 = \begin{pmatrix} 122 & -121 & 121 \\ -121 & 122 & -121 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-3} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -13 \\ 13 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \right]$$

13. Demonstrativní cvičení – iterované procesy
10. 12. 2008

Příklad 118. Předpokládejte, že v Brně žije 376 000 a v jeho okolí (tzv. okres Brno-venkov) 166 000 lidí a že se jejich celkový počet 542 000 s časem nemění. V dlouhodobém horizontu vyjádřete změny ve velikosti této městské a příměstské populace, pokud se každý rok přestěhuje 15 % obyvatel Brna do jeho okolí a naopak 5 % obyvatel okolních obcí do Brna (ostatní zanedbejte).

[*Výsledky budou uvedeny na demonstrativním cvičení*]

Příklad 119. Nechť je v populačním modelu dravec-kořist (liška-králík) určen vztah mezi počtem lišek L_k a počtem králíků K_k v daném a následujícím měsíci ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) lineárním systémem

$$\begin{array}{rcrcl} L_{k+1} & = & 0,6\,L_k & + & 0,5\,K_k, \\ K_{k+1} & = & -0,16\,L_k & + & 1,2\,K_k. \end{array}$$

Analyzujte limitní chování tohoto modelu.

Příklad 120. Analyzujte limitní chování modelu z Příkladu 119, je-li zadán pozměněným systémem

$$\begin{array}{rcrcr} L_{k+1} & = & 0,6\,L_k & + & 0,5\,K_k, \\ K_{k+1} & = & -0,175\,L_k & + & 1,2\,K_k. \end{array}$$

Příklad 121. Řešte Příklad 119, pokud je

$$\begin{array}{rcrcr} L_{k+1} & = & 0,6\,L_k & + & 0,5\,K_k, \\ K_{k+1} & = & -0,135\,L_k & + & 1,2\,K_k. \end{array}$$

Příklad 122. Fibonacciho čísla. Ve svém spise *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202 si Fibonacci („syn Bonacciho“, vl. jménem Leonardo Pisánský, asi 1170–1240) položil následující otázku: „Kolik párů králíků vznikne z jediného dospělého páru za jeden rok, jestliže každý pár zplodí každý měsíc jeden nový pár, který je pak od druhého následujícího měsíce schopný téhož?“ Nalezněte správnou odpověď.

14. Demonstrativní cvičení
17. 12. 2008

Příklad 123. Neznámý muž přišel hrát ruletu se 100 Kč v kapse. Sází vždy všechno, co zrovna má, a vždy na černou (v ruletě je 37 čísel – 18 černých, 18 červených a nula). Skončí, pokud získá 800 Kč (nebo nebude nic mít). Uvažte jeho „herní plán“ jako Markovův proces.

[*Řešení budou uvedena na demonstrativním cvičení*]

Příklad 124. Zjistěte, zda je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pozitivně (semi)definitní, negativně (semi)definitní.

[*Je pozitivně semidefinitní*]

Příklad 125. Na *třídě* všech množin definujeme relaci $\sim$ tak, že množiny A a B jsou v relaci (tj. $A \sim B$), pokud existuje bijekce (tj. injektivní a současně surjektivní zobrazení) množiny A na množinu B. Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.

Na třídách rozkladu podle této ekvivalence definujeme mohutnost card (pojem „počet prvků“), která dané množině A (tj. třídě rozkladu $[A]$ zadané množinou A) přiřadí

- číslo 0, pokud je množina A prázdná, tedy $\operatorname{card}\{\ \} = 0$;
- číslo $n \in \mathbb{N}$, pokud má množina A právě n prvků;
- symbol $\aleph_0$ (čti „alef nula“), pokud $A = \mathbb{N}$;
- symbol c (od slova „continuous“), pokud $A = \mathbb{R}$.

Číslo (symbol) $\operatorname{card} A$ tedy nazýváme mohutnost (nebo kardinální číslo) množiny A.

Existuje-li bijekce množiny A na množinu B, znamená to, že $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ (obě množiny jsou ve stejné třídě rozkladu).

Množina A se nazývá spočetná, pokud $A \sim \mathbb{N}$, tj. pokud $\operatorname{card} A = \aleph_0$. (Existuje bijekce mezi $\mathbb{N}$ a A, a proto lze prvky množiny A uspořádat do posloupnosti $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$.)

Množina A se nazývá nespočetná, pokud je nekonečná a není spočetná.

Množina A se nazývá nejvýše spočetná, pokud je konečná, nebo spočetná, tj. jestliže

$$\operatorname{card} A \in \mathbb{N} \cup \{0, \aleph_0\}.$$

Lze dokázat následující (viz teorie množin):

- Sjednocení nejvýše spočetně mnoha nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina (prvky tohoto sjednocení lze uspořádat do posloupnosti).
- Jsou-li A, B spočetné, potom je také $A \times B$ spočetná (prvky kartézského součinu konečně mnoha spočetných množin lze uspořádat do posloupnosti).
- Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.
- Je-li A nespočetná a $B \subseteq A$ její spočetná podmnožina, potom je $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card} A$.
- Je-li A nekonečná a B nejvýše spočetná, potom je $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A$.
- Množina je nekonečná, právě když je ekvivalentní s nějakou vlastní podmnožinou.
- Na množině (uvedených) kardinálních čísel lze jednoduše definovat relaci uspořádání. Je-li $a = \operatorname{card} A$ a $b = \operatorname{card} B$, klademe

  $$a \leq b, \text{ pokud existuje injektivní zobrazení } A \text{ do } B.$$

  Navíc píšeme $a < b$, pokud $a \leq b$ (ve smyslu předchozího uspořádání) a současně $a \neq b$. Nyní můžeme (někdy jednoduše, někdy dosti složitě) dokázat následující vlastnosti kardinálních čísel:

  - Kardinální číslo $\aleph_0$ je nejmenší nekonečné kardinální číslo.
  - **Cantorova věta.** Označíme-li $P(A)$ množinu všech podmnožin libovolné množiny A, potom platí nerovnost

    $$\operatorname{card} A < \operatorname{card} P(A).$$

    Jejím důsledkem je fakt, že existuje nekonečně mnoho nekonečných kardinálních čísel.
  - Množina všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ má mohutnost c, tj.

    $$\operatorname{card} P(\mathbb{N}) = c.$$

  - Mohutnost množiny $\mathbb{N}$ je menší než mohutnost množiny $\mathbb{R}$, tj.

    $$\aleph_0 < c.$$

    (To zjevně vyplývá z předchozích dvou tvrzení.)
  - Nelze dokázat, zda je „mezi“ kardinálními čísly $\aleph_0$ a c ještě nějaké další (nekonečné) kardinální číslo, tj. nelze dokázat, jestli je $c = \aleph_1$, nebo jestli existuje (alespoň jedno) kardinální číslo d, pro které $\aleph_0 < d < c$ (ve smyslu existence odpovídající podmnožiny $\mathbb{R}$ a příslušných injektivních zobrazení).
  - Lze přirozeně definovat sčítání, násobení, mocniny kardinálních čísel (aritmetika nekonečných čísel) tak, aby byla splněna „intuitivní pravidla“ – např. $\aleph_0 \pm n = \aleph_0$, $c \pm n = c$, $c \pm \aleph_0 = c$ apod. (tzv. „pohlcovací zákony“).